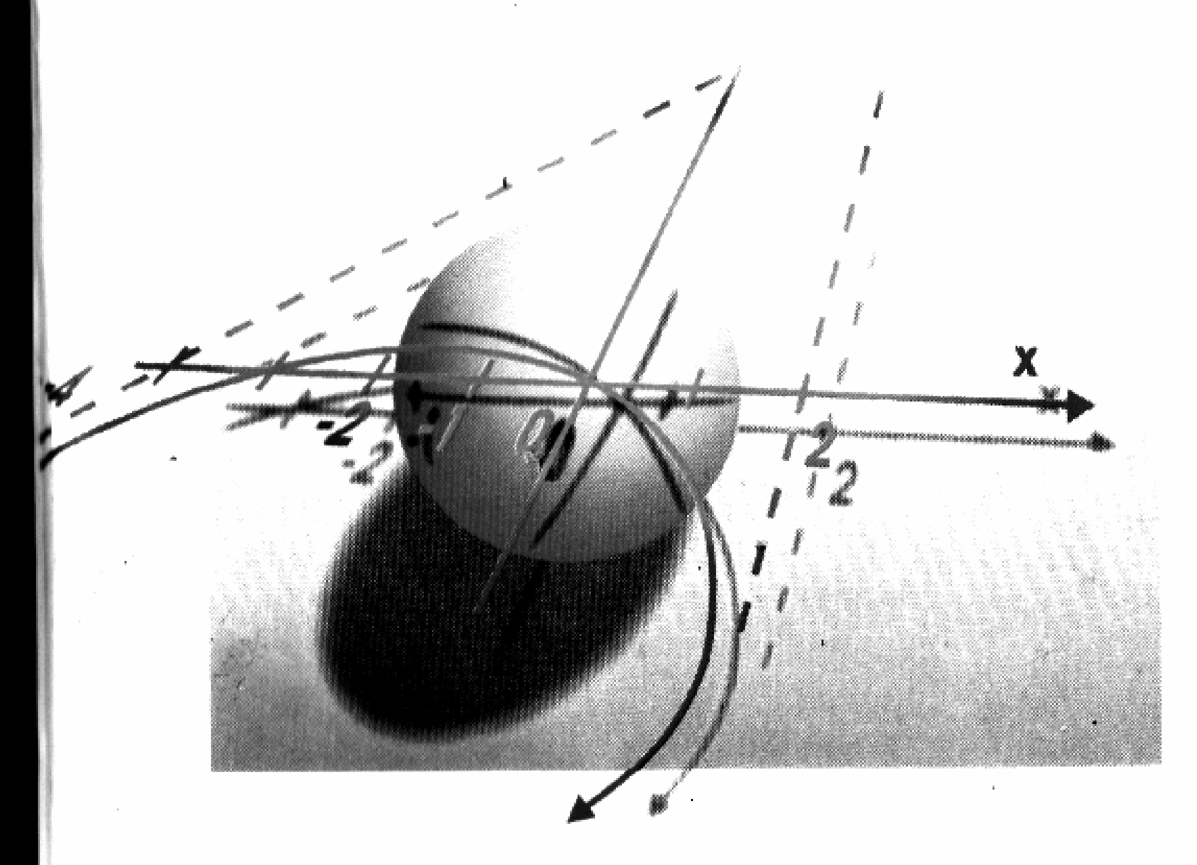
Introducción al

ANÁLISIS MATEMÁTICO

(CÁLCULO 1)



Hebe T. Rabuffetti



INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS MATEMÁTICO

(CÁLCULO I)

HEBE T. RABUFFETTI
Profesora Titular de análisis matemático de la Facultad Regional Buenos Aires de la Universidad Tecnológica Nacional

Decimoquinta edición



517.1(075) RAB Rabuffetti, Hebe T.
Introducción al análisis matemático: Cálculo 1. - 15a. ed - Buenos Aires: El Ateneo, 1999.
X, 502 p.; 23 x 16 cm.

ISBN 950-02-5293-7

I. Título - 1. Matemática - Enseñanza Universitaria

1a. edición, 1970
2a. edición, 1972
(ambas publicadas por Editorial Caese S. A.)

Patagones 2463 - (1282) Buenos Aires, República Argentina
Tel.:4942-9002 - Fax: 4942-9162
Internet: www.yenny.com
e-mail: librerias@yenny.com

Impreso en T. G. COLOR EFE,
Paso 192, Avellaneda, Bs. As.,
el 12 de julio de 1999.
Tirada: 500 ejemplares.

IMPRESO EN LA ARGENTINA

INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS MATEMÁTICO

(CÁLCULO I)

OBRAS DE LA AUTORA

INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS MATEMÁTICO. *Cálculo I*
INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS MATEMÁTICO. *Cálculo II*
TEMAS DE ÁLGEBRA. *Lógica*
TEMAS DE ÁLGEBRA. *Funciones*

Índice general

1. NOCIONES PREVIAS

El análisis matemático en sí mismo comienza con el estudio de los conjuntos de números reales y la noción de límite.

Estos conceptos fundamentales no pueden presentarse sin recurrir a otros conceptos previos sobre conjuntos, cuantificadores, módulo, etc. Por ello es aconsejable que cualquier curso de análisis sea posterior a un curso elemental de álgebra donde se den las nociones de lógica simbólica, conjuntos, relaciones y estructuras, necesarias para encarar una introducción al análisis en forma actualizada.

Sin embargo, quienes inician este estudio no poseen generalmente los conocimientos indicados, sino que los reciben paralelamente. Por eso la primera parte de este capítulo está destinada a una breve exposición de esos temas básicos, que serán utilizados en desarrollos posteriores y son indispensables para su comprensión. Estos conceptos previos se darán en forma sintética. El lector puede recurrir para su aclaración a otros textos que tratan dichos temas en forma detallada.

A continuación de esos temas iniciales se presenta el conjunto de los números reales mediante su estructura axiomática. Es aconsejable dedicar atención especial al axioma de continuidad o axioma del extremo superior, que será utilizado posteriormente en varias demostraciones.

El capítulo 3, donde se dan algunas normas generales para representar gráficamente funciones escalares, es solamente una guía para el tema. Recién después de haber finalizado el capítulo 7 puede completarse el gráfico de una función de manera menos intuitiva. Sin embargo, es conveniente manejar desde el comienzo las representaciones gráficas, pues ayudan a interpretar conceptos abstractos fundamentales, como límite y continuidad.

Finalmente, se aconseja, en una primera lectura, dejar de lado algunos temas que pueden presentar dificultades al estudiante que recién se inicia en la materia. Esos temas han sido señalados en el texto con la marca ◆.

Comenzaremos el plan propuesto dando algunos elementos de lógica matemática o simbólica.

I. Lógica simbólica

La matemática exige en cualquiera de sus ramas un lenguaje claro y preciso. Estas virtudes las proporciona la lógica matemática o simbólica, que da a cada expresión un significado exacto y a cada símbolo una interpretación sin ambigüedades.

Una manera sencilla de introducir el lenguaje lógico es proporcionada por el cálculo de proposiciones o cálculo proposicional.

Proposición es toda expresión acerca de la cual tiene sentido decir si es verdadera o falsa.

"3 es número entero",
"el diamante es una flor",

son dos proposiciones. La primera es verdadera y la segunda falsa.

La expresión *"x es número par"*, en cambio, no es una proposición, pues no puede afirmarse, con sentido, su verdad o falsedad.

A partir de las dos proposiciones consideradas pueden obtenerse otras. Por ejemplo:

"3 es número entero y el diamante es una flor",
"3 es número entero o el diamante es una flor",
"si 3 es número entero, entonces el diamante es una flor".

Estas nuevas proposiciones se obtienen vinculando las iniciales mediante las palabras *y, o, si - entonces,...*, etc. En lógica esta conexión se hace definiendo operaciones entre proposiciones.

Como la cuestión fundamental es saber si la proposición resultante es verdadera o falsa para cada valor de verdad de las proposiciones componentes, se suelen representar las proposiciones mediante letras minúsculas: p, q, r, s, . . . y se dan tablas que proporcionan la información necesaria. Estas tablas se llaman tablas de verdad e indican si el resultado de la operación es una proposición verdadera o falsa.

Operaciones del cálculo proposicional

1. **Negación**

$\sim p$ (no p) es una proposición falsa si p es verdadera, y verdadera si p es falsa.

Abreviando verdadera con V y falsa con F, se obtiene la tabla siguiente, que define la operación indicada:

p	$\sim p$
V	F
F	V

Ejemplo

p : *"el diamante es una flor"* es una proposición falsa.

Luego, su negación $\sim p$: *"el diamante no es una flor"* es verdadera.

2. **Conjunción**

$p \wedge q$ (p y q) es una proposición verdadera únicamente si p y q son ambas verdaderas.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ejemplo

p : *"4 es número par"* es una proposición verdadera.
q : *"Bahía es capital de Brasil"* es falsa.

Luego, su conjunción $p \wedge q$: *"4 es número par y Bahía es capital de Brasil"* es una proposición falsa.

3. **Disyunción**

$p \vee q$ (p o q) es una proposición falsa únicamente si p y q son ambas falsas.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplo

p : *"las mariposas hablan"* es una proposición falsa.
q : *"4 es número par"* es verdadera.

Luego, su disyunción $p \vee q$: *"Las mariposas hablan o 4 es número par"* es verdadera.

4. **Disyunción exclusiva**

$p \veebar q$ (p ó q) es verdadera solamente si una de sus componentes es verdadera y la otra es falsa.

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplo

p : *"4 es número par"* es verdadera.
q : *"Lima es capital de Perú"* es verdadera.

En este caso, $p \veebar q$: *"4 es número par ó Lima es capital de Perú"* es falsa por tratarse de una disyunción exclusiva.

5. **Implicación**

$p \Rightarrow q$ (si p, entonces q) o (p implica q) o (q si p) es una proposición falsa solamente cuando p es verdadera y q es falsa.

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p es el antecedente de la implicación y q el consecuente.

p	$\Rightarrow$	q
condición suficiente		condición necesaria

Ejemplo

p : *"5 es número negativo"* es falsa.
q : *"el ruiseñor es un árbol"* es falsa.

Luego, la implicación $p \Rightarrow q$: *"si 5 es número negativo, entonces el ruiseñor es un árbol"* es verdadera.

6. **Doble implicación**

$p \Leftrightarrow q$ (p si y sólo si q) es una proposición verdadera solamente si p y q tienen el mismo valor de verdad. Es decir, si ambas proposiciones son falsas o verdaderas simultáneamente, lo que las hace lógicamente equivalentes.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ejemplo

p : *"8 es número impar"* es falsa.
q : *"4 es número negativo"* es falsa.

La proposición $p \Leftrightarrow q$: *"8 es número impar si y sólo si 4 es número negativ*
es verdadera.

Las proposiciones compuestas obtenidas pueden volver a combinarse pa formar nuevas proposiciones.*

* *Nota*: al utilizar los símbolos de las operaciones lógicas, se establece un orden de preemin cia entre los mismos, al igual que sucede con los símbolos de la aritmética, para evitar el u excesivo de paréntesis. La convención indica que "$\Leftrightarrow$" es más fuerte que "$\Rightarrow$" y éste m fuerte que "$\wedge$" y "$\vee$".

Por ejemplo, la expresión: $p \Rightarrow s \Leftrightarrow q \vee r \Rightarrow p \wedge r$
significa: $(p \Rightarrow s) \Leftrightarrow [(q \vee r) \Rightarrow (p \wedge r)]$.

Entre las operaciones indicadas tiene especial importancia la implicación, que aparece continuamente en el enunciado de propiedades y teoremas.

Consideremos, como caso particular, la ***negación de una implicación***, que se utilizará varias veces en este libro.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	F

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

$$\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$$

Por lo tanto, la negación de una implicación es lógicamente equivalente a la conjunción entre el antecedente de la implicación y la negación del consecuente.

Por ejemplo, la negación de la proposición: *"si las rectas* a y b *son paralelas, entonces los ángulos alternos son iguales"*, está dada por la proposición: *"las rectas* a y b *son paralelas y los ángulos alternos no son iguales"*.

Interesa conocer ciertas implicaciones asociadas a la implicación $p \Rightarrow q$, que llamaremos implicación directa.

$q \Rightarrow p$ es la implicación ***recíproca.***
$\sim p \Rightarrow \sim q$ es la implicación ***contraria.***
$\sim q \Rightarrow \sim p$ es la implicación ***contrarrecíproca.***

Ejemplo

Consideremos las siguientes proposiciones:
p : ABC es un triángulo equilátero,
q : ABC es un triángulo isósceles.

Implicación *directa:* si ABC es un triángulo equilátero, entonces ABC es un triángulo isósceles.

Implicación *recíproca:* si ABC es un triángulo isósceles, entonces ABC es un triángulo equilátero.

Implicación *contraria:* si ABC no es un triángulo equilátero, entonces ABC no es un triángulo isósceles.

Implicación *contrarrecíproca:* si ABC no es un triángulo isósceles, entonces ABC no es un triángulo equilátero.

Para facilitar algunas demostraciones, se puede probar que cualquier implicación es equivalente a su contrarrecíproca:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	q	p	$\sim q \Rightarrow \sim p$
V	V	F	F	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V

$$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \Rightarrow \sim p$$

Cuantificadores

Como ya se ha visto, la expresión *"x es número par"* no es una proposición, pero se transforma en proposición si se reemplaza x por un número. Dicha expresión recibe el nombre de *función proposicional* de una variable.

Una función proposicional puede transformarse en proposición verdadera para algunos valores de la variable, para todos o para ninguno. Es conveniente disponer de algunos símbolos que denoten esas posibilidades.

Si la función proposicional se convierte en proposición verdadera para todo valor de la variable, corresponde indicarlo anteponiendo el *cuantificador universal,* que se simboliza $\forall$ y se lee *"para todo"* o *"para cualquier"*.

$\forall x$: x es mortal, significa que para cualquier valor significativo de x, la proposición que se obtiene es verdadera.

Si se quiere indicar que la función proposicional se transforma en proposición verdadera para algún valor de x por lo menos, se antepone el *cuantificador existencial,* que se simboliza $\exists$ y se lee *"existe",* y significa que *"existe por lo menos uno".*

$\exists x$ / x es rombo, se lee *"existe x tal que x es rombo",* y significa que por lo menos hay una sustitución de x que transforma a la función proposicional en proposición verdadera.

Puede deducirse fácilmente, por su mera significación lógica, la negación de los cuantificadores mencionados.

Para negar que una propiedad es universal basta encontrar un caso en que sea falsa, es decir, exhibir un *contraejemplo.* En efecto, para negar, por ejemplo, que *todos* los números enteros son pares, basta indicar que *existe* un número entero que no es par, como el número 5.

Es decir: $\sim[\forall x: p(x)] \Leftrightarrow \exists x / \sim p(x)$

Análogamente, si se quiere negar que una propiedad es válida para algún x, debe probarse que es falsa para todo x.

O sea, $\sim[\exists x / p(x)] \Leftrightarrow \forall x: \sim p(x)$.

EJERCICIOS

1) **Hacer tablas de verdad para las siguientes leyes lógicas:**
   - a) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
   - a') $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
   - b) $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
   - b') $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
   - c) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
   - c') $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
   - d) $p \Leftrightarrow \sim(\sim p)$
   - e) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q \wedge r)$

2) Hacer tablas de verdad para las siguientes leyes lógicas:
   - a) $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$
   - b) $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$
   - e) $\sim q \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow \sim p$
   - c) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
   - d) $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$
   - f) $p \wedge (p \vee q) \Rightarrow q$

3) Hacer tablas de verdad para las siguientes leyes lógicas, correspondientes a distintas formas del principio de reducción al absurdo:
   - a) $p \wedge (\sim q \Rightarrow r \wedge \sim r) \Rightarrow q$
   - b) $p \wedge \sim q \Rightarrow \sim p \Leftrightarrow p \Rightarrow q$
   - c) $p \wedge (p \wedge \sim q \Rightarrow s) \wedge (p \wedge \sim q \Rightarrow \sim s) \Rightarrow q$
   - d) $(p \Rightarrow q \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p$

4) **Negar las siguientes expresiones:**
   - a) $\forall x \in R$: $\exists y \in R / x \leq y$
   - b) $\forall x$: $(x \in R \Rightarrow x \in Q)$
   - e) $(q \Rightarrow \sim p) \wedge (p \vee \sim r)$
   - c) $\forall x$: $p(x) \wedge \exists y / q(y)$
   - d) $\exists x \in N / x+1 \leq x$
   - f) $(p \vee \sim q) \Rightarrow (q \wedge \sim r)$

5) **Indicar si la información dada alcanza para dar el valor de verdad de cada una de las siguientes** proposiciones compuestas:

a) $\sim p \vee q \Rightarrow (p \Rightarrow \sim q)$	p es F
b) $p \wedge q \Rightarrow r \Leftrightarrow q$	q es F
c) $p \wedge \sim r \Rightarrow \sim p \vee (r \wedge s)$	r es F
d) $\sim(p \Rightarrow q) \wedge p \wedge q \wedge \sim p$	p es V
e) $(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow q \vee r)$	$p \vee q$ es F

6) Simplificar las siguientes proposiciones:
   - a) $\sim[\sim(p \Rightarrow q) \vee (p \wedge q)]$
   - b) $[(p \wedge q) \vee \sim q] \vee (p \wedge \sim p \wedge \sim q)$
   - c) $[p \vee (q \wedge \sim p)] \wedge [p \vee \sim(q \wedge p)]$
   - d) $\sim(\sim p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \Rightarrow \sim q)$

II. Conjuntos

"Conjunto" es un término que no se define. Los conjuntos se designan generalmente con las letras A, B, C, etc., y se indica cuáles son los elementos que pertenecen a cada conjunto. Esto puede hacerse en algunos casos por extensión, es decir, enumerando los elementos del conjunto.

Por ejemplo: $A = \{0,1,2,3\}$; $B = \{a,b,c\}$.

O por comprensión, indicando alguna propiedad que permite decidir cuáles son los elementos que pertenecen al conjunto.

Por ejemplo: $C = \{x$ / x es un número entero $\wedge\ 0 \leq x \leq 3\}$;
$D = \{x$ / x es un ser humano$\}$.

Obsérvese que C es el mismo conjunto A.

Si un conjunto no tiene elementos, se lo designa con el símbolo ϕ y se lo llama conjunto vacío.

Consideremos los siguientes conjuntos:

$A = \{x$ / x es número real $\wedge\ x^2+1 = 0\}$;
$B = \{x / x > 0 \wedge x < -3\}$.

Estos conjuntos carecen de elementos y por lo tanto son vacíos. Pongamos $A = \phi_1$ y $B = \phi_2$

Puede probarse que existe un conjunto vacío único, y, por ello, $\phi_1 = \phi_2 = \phi$ y ϕ es ***el*** conjunto vacío.

Los conjuntos se pueden vincular entre sí mediante relaciones o pueden generar nuevos conjuntos mediante operaciones o leyes de composición.

Consideramos en primer lugar una relación entre conjuntos llamada inclusión.

Inclusión

El conjunto A está incluido en el conjunto B si y sólo si se verifica que cada elemento de A pertenece a B. Se lo indica $A \subseteq B$ (que se lee A incluido en B).

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x: (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Ejemplo

Si $A = \{0,3,4,1\}$ y $B = \{0,1,2,3,4\}$, entonces $A \subseteq B$.

Con la definición anterior puede probarse fácilmente que el conjunto vacío está incluido en cualquier conjunto.

Es decir, $\forall A: \phi \subseteq A$.

En efecto, $\phi \subseteq A \Leftrightarrow \forall x: (x \in \phi \Rightarrow x \in A)$, y esta implicación es verdadera por tener antecedente falso.

Dado un conjunto cualquiera A, si A tiene n elementos es posible encontrar 2^n conjuntos incluidos en él. Cada uno de estos conjuntos recibe el nombre de subconjunto de A o parte de A.

Por ejemplo, si $A = \{0,3,4\}$,

$A_1 = \phi$, $A_2 = \{0\}$, $A_3 = \{3\}$, $A_4 = \{4\}$,
$A_5 = \{0,3\}$, $A_6 = \{0,4\}$, $A_7 = \{3,4\}$, $A_8 = \{0,3,4\}$
son las partes de A.

El conjunto cuyos elementos son las partes de A se llama potencial de A o conjunto de partes de A y se designa P_A.

En el ejemplo dado, $P_A = \{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7,A_8\}$.

Igualdad de conjuntos

La inclusión de conjuntos es una relación antisimétrica, porque verifica la siguiente propiedad: $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$.

Esta propiedad permite considerar la igualdad de conjuntos de la siguiente manera: dos conjuntos son iguales si y sólo si cada uno de ellos está incluido en el otro.

O sea, $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.

Es decir, en cualquier caso en que se deba demostrar la igualdad de dos conjuntos debe probarse la doble inclusión, lo que equivale a probar que ambos conjuntos tienen los mismos elementos.

Definiremos ahora algunas operaciones usuales entre conjuntos.

Unión

La unión de A y B es el conjunto formado por los elementos de A o de B o de ambos conjuntos. Se lo designa $A \cup B$ (que se lee A unión B).

O sea, $A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$.

Ejemplo

Si $A = \{0,1,2\}$ y $B = \{0,1,3,4\}$, entonces $A \cup B = \{0,1,2,3,4\}$.

Intersección

La intersección de A y B es el conjunto formado por los elementos comunes a ambos. Se lo designa $A \cap B$ (que se lee A intersección B).

O sea, $A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$.

Ejemplo

Si $A = \{0,1,2\}$ y $B = \{0,1,3,4\}$, entonces $A \cap B = \{0,1\}$.

Diferencia

La diferencia A menos B (o complemento de B respecto de A) es el conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B.

$$A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Ejemplo

Si $A = \{a,b,c,d\}$ y $B = \{a,c\}$, entonces $A - B = \{b,d\}$.

Complementación

Al estudiar una teoría determinada, se llama conjunto universal o referencial al conjunto formado con todos los elementos a que se refiere la misma. Generalmente se lo designa U.

Si A es un conjunto cualquiera, se llama complemento de A a la diferencia $U - A$.

Es decir, C_A (complemento de A) $= U - A$.

Por lo tanto, $\forall x: (x \in C_A \Leftrightarrow x \notin A)$.

Es común designar $\overline{A}$ al complemento del conjunto A, o sea, $\overline{A} = C_A$.

Si se considera como conjunto universal al conjunto de los números reales, el complemento del conjunto de los números racionales es el de los números irracionales. El complemento del conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es el conjunto vacío.

Es fácil probar que el complemento del complemento de un conjunto es este conjunto. O sea, $\overline{\overline{A}} = A$.

Producto cartesiano

Al definir un conjunto no se considera un orden entre sus elementos. Así, el conjunto $\{a,b\}$ es idéntico al $\{b,a\}$.

Algunas veces interesan especialmente conjuntos en que los elementos se consideran ordenadamente, como las cuplas o pares ordenados.

El conjunto $(a;b)$ se llama *par ordenado* y se define así: $(a;b) = \{\{a,b\}, \{a\}\}$.

Puede probarse que $(a;b) = (c;d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$.

a es la primera componente del par y b la segunda.

El producto cartesiano de A por B es el conjunto de todos los pares ordenados cuya primera componente pertenece a A y cuya segunda componente pertenece a B.

$$A \times B = \{(x;y) / x \in A \wedge y \in B\}$$

Ejemplo

Si $A = \{0,1,2\}$ y $B = \{3,4\}$,
$A \times B = \{(0;3),(0;4),(1;3),(1;4),(2;3),(2;4)\}$,
$A^2 = A \times A = \{(0;0),(0;1),(0;2),(1;0),(1;1),(1;2),(2;0),(2;1),(2;2)\}$,

$B \times A = \{(3;0),(3;1),(3;2),(4;0),(4;1),(4;2)\}$.
$B^2 = B \times B = \{(3;3),(3;4),(4;3),(4;4)\}$.
Obsérvese que, en general, $A \times B \neq B \times A$.

Relaciones binarias

Interesan muy especialmente los subconjuntos del producto cartesiano, pues dados dos conjuntos A y B, cada subconjunto del producto cartesiano $A \times B$ establece una relación entre los elementos de ambos conjuntos.

Una relación binaria entre los elementos de A y B es, entonces, cualquier conjunto incluido en su producto cartesiano.

$$\mathcal{R} \text{ relación A en B} \Leftrightarrow \mathcal{R} \subseteq A \times B$$

Análogamente, se dice que $\mathcal{R}$ es una relación binaria definida en el conjunto A si es un conjunto incluido en $A \times A$, o sea, si es un subconjunto o una parte de $A \times A$.

$$\mathcal{R} \text{ relación en A} \Leftrightarrow \mathcal{R} \subseteq A^2.$$

Se llama *dominio* de una relación al conjunto formado por las primeras componentes de los pares que pertenecen a la relación. *Recorrido* es el conjunto formado por las segundas componentes de los pares que pertenecen a la relación.

Ejemplo

Sea $A = \{0,1,8,6,3,2\}$
y $\mathcal{R} = \{(0;1),(0;8),(0;6),(1;8),(1;6)\}$ una relación definida en A.
Dominio de $\mathcal{R}$ es el conjunto $\{0,1\}$ y recorrido de $\mathcal{R}$ es el conjunto $\{1,8,6\}$.
Además, como el par (0;1) pertenece a $\mathcal{R}$, 1 es una imagen de 0 en la relación $\mathcal{R}$, 8 es otra imagen de 0, etc. Es decir, si el par (x;y) pertenece a la relación $\mathcal{R}$, y es una imagen de x en la relación $\mathcal{R}$.

Si $\mathcal{R}$ es una relación binaria de A en B, se llama relación *inversa de* $\mathcal{R}$ y se designa $\mathcal{R}^{-1}$ a la relación de B en A formada de la siguiente manera:

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(y;x) \,/\, (x;y) \in \mathcal{R}\}$$

Inmediatamente resulta:

$$\text{Dominio } \mathcal{R} = \text{Recorrido } \mathcal{R}^{-1} \wedge \text{Recorrido } \mathcal{R} = \text{Dominio } \mathcal{R}^{-1}.$$

Ejemplo

Sea $A = \{a,b,c\}$ y $\mathcal{R} = \{(a;a),(b;c),(c;a)\}$.
La relación inversa es $\mathcal{R}^{-1} = \{(a;a),(c;b),(a;c)\}$.

EJERCICIOS

1) Hallar unión, intersección, diferencias y productos cartesianos de:

a) $A = \{0,1,2,3,4\}$ $\quad B = \{a,b\}$
b) $A = \{a,b,c\}$ $\quad B = \{a,x,z\}$
c) $A = \{5,2,3\}$ $\quad B = \phi$

2) Dar todos los subconjuntos de:

a) $A = \{0,1,2\}$
b) $B = \{a,b,c,d\}$
c) $M = \{(0;1),(1;0),(1;1)\}$

3) Dar todas las relaciones posibles en $A = \{a,b\}$.

4) Indicar dominio y recorrido de las siguientes relaciones definidas en el conjunto de los números reales:

a) $\mathcal{R} = \{(0;0),(0;1),(2;1),(1;0)\}$
b) $\mathcal{R}' = \{(a;a),(b;b),(c;a),(a;c)\}$
c) $\mathcal{R}'' = \{(3;\sqrt{5}),(\sqrt{2};\sqrt{5}),(\sqrt{5};\sqrt{5})\}$

5) Siendo $A = \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$, exhibir la relación $\mathcal{R}$ definida en A por la siguiente condición:

$$(a;b) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow a \in A \wedge b \in N \wedge a+b = 5.$$

Dar $\mathcal{R}^{-1}$.

6) Indicar dominio y recorrido de cada una de las siguientes relaciones definidas en R. Graficarlas

a) $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^2+y^2 = 9$
b) $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow 4x^2+9y^2 = 36$
c) $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^2-4y^2 = 1$
d) $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow 9y^2-16x^2 = 25$

III. El número real

La introducción del número real es una etapa fundamental y puede hacerse de distintas maneras. El camino más común es el que parte de los axiomas de Peano para el número natural, luego introduce el número entero utilizando pares ordenados de naturales y el número racional mediante pares de números enteros de segunda componente no nula. La introducción del número real a partir de números racionales difiere esencialmente de los pasos anteriores.

Dedekind y Cantor llegaron al número real por métodos equivalentes y caminos distintos. Dedekind, utilizando cortaduras en el conjunto de los números racionales, y Cantor mediante clases de equivalencia formadas con sucesiones convergentes de números racionales.*

Utilizando cualquiera de los dos métodos, definiciones adecuadas de adición y multiplicación y una relación de orden, pueden probarse como teoremas las propie-

* Utilizaremos, como es común, la siguiente nomenclatura para designar a los conjuntos numéricos mencionados: N para el conjunto de los números naturales, Z para el de enteros, Q para el de racionales y R para el conjunto de los números reales.

dades conocidas del conjunto de los números reales. En especial puede probarse que adquiere estructura de cuerpo conmutativo, ordenado y continuo.

Como ambos métodos presentan algunas dificultades, es más sencillo, en un curso de introducción al análisis, considerar al conjunto de los números reales, al de los reales positivos y a las operaciones de adición y multiplicación como conceptos primitivos que satisfacen ciertos axiomas.

Estos axiomas se pueden clasificar en tres grupos que caracterizan al campo ordenado y continuo.

1. Axiomas de cuerpo conmutativo

Suponemos, entonces, la existencia de un conjunto $\mathbb{R}$, cuyos elementos se denominan números reales. Consideramos, además, que se pueden definir en $\mathbb{R}$ dos operaciones o leyes de composición binarias, a las cuales denominamos adición y multiplicación, simbolizadas, respectivamente, "$+$" y "$\cdot$", que cumplen los siguientes axiomas:

A_1) Propiedad del cierre

La suma de dos números reales es un número real y el producto de dos números reales es un número real.

O sea, $\forall a \forall b\ (a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \Rightarrow a+b \in \mathbb{R} \wedge a \cdot b \in \mathbb{R})$.

Es decir, la adición y la multiplicación son leyes internas en $\mathbb{R}$.

A_2) Propiedad conmutativa

$\forall a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{R}: (a+b = b+a \wedge a \cdot b = b \cdot a)$

A_3) Propiedad asociativa

$\forall a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{R}\ \forall c \in \mathbb{R}: [(a+b)+c = a+(b+c) \wedge (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)]$

A_4) Existencia de elemento neutro

$\exists 0 \in \mathbb{R} / \forall a \in \mathbb{R}: a+0 = a$
$\exists 1 \in \mathbb{R} / \forall a \in \mathbb{R}: a \cdot 1 = a$

A_5) Existencia de elemento simétrico

$\forall a \in \mathbb{R}: \exists (-a) \in \mathbb{R} / a+(-a) = 0$
$\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}\ \exists a^{-1} \in \mathbb{R} / a \cdot a^{-1} = 1$

A_6) Propiedad distributiva

$\forall a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{R}\ \forall c \in \mathbb{R}: a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

2. Axiomas de orden

Introducimos ahora, también en forma axiomática, un nuevo concepto primitivo, el de número real *"positivo"*.

Para ello suponemos que existe un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, cuyos elementos se llaman números positivos y al que designaremos $\mathbb{R}^+$.

Se cumplen las siguientes propiedades:

O_1) Tricotomía

$\forall a: (a \in \mathbb{R} \Rightarrow a = 0 \veebar a \in \mathbb{R}^+ \veebar -a \in \mathbb{R}^+)$

O_2) Propiedad del cierre

La suma de dos números reales positivos es otro número real positivo y el producto también.

$$\forall a \forall b: (a \in \mathbb{R}^+ \wedge b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a+b \in \mathbb{R}^+ \wedge a \cdot b \in \mathbb{R}^+)$$

Es decir, $+$ y $\cdot$ son *leyes internas* en $\mathbb{R}^+$.

Los dos axiomas anteriores permiten ordenar los elementos de $\mathbb{R}$. Para ello puede introducirse la siguiente definición de la relación de *"mayor"*, simbolizada "$>$":

$$a > b \Leftrightarrow a+(-b) \in \mathbb{R}^+.$$

Puede probarse que "$>$" es una relación de *orden estricto total* en $\mathbb{R}$, pues cumple las siguientes propiedades:

1) asimétrica: $\forall a \forall b: (a > b \Rightarrow b \not> a)$;
2) transitiva: $\forall a \forall b \forall c: (a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c)$;
3) lineal: $\forall a \forall b: (a \neq b \Rightarrow a > b \veebar b > a)$.

Se define luego la relación *"menor"*, simbolizada "$<$":

$$a < b \Leftrightarrow b > a.$$

También puede definirse en $\mathbb{R}$ la relación de *"mayor o igual"*, simbolizada "$\geq$", de la siguiente manera:

$$a \geq b \Leftrightarrow a > b \vee a = b.$$

Puede probarse que esta relación "$\geq$" es una relación de *orden amplio total* en $\mathbb{R}$, pues cumple las siguientes propiedades:

1) reflexiva: $\forall a$: $a \geq a$;
2) antisimétrica: $\forall a \forall b: (a \geq b \wedge b \geq a \Rightarrow a = b)$;
3) transitiva;
4) lineal.

Con los dos grupos de axiomas anteriores pueden demostrarse todas las propiedades aritméticas conocidas de los números reales.

Falta considerar, todavía, la propiedad de *"continuidad"*, que tiene importancia fundamental en el esquema de este libro y que no se estudia, generalmente, entre las propiedades elementales del conjunto $\mathbb{R}$.

3. Axioma de continuidad

Este axioma caracteriza especialmente al conjunto de los números reales, ya que el conjunto de los números racionales también constituye un cuerpo ordenado.

Corresponde dar, previamente, las definiciones de cotas y extremos de conjun-

tos ordenados, pues el axioma de continuidad se refiere especialmente a conjuntos acotados.

Cota superior

k es una cota superior de un conjunto C de números reales si y sólo si k es un número real que no es superado por ningún elemento del conjunto.

O sea, k cota superior de C $\Leftrightarrow \forall x$: $(x \in C \Rightarrow x \leq k)$.

Un conjunto está acotado superiormente si y sólo si tiene una cota superior.

Por ejemplo, el conjunto de los números reales negativos $\mathbb{R}^-$ está acotado superiormente, ya que cualquier número no negativo es una cota superior para dicho conjunto.

Obsérvese que si un conjunto tiene una cota superior, tiene infinitas cotas superiores. En el ejemplo anterior, el número 0 es una cota para el conjunto de los números negativos, pues si x es cualquier número negativo, resulta $x < 0$. Es obvio que cualquier número real $a > 0$ es también una cota para el conjunto $\mathbb{R}^-$, pues si $x < 0$ y $0 < a$, entonces $x < a$.

El conjunto de los números reales no está acotado superiormente, pues para cualquier número real k siempre es posible encontrar otro número real x, tal que $x > k$.

Supremo (extremo superior o cota superior mínima)

s es el supremo de un conjunto C de números reales si y sólo si:

1) s es una cota superior de C

$\wedge$

2) Si k es cualquier cota superior de C, entonces $s \leq k$.

Para el conjunto $\mathbb{R}^-$, de los números reales negativos, 0 es el supremo, pues es la menor cota superior.

Puede probarse, utilizando la definición, que el supremo de un conjunto, si existe, es único.

En efecto, sean k_1 y k_2 supremos del conjunto C.

Consideramos, en primer lugar, que k_1 es supremo y k_2, por ser supremo, es también cota superior.

Luego, como el supremo es la menor cota superior, resulta $k_1 \leq k_2$.

Análogamente, por ser k_2 supremo y k_1 cota superior, es $k_2 \leq k_1$.

Por antisimetría, $k_1 \leq k_2 \wedge k_2 \leq k_1 \Rightarrow k_1 = k_2$. O sea, que el supremo es único.

También puede probarse la unicidad por reducción al absurdo. Para ello, sea k_1 un supremo del conjunto C y k_2 otro. Si son números reales distintos, suponemos, sin perder generalidad, $k_1 < k_2$ (1).

k_1 k_2

Como k_1 es supremo, también es cota superior. Además, k_2, por ser supremo, es la menor cota superior. Luego, $k_2 \leq k_1$, lo que contradice (1) y prueba la unicidad del supremo.

El supremo de un conjunto acotado superiormente puede pertenecer o no al conjunto.

En el caso del conjunto $\mathbb{R}^-$, formado por los números reales negativos, el supremo 0 no pertenece al conjunto.

En cambio, si se considera el conjunto de los números reales no positivos, el supremo también es 0, pero, en este caso, pertenece al conjunto.

Si se consideran los conjuntos siguientes:

$$A = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge 2 < x < 5\} \quad y$$
$$B = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge 2 < x \leq 5\},$$

ambos conjuntos están acotados superiormente y el supremo para ambos es el número 5. Pero $5 \notin A$ y, en cambio, $5 \in B$.

2 A 5

2 B 5

En el segundo caso el conjunto B tiene un elemento máximo que es el número 5.

Un conjunto de números reales tiene máximo, entonces, si tiene extremo superior o supremo y éste pertenece al conjunto.

El conjunto de los números reales negativos no tiene, por lo tanto, máximo. En cambio, el conjunto de los reales no positivos tiene como máximo al número 0.

Definiciones análogas se establecen para cota inferior, extremo inferior y mínimo de un conjunto.

Es decir, h es *cota inferior* del conjunto A de números reales si y sólo si es un número real que no supera a ningún elemento de A.

O sea, h cota inferior de A $\Leftrightarrow \forall x$: $(x \in A \Rightarrow x \geq h)$.

Si h es cota inferior, cualquier número real menor que h también es cota inferior.

Infimo, extremo inferior o cota inferior máxima es la mayor cota inferior.

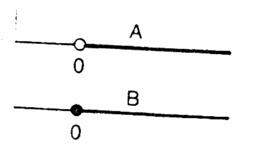
Es decir, k es el ínfimo del conjunto A si y sólo si:

1) k es cota inferior de A, y
2) $\forall k'$: (k' cota inferior de A $\Rightarrow k' \leq k$).

Consideremos los siguientes conjuntos:

$$A = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge x > 0\}$$
$$B = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\}$$

El conjunto A está acotado inferiormente pues 0 y todos los números menores que 0 son cotas inferiores de A. 0 es el extremo inferior o ínfimo de A.



El conjunto B también tiene como ínfimo al número 0. En el conjunto B, además, 0 es el mínimo, pues es el extremo inferior y pertenece al conjunto.

Un conjunto está acotado si y sólo si admite una cota superior y una cota inferior.

Ejemplo

$$A = \{x / x \in R \wedge 0 \leq x < 5\}$$

A

0 5

0, −1, $-\sqrt{2}$, etc., son cotas inferiores de A. 0 es el ínfimo y es mínimo.
5, 6, 7, etc., son cotas superiores de A y 5 es el supremo, pero no es máximo.
El conjunto A es un conjunto acotado.

Se llama *conjunto mayorante* de un conjunto al conjunto de todas sus cotas superiores, y *conjunto minorante* al conjunto de todas sus cotas inferiores.

En el ejemplo anterior, conjunto mayorante de A $= \{x / x \geq 5\}$ y conjunto minorante $= \{x / x \leq 0\}$.

Obsérvese que el conjunto vacío es un conjunto acotado, pues cualquier número real satisface la definición de cota superior para ϕ y también la de cota inferior.

O sea, mayorante de ϕ = minorante de ϕ = R.

Por lo tanto, a pesar de estar acotado, el conjunto vacío no tiene supremo ni ínfimo.

C_1) Axioma de continuidad

Si un conjunto no vacío de números reales está acotado superiormente, entonces tiene supremo.

Es decir, cualquier conjunto no vacío de números reales que admite una cota superior tiene una cota superior mínima que es también un número real.

Esta propiedad, característica del conjunto de los números reales, no se verifica para el conjunto de los números racionales. En efecto, existen conjuntos de números racionales acotados superiormente, cuyo supremo no es un número racional.

Para probarlo, es decir, para demostrar que el axioma de continuidad no es válido para el conjunto Q de los números racionales, basta encontrar un caso en que no se verifique, es decir, un contraejemplo.

Sea A el conjunto formado por todos los números racionales negativos, el cero y los racionales positivos cuyo cuadrado es menor o igual que 2.

Es decir,

$$A = \{x / x \in Q \wedge (x \leq 0 \vee x^2 \leq 2)\}$$

Este conjunto no es vacío y está acotado superiormente por cualquier número racional positivo cuyo cuadrado sea mayor que 2.

A

0 1 $\sqrt{2}$ 2

El supremo de este conjunto A debería ser un número cuyo cuadrado es igual a 2, o sea, $\sqrt{2}$, que no es número racional. Luego, A no tiene supremo en Q.

Consideremos el conjunto B, definido por la misma regla que definió al conjunto A, pero cuyos elementos son números reales:

$$B = \{x / x \in R \wedge (x \leq 0 \vee x^2 \leq 2)\}$$

B

0 1 $\sqrt{2}$ 2

El supremo del conjunto B es $\sqrt{2}$, que es un número real. Luego, el conjunto B tiene supremo en R.

Utilizando el axioma C_1 se puede demostrar que si un conjunto no vacío de números reales está acotado inferiormente, entonces tiene ínfimo.

De los tres grupos de axiomas mencionados se deducen todas las propiedades que interesan del conjunto R.

Tiene especial aplicación, en análisis, el concepto de valor absoluto de un número real y sus propiedades.

Valor absoluto

Definición

Se llama valor absoluto o módulo de un número real al mismo número si es positivo o cero, y a su opuesto si es negativo.

Es decir, $|a| = \begin{cases} a \text{ si } a \geq 0 \\ -a \text{ si } a < 0 \end{cases}$

De acuerdo con la definición: $|5| = 5$, $|-3| = -(-3) = 3$. Por lo tanto, el módulo de un número real es siempre un número no negativo.

Teoremas

1. $\forall a$: $(a \neq 0 \Rightarrow |a| > 0)$
2. $\forall a$: $(|a| = |-a|)$
3. $\forall a$: $(-|a| \leq a \leq |a|)$
4. $\forall a \forall b$: $(|ab| = |a|\,|b|)$
5. $\forall k > 0$ $\forall x$: $(|x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k)$
6. $\forall k > 0$ $\forall x$: $(|x| \geq k \Leftrightarrow x \geq k \vee x \leq -k)$*
7. $\forall a \forall b$: $(|a+b| \leq |a|+|b|)$ (desigualdad triangular)
8. $\forall n \in N$ $\forall a_i \in R$: $(|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|)$
9. $\forall a \forall b$: $(|a| - |b| \leq |a-b|)$
10. $\forall a \forall b$: $(|a-b| \geq ||a| - |b||)$

Los teoremas anteriores y otros similares se demuestran aplicando directamente la definición de módulo. Como esa definición consta de dos proposiciones, con-

* En el teorema 5, la proposición $-k \leq x \leq k$ es equivalente a la siguiente conjunción de proposiciones: $-k \leq x \wedge x \leq k$.

En el teorema 6, en cambio, no debe utilizarse la expresión $-k \geq x \geq k$, pues no es equivalente a la disyunción $-k \geq x \vee x \geq k$, ya que el simbolismo indicado sólo se acepta para reemplazar una conjunción de proposiciones.

viene generalmente desdoblar la demostración de cada teorema, considerando cada caso separadamente.

Probaremos, como guía para este tipo de demostraciones, los teoremas 5, 7 y 8, cuyo uso es muy frecuente.

Teorema 5

$$\forall k > 0 \ \forall x: (|x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k)$$

Demostración

Primera parte:

$$|x| \leq k \Rightarrow -k \leq x \leq k$$

Consideramos dos casos, según x sea o no negativo.

a) $x < 0$
Por definición de módulo: $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$.
Por propiedades de R: $x < 0 \Rightarrow x < -x$.
Luego, es: $x < |x|$.
Como por hipótesis es $|x| \leq k$, resulta $\underline{x \leq k}$.
Además, $-x = |x| \leq k \Rightarrow \underline{-k \leq x}$.
Luego, $x \leq k \wedge -k \leq x$, que es la tesis.

b) $x \geq 0$
Por definición de módulo: $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$.
Si reemplazamos $|x|$ por x en la hipótesis, queda: $\underline{x \leq k}$.
Por propiedades de R: $x \geq 0 \Rightarrow -x \leq x$.
Por transitividad: $-x \leq x \wedge x \leq k \Rightarrow -x \leq k$.
Por propiedades de R: $-x \leq k \Leftrightarrow \underline{-k \leq x}$.
Por lo tanto, $x \leq k \wedge -k \leq x$, que es la tesis.

Segunda parte:

$$-k \leq x \leq k \Rightarrow |x| \leq k$$

Consideramos también dos casos:

a) $x < 0$
Por definición de módulo: $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$.
Si en la desigualdad de la hipótesis reemplazamos en el primer miembro x por $-|x|$, resulta $-k \leq -|x|$.
Luego, es $|x| \leq k$.

b) $x \geq 0$
Por definición de módulo: $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$.
Como por hipótesis es $x \leq k$, resulta $\underline{|x| \leq k}$.

Este teorema permite completar la consideración de conjuntos acotados.

En efecto, si un conjunto C es tal que $\forall x \in C: |x| \leq k$, el conjunto C está acotado pues resulta $-k \leq x \leq k$ y, por definición de cotas, $-k$ es una cota inferior y k es una cota superior del conjunto considerado.

Por otra parte, si un conjunto A está acotado, puede probarse que existe un número positivo k tal que $\forall x: (x \in A \Rightarrow |x| \leq k)$.

Por ejemplo, sea $A = \{x / 1 \leq x \leq 5\}$.

En este caso, también -5 es una cota inferior y resulta $-5 \leq x \leq 5$. Luego, $|x| \leq 5$.

Si se considera $B = \{x / -4 \leq x \leq -1\}$, resulta también $x \leq 4$, por lo cual 4 es cota superior del conjunto B y, por lo tanto, $\forall x: (x \in B \Rightarrow |x| \leq 4)$.

O sea, si es $a \leq x \leq b$ y k es el número máximo entre $|a|$ y $|b|$, entonces resulta $|x| \leq k$.

Por lo tanto, puede probarse fácilmente la siguiente propiedad:

C es un conjunto acotado si y sólo si existe un número real $k > 0$ tal que $\forall x: (x \in C \Rightarrow |x| \leq k)$.

Teorema 7

$$\forall a \forall b: |a+b| \leq |a| + |b|$$

Demostración

Por el teorema 3, es:

$$-|a| \leq a \leq |a| \wedge -|b| \leq b \leq |b|.$$

Si se suman miembro a miembro las relaciones anteriores, resulta:

$$-|a| - |b| \leq a+b \leq |a| + |b|.$$

Pero, $-(|a| + |b|) \leq a+b \leq |a| + |b| \Leftrightarrow |a+b| \leq |a| + |b|$, por el teorema 5.

La propiedad anterior se generaliza para cualquier número de sumandos. Para la demostración en este caso general debe utilizarse el ***principio de inducción completa***, que es el siguiente: Sea p(n) una proposición asociada a cada número natural n, que puede ser verdadera o falsa. Si se cumple:

1) p(1) es verdadera
2) p(k) verdadera implica que p(k + 1) también es verdadera, cualquiera sea el número natural k,

entonces p(n) es verdadera para todo número natural.

Teorema 8

$$\forall n \in N \ \forall a_i \in R: |a_1+a_2+\ldots+a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$$

Demostración por inducción

Sea p(n) la expresión: $|a_1+a_2+\ldots+a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$.

1) p(1) es verdadera pues $|a_1| \leq |a_1|$.

2) $\forall k: (p(k) \text{ verdadera} \Rightarrow p(k+1) \text{ verdadera})$.

En efecto:

$$|a_1+a_2+\ldots+a_k+a_{k+1}| = |(a_1+a_2+\ldots+a_k) + a_{k+1}|$$

y $|(a_1+a_2+\ldots+a_k) + a_{k+1}| \leq |a_1+a_2+\ldots+a_k| + |a_{k+1}|$ por teorema 7.

Además,

$|a_1+a_2+\ldots+a_k| + |a_{k+1}| \leq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_k| + |a_{k+1}|$ por ser verdadera p(k).

Por transitividad, queda la tesis. Es decir, el teorema se ha demostrado por inducción completa para cualquier número de sumandos.

Obsérvese que el principio de inducción completa es un recurso que permite **probar propiedades** válidas para cualquier número natural n.

Observación importante

Si $a > 0$, $\sqrt{a}$ es el símbolo que designa la raíz cuadrada positiva del número a.

Obsérvese además que $\sqrt{b^2}$ no es necesariamente igual al número b, pues puede probarse que $\sqrt{b^2} = |b|$.

Por lo tanto, si $b < 0$, es $\sqrt{b^2} = |b| = -b$, y en este caso índice y exponente no pueden cancelarse, pues $\sqrt{b^2} = -b \neq b$.

El lector debe familiarizarse con la idea de que el símbolo $-b$ representa un número positivo si b es negativo.

EJERCICIOS

1) Demostrar las siguientes propiedades de los números reales:

a) $a+c = b+c \Rightarrow a = b$
b) $a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a = b$ si $c \neq 0$
c) $a \cdot 0 = 0$
d) $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$
e) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

2) Demostrar los teoremas 1, 2, 3, 4, 6, 9 y 10 de valor absoluto.

3) Demostrar por inducción completa que:

a) $\forall n$: $(a^{2n} - b^{2n})$ es divisible por $(a+b)$
b) $\forall n$: $(a^n - b^n)$ es divisible por $(a-b)$
c) $\forall n$: $(a^{2n-1} + b^{2n-1})$ es divisible por $(a+b)$

4) Demostrar: si $x^2 = 2$, entonces x no es número racional.

5) Representar gráficamente los siguientes conjuntos de números reales:

$A = \{x / |x| < 3\}$
$B = \{x / |x| \leq 5\}$
$C = \{x / |x| > 4\}$
$D = \{x / |x-2| \leq 4\}$
$E = \{x / |x-2| \leq 3\}$
$F = \{x / |x+1| < 4\}$
$G = \{x / |x-6| < 1 \vee x = 8\}$
$H = \{x / x < 1 \vee x > 3\}$
$L = \{x / x < 2 \wedge x > -1\}$
$M = \{x / x < 1 \wedge x \geq 2\}$
$N = \{x / |x+1| \geq 4\}$
$P = \{x / |x-2| > 0\}$
$S = \{x / 0 < |x+2| \leq 5\}$
$T = \{x / 0 < |x+3| < 1 \vee x = 1\}$
$V = \{x / 3 < |x-2| \leq 5\}$

6) **Si existen, hallar cotas, extremos, máximos y mínimos de los conjuntos anteriores.**

7) **Indicar cotas y extremos, si existen, de los siguientes conjuntos incluidos en R:**

$A = \{x / -1 \leq x < 3 \vee x = 5\}$
$B = \{x / x = 1 \vee 4 < x \leq 6\}$
$C = \left\{x / x = \frac{1}{n} \wedge n \in N\right\}$
$D = \left\{x / x = \frac{1}{2n} \wedge n \in N\right\}$
$E = \left\{x / x = \frac{2n}{2n+1} \wedge n \in N\right\}$
$F = \left\{x / x = \frac{3n+1}{n+2} \wedge n \in N\right\}$
$G = \left\{x / x = \frac{n^2+1}{2n} \wedge n \in N\right\}$
$H = \left\{x / x = \frac{10n+1}{5n-4} \wedge n \in N\right\}$
$L = \{x / x^2 > 5 \wedge x < 0\}$
$M = \{x / x^2 \leq 3 \wedge x < 0\}$
$N = \{x / x^3 < 7\}$
$P = \left\{x / \left(x = \frac{n+5}{n} \wedge n \in N\right) \vee |x+4| < 1\right\}$

8) Indicar cuáles de los conjuntos anteriores tienen máximo o mínimo.

9) Siendo $A = \{x / |x-1| < 3 \wedge |x+1| \geq 4\}$ y

$B = \left\{x / x = \frac{4n-1}{n+3} \wedge n \in N\right\}$, hallar $A \cap B$.

10) Hallar $x \in R$ tal que $2x-2 \leq |3x-2| \wedge |3x-2| < 3x-1$.

11) Ídem si $\left|\frac{x+2}{x-2}\right| \leq 1$.

12) Ídem si $\left|\frac{3x+2}{x+1}\right| > 2$.

RESPUESTAS A EJERCICIOS

CAPITULO 1

Sección I

1) d)

p	~p	~(~p)	p ⇔ ~(~p)
V	F	V	V
F	V	F	V

2) a)

p	q	p ∧ q	~(p ∧ q)	~p	~q	~p ∨ ~q	~(p ∧ q) ⟺ ~p ∨ ~q
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

3) a)

p	q	r	~q	~r	r ∧ ~r	h: ~q ⇒ r ∧ ~r	p ∧ h	(p ∧ h) ⇒ q
V	V	V	F	F	F	V	V	V
V	V	F	F	V	F	V	V	V
V	F	V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	V	F	F	F	V
F	V	V	F	F	F	V	F	V
F	V	F	F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	F	F	F	F	V
F	F	F	V	V	F	F	F	V

4)

a) $\exists x \in \mathbb{R} / \forall y \in \mathbb{R}: x > y$

b) $\exists x / x \in \mathbb{R} \wedge x \notin \mathbb{Q}$

c) $\exists x./ \sim p(x) \vee \forall y: \sim q(y)$

d) $\forall x \in \mathbb{N}: x+1 > x$

e) $(q \wedge p) \vee (\sim p \wedge r)$

f) $(p \wedge r) \vee \sim q$

5) a) V b) F c) no es suficiente d) F e) no es suficiente

6) a) $\sim p$ b) $q \Rightarrow p$ c) $p \vee q$ d) p

Sección II

1) c) $A \cup B = A$ $A \cap B = \phi$ $A \times B = \phi$

$B \times A = \phi$ $A - B = A$ $B - A = \phi$

3) $\mathcal{R}_1 = \phi$ $\mathcal{R}_2 = \{(a;a)\}$ $\mathcal{R}_3 = \{(b;b)\}$

$\mathcal{R}_4 = \{(a;b)\}$ $\mathcal{R}_5 = \{(b;a)\}$ $\mathcal{R}_6 = \{(a;a),(b;b)\}$

$\mathcal{R}_7 = \{(a;a),(a;b)\}$ $\mathcal{R}_8 = \{(a;a),(b;a)\}$ $\mathcal{R}_9 = \{(b;b),(a;b)\}$

$\mathcal{R}_{10} = \{(b;b),(b;a)\}$ $\mathcal{R}_{11} = \{(a;b),(b;a)\}$ $\mathcal{R}_{12} = \{(a;a),(b;b),(a;b)\}$

$\mathcal{R}_{13} = \{(a;a),(b;b),(b;a)\}$ $\mathcal{R}_{14} = \{(a;a),(a;b),(b;a)\}$ $\mathcal{R}_{15} = \{(b;b),(a;b),(b;a)\}$

$\mathcal{R}_{16} = A^2$

4) a) $D_{\mathcal{R}} = \{0,1,2\}$ $Rec_{\mathcal{R}} = \{0,1\}$

b) $D_{\mathcal{R}'} = \{a,b,c\}$ $Rec_{\mathcal{R}'} = \{a,b,c\}$

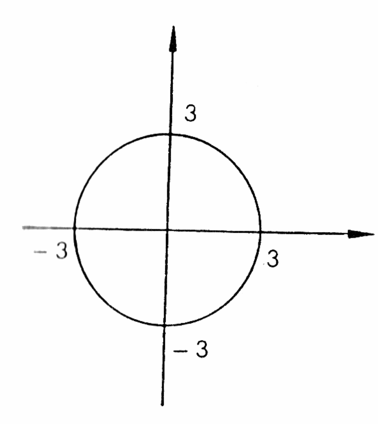
c) $D_{\mathcal{R}''} = \{3, \sqrt{2}, \sqrt{5}\}$ $Rec_{\mathcal{R}''} = \{\sqrt{5}\}$

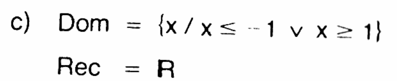
5) $\mathcal{R} = \{(-4;9),(-3;8),(-2;7),(-1;6),(0;5),(1;4),(2;3),(3;2),(4;1)\}$

$\mathcal{R}^{-1} = \{(9;-4),(8;-3),(7;-2),(6;-1),(5;0),(4;1),(3;2),(2;3),(1;4)\}$

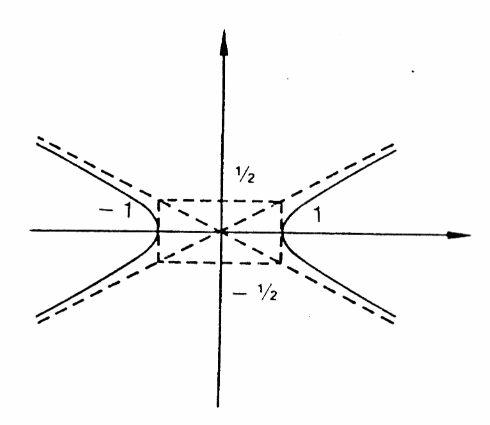
6) a) $Dom = \{x / -3 \leq x \leq 3\}$

$Rec = \{y / -3 \leq y \leq 3\}$



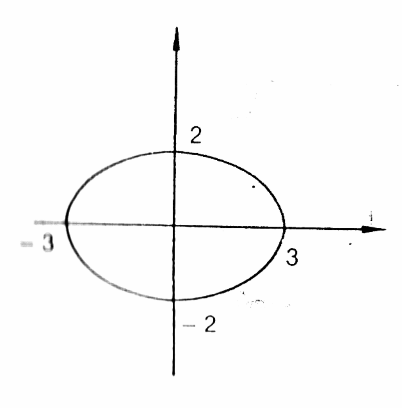

c) $Dom = \{x / x \leq -1 \vee x \geq 1\}$

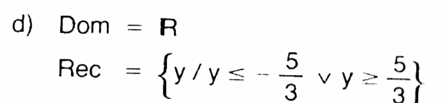
$Rec = \mathbb{R}$



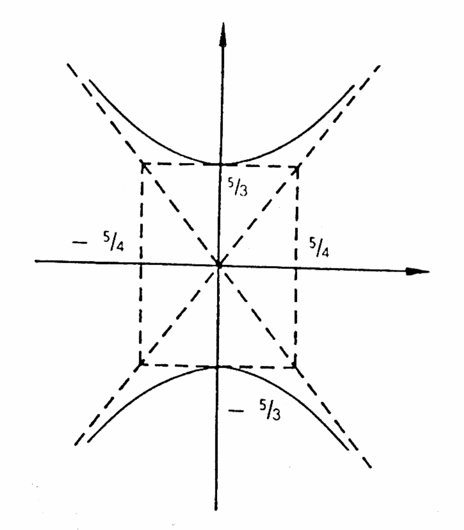
b) $Dom = \{x / -3 \leq x \leq 3\}$

$Rec = \{y / -2 \leq y \leq 2\}$




d) $Dom = \mathbb{R}$

$Rec = \left\{y / y \leq -\frac{5}{3} \vee y \geq \frac{5}{3}\right\}$



1) b) $c \neq 0 \Rightarrow \exists c^{-1} / (a \cdot c) \cdot c^{-1} = (b \cdot c) \cdot c^{-1} \Rightarrow a \cdot (c \cdot c^{-1}) = b \cdot (c \cdot c^{-1}) \Rightarrow a = b$

c) $a = a \cdot 1 = a(1+0) = a \cdot 1 + a \cdot 0 = a + a \cdot 0$ y también $a = a+0$

Luego, $a + a \cdot 0 = a+0 \Rightarrow a \cdot 0 = 0$

d) $a(-b) = a(-b) + 0 = a(-b) + ab + (-ab) =$

$= a(-b+b) + (-ab) = a \cdot 0 + (-ab) = -(ab)$

3) a) 1) $n = 1$: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \Rightarrow a^2 - b^2 = m \cdot (a+b)$

2) $n = h$: $a^{2h} - b^{2h} = k \cdot (a+b)$ (hipótesis inductiva)

$n = h+1$: $a^{2(h+1)} - b^{2(h+1)} = k' \cdot (a+b)$ (tesis)

Demostración

$a^{2(h+1)} - b^{2(h+1)} = a^{2h+2} - b^{2h+2} = a^{2h} \cdot a^2 - b^{2h} \cdot b^2 =$

$= a^{2h} \cdot a^2 - b^{2h} \cdot b^2 + a^{2h} \cdot b^2 - a^{2h} \cdot b^2 = a^{2h} \cdot (a^2 - b^2) +$

$+ b^2(a^{2h} - b^{2h}) = a^{2h}(a+b)(a-b) + b^2 \cdot k(a+b) =$

$= r(a+b) + s(a+b) = k' \cdot (a+b)$

5) $A = \{x / -3 < x < 3\}$ — (o −3 ////// 3 o)

$B = \{x / -5 \leq x \leq 5\}$ — (• −5 ////// 5 •)

$C = \{x / x > 4 \vee x < -4\}$ — (/// −4 o ——— o 4 ///)

$D = \{x / -2 \leq x \leq 6\}$ — (• −2 ////// 6 •)

$E = \{x / -1 \leq x \leq 5\}$ — (• −1 ////// 5 •)

$F = \{x / -5 < x < 3\}$ — (o −5 ////// 3 o)

$G = \{x / 5 < x < 7\} \cup \{8\}$ — (o 5 ////// 7 o ——— • 8)

H — (/// 1 • ——— o 3 ///)

L — (o −1 ////// 2 o)

$M = \phi$

$N = \{x / x \geq 3 \vee x \leq -5\}$ — (/// −5 • ——— • 3 ///)

$P = \{x / x \neq 2\}$ — (////// o 2 //////)

$S = \{x / -7 \leq x \leq 3 \wedge x \neq -2\}$ — (• −7 ////// −2 o ////// 3 •)

$T = \{x / -4 < x < -2 \wedge x \neq -3\} \cup \{1\}$ — (o −4 /// o −3 /// o −2 ——— • 1)

$V = \{x / -3 \leq x < -1 \vee 5 < x \leq 7\}$ — (• −3 /// o −1 ——— o 5 /// 7 •)

6) A: Cotas superiores: $3, 4, \sqrt{11} \ldots$
Conjunto mayorante $= \{x / x \geq 3\}$ — Supremo: 3. — No hay máximo
Cotas inferiores: $-3, -6, -\sqrt{17}, \ldots$
Conjunto minorante $= \{x / x \leq -3\}$ — Ínfimo: −3. — No hay mínimo

B: Conjunto mayorante $= \{x / x \geq 5\}$. — Supremo: 5. — Máximo: 5
Conjunto minorante $= \{x / x \leq -5\}$. — Ínfimo: −5. — Mínimo: −5

C: No está acotado

D: Conjunto mayorante $= \{x / x \geq 6\}$. — Supremo: 6. — Máximo: 6
Conjunto minorante $= \{x / x \leq -2\}$. — Ínfimo: −2. — Mínimo: 2

E: Conjunto mayorante $= \{x / x \geq 5\}$. — Supremo: 5. — Máximo: 5
Conjunto minorante $= \{x / x \leq -1\}$. — Ínfimo: −1. — Mínimo: −1

F: Conjunto mayorante $= \{x / x \geq 3\}$. — Supremo: 3. — No hay máximo
Conjunto minorante $= \{x / x \leq -5\}$. — Ínfimo: −5. — No hay mínimo

G: Conjunto mayorante $= \{x / x \geq 8\}$. — Supremo y máximo: 8
Conjunto minorante $= \{x / x \leq 5\}$. — Ínfimo: 5. — No hay mínimo

H: No está acotado

L: Conjunto mayorante $= \{x / x \geq 2\}$. — Supremo: 2. — No tiene máximo
Conjunto minorante $= \{x / x \leq -1\}$. — Ínfimo: −1. — No tiene mínimo

M: Es el conjunto vacío. Está acotado, pero no tiene extremos

N: No está acotado

P: No está acotado

S: Conjunto mayorante $= \{x / x \geq 3\}$. — Supremo: 3. — Máximo: 3
Conjunto minorante $= \{x / x \leq -7\}$. — Ínfimo: −7. — Mínimo: −7

T: Conjunto mayorante $= \{x / x \geq 1\}$. — Supremo: 1. — Máximo: 1
Conjunto minorante $= \{x / x \leq -4\}$. — Ínfimo: −4. — No tiene mínimo

V: Conjunto mayorante $= \{x / x \geq 7\}$. — Supremo: 7. — Máximo: 7
Conjunto minorante $= \{x / x \leq -3\}$. — Ínfimo: −3. — Mínimo: −3

7 y 8) A: Conjunto mayorante $= \{x / x \geq 5\}$. — Supremo y máximo: 5
Conjunto minorante $= \{x / x \leq -1\}$. — Ínfimo y mínimo: −1

B: Conjunto mayorante $= \{x / x \geq 6\}$. — Supremo y máximo: 6
Conjunto minorante $= \{x / x \leq 1\}$. — Ínfimo y mínimo: 1

C: Conjunto mayorante $= \{x / x \geq 1\}$. — Supremo y máximo: 1
Conjunto minorante $= \{x / x \leq 0\}$. — Ínfimo: 0. — No tiene mínimo

D: Conjunto mayorante $= \left\{x / x \geq \frac{1}{2}\right\}$. Supremo y máximo: $\frac{1}{2}$
Conjunto minorante $= \{x / x \leq 0\}$. Ínfimo: 0. No hay mínimo

E: Conjunto mayorante $= \{x / x \geq 1\}$. Supremo: 1. No hay máximo
Conjunto minorante $= \left\{x / x \leq \frac{2}{3}\right\}$ Ínfimo y mínimo: $\frac{2}{3}$

F: Conjunto mayorante $= \{x / x \geq 3\}$. Supremo: 3 No hay máximo
Conjunto minorante $= \left\{x / x \leq \frac{4}{3}\right\}$. Ínfimo y mínimo: $\frac{4}{3}$

G: No está acotado superiormente
Conjunto minorante $= \{x / x \leq 1\}$. Ínfimo y mínimo: 1

H: Conjunto mayorante $= \{x / x \geq 11\}$. Supremo y máximo: 11
Conjunto minorante $= \{x / x \leq 2\}$. Ínfimo: 2. No hay mínimo

L: Conjunto mayorante $= \{x / x \geq -\sqrt{5}\}$. Supremo: $-\sqrt{5}$. No tiene máximo
No está acotado inferiormente

M: Conjunto mayorante $= \{x / x \geq 0\}$. Supremo: 0. No tiene máximo
Conjunto minorante $= \{x / x \leq -\sqrt{3}\}$. Ínfimo y mínimo: $-\sqrt{3}$

N: Conjunto mayorante $= \{x / x \geq \sqrt[3]{7}\}$ Supremo: $\sqrt[3]{7}$. No tiene máximo
No está acotado inferiormente

P: Conjunto mayorante $= \{x / x \geq 6\}$. Supremo y máximo: 6
Conjunto minorante $= \{x / x \leq -5\}$. Ínfimo: -5. No tiene mínimo

9) $A \cap B = \left\{x / x = \frac{4n-1}{n+3} \wedge n \in N \wedge n \geq 10\right\}$

10) $x > \frac{1}{2}$

11) $x \leq 0$

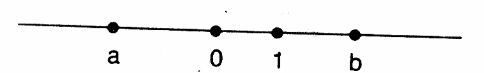
12) $\left(x > 0 \vee x < -\frac{4}{5}\right) \wedge x \neq -1$

2. CONJUNTOS DE PUNTOS

I. Intervalos y entornos

La geometría analítica establece una correspondencia entre puntos de una recta y números reales, de tal forma que a cada número real le corresponde un punto de la recta y a cada punto de la recta un único número real. La recta recibe el nombre de recta real o espacio de una dimensión y los términos punto o número real se usan indistintamente.

En la representación gráfica se indica un punto origen sobre la recta que corresponde al 0 y otro punto a su derecha para representar el 1, con lo cual queda establecida la escala. La relación de orden definida en $\mathbb{R}$ se interpreta geométricamente considerando que si $b > a$, entonces el punto b está a la derecha del punto a.



Esta correspondencia entre puntos y números reales facilita la interpretación de muchas demostraciones y constituye un auxiliar poderoso para su comprensión. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que, si bien cualquier representación gráfica es fuente de claridad, en ninguna demostración tiene validez la utilización de recursos gráficos puramente intuitivos.

A continuación se consideran algunas definiciones útiles.

Intervalos

Siendo $a < b$:

1) *Intervalo cerrado* $[a;b]$ es el conjunto de números reales formado por a, b y todos los comprendidos entre ambos:

$$[a;b] = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x \leq b\}$$

a b

La longitud del intervalo $[a;b]$ es el número positivo $b - a$.

2) *Intervalo abierto* (a;b) es el conjunto de números reales comprendidos entre a y b:

$$(a;b) = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge a < x < b\}$$

———o————————o———
a b

La longitud de (a;b) es también el número positivo b − a.

3) *Intervalo semiabierto a izquierda o semicerrado a derecha* (a;b] es el conjunto de números reales formado por b y los números comprendidos entre a y b:

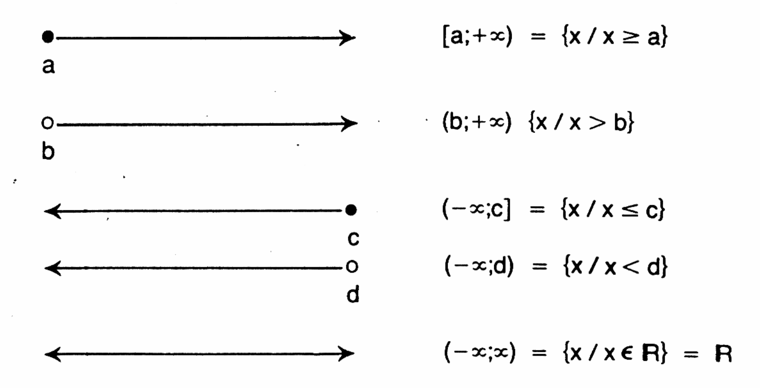
$$(a;b] = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge a < x \leq b\}$$

———o————————●———
a b

Análogamente se define el intervalo [a;b).
También,

$$\text{longitud de } (a;b] = \text{longitud de } [a;b) = b - a.$$

Las definiciones anteriores se pueden generalizar considerando la semirrecta y la recta como intervalos no acotados, lo que se expresa utilizando los símbolos $+\infty$ y $-\infty$. Estos símbolos deben ser considerados con especial atención, recordando que se usan solamente por conveniencia de notación y nunca como números reales.



Entorno

Si a es un punto cualquiera de la recta real y h un número positivo, entorno de centro a y radio h es el intervalo abierto (a−h;a+h). Se lo designa E(a,h).

$$E(a,h) = \{x / a-h < x < a+h\}$$

$$\text{o} \quad E(a,h) = \{x / |x-a| < h\}$$

h
———o————————●————————o———
a − h a a + h

Los entornos suelen designarse indicando solamente el centro, por ejemplo, E(a).

Entorno reducido

Si a es un punto cualquiera de la recta real y h es un número real positivo, entorno reducido de centro a y radio h es el conjunto de puntos del intervalo abierto (a−h;a+h) del cual se excluye el punto a. Se lo designa E′ (a,h) o E′(a).

$$E'(a,h) = \{x / x \neq a \wedge a-h < x < a+h\}$$

$$\text{o} \quad E'(a,h) = \{x / 0 < |x-a| < h\}$$

h
———o————————o————————o———
a − h a a + h

Obsérvese que exigir $0 < |x-a|$ equivale a exigir $x \neq a$, pues $|x-a| = 0 \Leftrightarrow x = a$.

De acuerdo con una propiedad de los conjuntos acotados (pág. 19), cualquier conjunto acotado puede incluirse en un intervalo cerrado.

En efecto, si C está acotado, existe un número real positivo k tal que para cualquier elemento x del conjunto C se verifica: $|x| \leq k$. Por lo tanto, el conjunto C está incluido en el intervalo cerrado $[-k;k]$.

Por ejemplo,

$$A = \{x / -2 < x < \leq 6\} \Rightarrow A \subseteq [-6;6].$$

Un conjunto acotado está siempre incluido en un entorno con centro en el origen. Si $C = \{x / |x| \leq k\}$ y $h > k$, entonces C está incluido en el entorno E(0,h) de centro en el origen y radio h.

En el ejemplo anterior el conjunto A está incluido en un entorno de centro en el origen y radio 7. En este caso debe tenerse en cuenta que el entorno de centro en el origen y radio 6 no incluye al conjunto A, pues el entorno es un intervalo abierto y el número 6 pertenece al conjunto A pero no pertenece al entorno.

Existen, entonces, infinitos entornos que incluyen al conjunto A, pero en este caso ninguno de ellos tiene un radio mínimo.

Si se considera el conjunto $B = \{x / 5 \leq x < 7\}$, en este caso el entorno E(0,7) es el entorno centrado en el origen de menor radio que incluye al conjunto B.

EJERCICIOS

1) Escribir como intervalos y, si es posible, como entornos los siguientes conjuntos:

$A = \{x / 2 \leq x \leq 4\}$	$B = \{x / -1 < x \leq 3\}$
$C = \{x / -7 \leq x < -2\}$	$D = \{x / -1 < x < 3\}$
$F = \{x / -3 < x < 1\} - \{-1\}$	$G = \{x / -3 < x < -1\}$
$H = \{x / \lvert x-2\rvert < 5\}$	$L = \{x / \lvert x+2\rvert \leq 3\}$
$M = \{x / 0 < \lvert x-3\rvert < 1\}$	$N = \{x / 0 < \lvert x+4\rvert < 2\}$

2) Para los conjuntos anteriores, hallar:

a) $A \cap B$ b) $D - F$ c) $L \cap \bar{N}$

3) Para cada uno de los siguientes conjuntos, dar un entorno con centro en el origen que lo incluya:

$A = \{x / -2 \leq x \leq 4\}$ $B = \{x / -10 < x < 7\}$ $C = \{x / -6 \leq x < 6\}$
$D = \{x / -3 < x \leq 4\}$ $E = \{x / |x| < 2\}$ $F = \{x / |x| \leq 2\}$

4) Para cada conjunto dar, si existe, el entorno con centro en el origen de menor radio que lo incluya:

$A = \{x / -1 < x < 4\}$ $B = \{x / -9 < x \leq 6\}$
$C = \{x / -3 \leq x \leq 7\}$ $D = \{x / -5 < x \leq -2\}$
$E = \{x / -2 < x \leq 9\}$ $F = \{x / 4 < x < 5\}$

5) Para cada conjunto dar, si existe, un entorno de radio mínimo que lo incluya:

$A = (-3;7)$ $B = (2;5]$
$C = \left\{x / x = \frac{1}{n} \wedge n \in N\right\}$ $D = \left\{x / x = (-1)^n \frac{n-1}{n} \wedge n \in N\right\}$

6) Escribir cada conjunto como intervalo y, si es posible, como entorno:

$A = \left\{x / \frac{x+3}{x} > 2\right\}$ $B = \{x / |x-2| + |2x-1| < 4\}$
$C = \left\{x / \frac{|x-1|}{x+3} \geq 5\right\}$ $D = \left\{x / \frac{|x-3|}{x} > 2\right\}$
$E = \{x / 1 \leq |2-x| < 3 \wedge |x+1| < 2\}$

II. Punto de acumulación

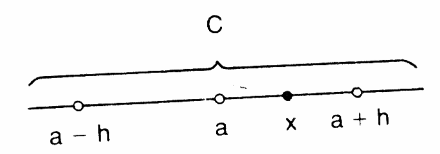
Si C es un conjunto de puntos de la recta real, un punto a es punto de acumulación de C si a todo entorno reducido de a pertenece por lo menos un punto de C. El punto a puede pertenecer o no al conjunto C, pero la definición exige que en cualquier entorno del punto a exista por lo menos un punto de C distinto del punto a.

Es decir:

a punto de acumulación de $C \Leftrightarrow \forall E'(a)\ \exists x / (x \in C \wedge x \in E'(a))$

o a punto de acumulación de $C \Leftrightarrow \forall h > 0\ \exists x / (x \in C \wedge 0 < |x-a| < h)$

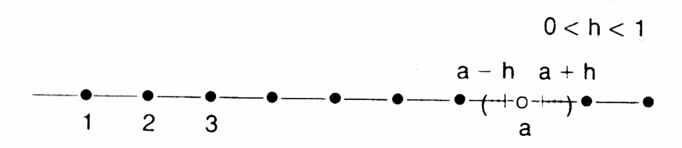
o a punto de acumulación de $C \Leftrightarrow \forall E'(a): E'(a) \cap C \neq \phi$



Ejemplos

1) Si el conjunto C es un intervalo cerrado, todos sus puntos son de acumulación.
2) Si el conjunto C es un intervalo abierto, todos sus puntos son de acumulación y también los extremos son puntos de acumulación de C aunque no pertenecen al conjunto.

3) El conjunto N de los números naturales no tiene puntos de acumulación. Si a es cualquier número natural, basta considerar un entorno reducido de centro a y radio $h < 1$, y a ese entorno reducido no pertenece ningún número natural. Esto prueba que ningún número natural es punto de acumulación del conjunto N.



Mediante un recurso similar puede probarse que ningún número real es punto de acumulación del conjunto N.

4) El conjunto Q de los números racionales tiene a todos los números reales como puntos de acumulación. El conjunto R de los números reales tiene a los números reales como puntos de acumulación.

5) El conjunto $A = \left\{x / x = \frac{n+5}{n} \wedge n \in N\right\}$ tiene un único punto de acumulación que es el 1.

Conjunto derivado

El conjunto formado por todos los puntos de acumulación de un conjunto C es el conjunto derivado de C y se designa C'.

De acuerdo con los ejemplos anteriores:

1) $C = [a;b] \Rightarrow C' = [a;b]$
2) $C = (a;b) \Rightarrow C' = [a;b]$
3) $N' = \phi$
4) $Q' = R$ $R' = R$
5) $A' = \{1\}$

Negación

Para probar que un punto no es de acumulación de un conjunto, basta encontrar un entorno reducido del mismo al cual no pertenezca ningún elemento del conjunto, como se ha hecho para probar que el conjunto N no tiene puntos de acumulación.

Es decir, a no es punto de acumulación del conjunto C si y sólo si existe un entorno reducido de a al cual no pertenece ningún punto del conjunto, que es la negación lógica de la definición de punto de acumulación.

a no es punto de acumulación de $C \Leftrightarrow \exists E'(a) / \forall x: (x \in C \Rightarrow x \notin E'(a))$

o a no es punto de acumulación de $C \Leftrightarrow \exists E'(a) / E'(a) \cap C = \phi$.

El recurso que se utilizó para probar que el conjunto N no tiene puntos de acumulación es válido para demostrar que cualquier conjunto finito no tiene puntos de acumulación, o su contrarrecíproco, según el siguiente teorema.

Teorema

Si a es punto de acumulación del conjunto C, entonces cualquier entorno del punto a tiene infinitos puntos de C.

3) Para cada uno de los siguientes conjuntos, dar un entorno con centro en el origen que lo incluya:

$A = \{x / -2 \leq x \leq 4\}$ $B = \{x / -10 < x < 7\}$ $C = \{x / -6 \leq x < 6\}$
$D = \{x / -3 < x \leq 4\}$ $E = \{x / |x| < 2\}$ $F = \{x / |x| \leq 2\}$

4) Para cada conjunto dar, si existe, el entorno con centro en el origen de menor radio que lo incluya:

$A = \{x / -1 < x < 4\}$ $B = \{x / -9 < x \leq 6\}$
$C = \{x / -3 \leq x \leq 7\}$ $D = \{x / -5 < x \leq -2\}$
$E = \{x / -2 < x \leq 9\}$ $F = \{x / 4 < x < 5\}$

5) Para cada conjunto dar, si existe, un entorno de radio mínimo que lo incluya:

$A = (-3;7)$ $B = (2;5]$
$C = \left\{x / x = \frac{1}{n} \wedge n \in N\right\}$ $D = \left\{x / x = (-1)^n \frac{n-1}{n} \wedge n \in N\right\}$

6) Escribir cada conjunto como intervalo y, si es posible, como entorno:

$A = \left\{x / \frac{x+3}{x} > 2\right\}$ $B = \{x / |x-2| + |2x-1| < 4\}$
$C = \left\{x / \frac{|x-1|}{x+3} \geq 5\right\}$ $D = \left\{x / \frac{|x-3|}{x} > 2\right\}$
$E = \{x / 1 \leq |2-x| < 3 \wedge |x+1| < 2\}$

II. Punto de acumulación

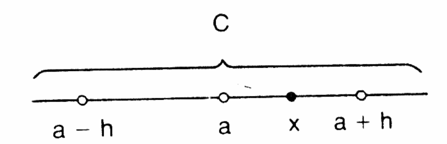
Si C es un conjunto de puntos de la recta real, un punto a es punto de acumulación de C si a todo entorno reducido de a pertenece por lo menos un punto de C. El punto a puede pertenecer o no al conjunto C, pero la definición exige que en cualquier entorno del punto a exista por lo menos un punto de C distinto del punto a.

Es decir:

a punto de acumulación de $C \Leftrightarrow \forall E'(a)\ \exists x / (x \in C \wedge x \in E'(a))$

o a punto de acumulación de $C \Leftrightarrow \forall h > 0\ \exists x / (x \in C \wedge 0 < |x-a| < h)$

o a punto de acumulación de $C \Leftrightarrow \forall E'(a): E'(a) \cap C \neq \phi$

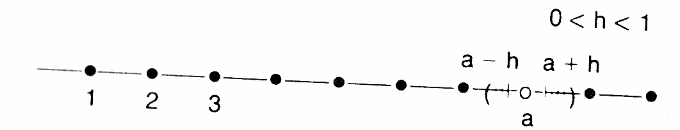


Ejemplos

1) Si el conjunto C es un intervalo cerrado, todos sus puntos son de acumulación.
2) Si el conjunto C es un intervalo abierto, todos sus puntos son de acumulación y también los extremos son puntos de acumulación de C aunque no pertenecen al conjunto.

3) El conjunto N de los números naturales no tiene puntos de acumulación. Si a es cualquier número natural, basta considerar un entorno reducido de centro a y radio $h < 1$, y a ese entorno reducido no pertenece ningún número natural. Esto prueba que ningún número natural es punto de acumulación del conjunto N.

$0 < h < 1$



Mediante un recurso similar puede probarse que ningún número real es punto de acumulación del conjunto N.

4) El conjunto Q de los números racionales tiene a todos los números reales como puntos de acumulación. El conjunto R de los números reales tiene a los números reales como puntos de acumulación.

5) El conjunto $A = \left\{x / x = \frac{n+5}{n} \wedge n \in N\right\}$ tiene un único punto de acumulación que es el 1.

Conjunto derivado

El conjunto formado por todos los puntos de acumulación de un conjunto C es el conjunto derivado de C y se designa C′.

De acuerdo con los ejemplos anteriores:

1) $C = [a;b] \Rightarrow C' = [a;b]$
2) $C = (a;b) \Rightarrow C' = [a;b]$
3) $N' = \phi$
4) $Q' = R$ $R' = R$
5) $A' = \{1\}$

Negación

Para probar que un punto no es de acumulación de un conjunto, basta encontrar un entorno reducido del mismo al cual no pertenezca ningún elemento del conjunto, como se ha hecho para probar que el conjunto N no tiene puntos de acumulación.

Es decir, a no es punto de acumulación del conjunto C si y sólo si existe un entorno reducido de a al cual no pertenece ningún punto del conjunto, que es la negación lógica de la definición de punto de acumulación.

a no es punto de acumulación de $C \Leftrightarrow \exists E'(a) / \forall x: (x \in C \Rightarrow x \notin E'(a))$

o a no es punto de acumulación de $C \Leftrightarrow \exists E'(a) / E'(a) \cap C = \phi$.

El recurso que se utilizó para probar que el conjunto N no tiene puntos de acumulación es válido para demostrar que cualquier conjunto finito no tiene puntos de acumulación, o su contrarrecíproco, según el siguiente teorema.

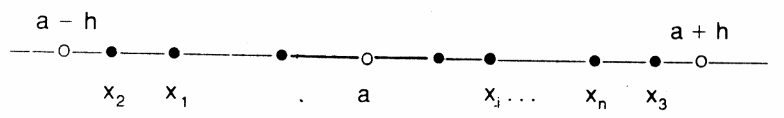
Teorema

Si a es punto de acumulación del conjunto C, entonces cualquier entorno del punto a tiene infinitos puntos de C.

Demostración

Utilizaremos un método indirecto, por reducción al absurdo.

Sea E'(a) un entorno reducido del punto a, al cual pertenecen solamente n elementos de C, o sea, un número finito de elementos de C.



Entre los n puntos de E'(a) hay uno de ellos cuya distancia al punto a es mínima. Sea x_i dicho punto.

Es decir:

$$\exists x_i \,/\, \forall n \neq i: |x_i - a| \leq |x_n - a|.$$

Por lo tanto, basta considerar cualquier entorno reducido del punto a cuyo radio sea menor que dicha distancia para asegurarnos que a dicho entorno reducido no pertenece ningún punto de C.

Elijamos, por ejemplo, un entorno reducido cuyo radio sea la mitad de dicha distancia. Al conjunto $E'\left(a, \frac{|x_i - a|}{2}\right)$ no pertenece ningún punto de C. Esto implica que a no es punto de acumulación de C. Como por hipótesis a es punto de acumulación de C, queda probado el teorema por contradicción.

Como ya se ha visto, el contrarrecíproco del teorema anterior permite deducir que si un conjunto tiene un número finito de elementos, entonces no tiene puntos de acumulación.

El teorema recíproco es falso, pues existen conjuntos que tienen infinitos elementos y no tienen puntos de acumulación, como el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números enteros.

Sin embargo, si un conjunto infinito está acotado, puede asegurarse la existencia de por lo menos un punto de acumulación. Esta importante propiedad se demuestra en el siguiente teorema.

◆ Teorema de Bolzano-Weierstrass

Si un conjunto infinito está acotado, entonces dicho conjunto tiene por lo menos un punto de acumulación.

Demostración

Sea M un conjunto de números reales infinito y acotado y [a;b] un intervalo cerrado que lo contiene.

Es decir,

$$M \subseteq [a;b].$$

Consideramos un conjunto auxiliar C, formado de la siguiente manera:

$$C = \{x \,/\, x = a \vee [a;x] \text{ tiene un número finito de elementos de M}\}.$$

C no es el conjunto vacío, pues $a \in C$. Es decir $C \neq \phi$.

Además, como consecuencia de la hipótesis, [a;b] tiene infinitos puntos de M, y entonces $b \notin C$.

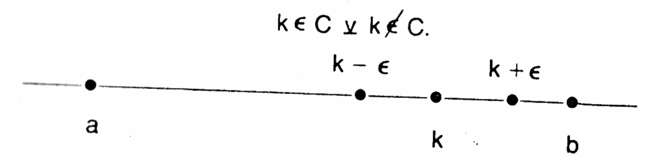
Por lo tanto, b es una cota superior del conjunto C, pues es mayor que cualquier elemento del conjunto C.

Si el conjunto C está acotado superiormente, entonces tiene supremo, por el axioma de continuidad de R. Sea k el supremo de C.

Luego, $a \leq k \leq b$.

Caben dos posibilidades:

$$k \in C \veebar k \notin C.$$



1) Si $k \in C$, es k = a o [a;k] contiene un subconjunto finito de M. Ahora bien, al ser k el supremo de C, si elegimos cualquier número positivo ε, resulta que el intervalo [k;k+ε] tiene infinitos puntos de M, pues de lo contrario [a;k+ε] tendría un número finito de elementos de M y el número k+ε pertenecería a C, lo cual implicaría que k no es el extremo superior.

Luego, si para cualquier $\epsilon > 0$ el intervalo [k;k+ε] tiene infinitos puntos de M, tiene por lo menos un punto $x \in M$ tal que $x \neq k$ y $x \neq k+\epsilon$.

Por lo tanto, a cualquier entorno reducido de centro k pertenece por lo menos un punto de M. Es decir, k es punto de acumulación de M.

2) Si $k \notin C$, entonces [a;k] tiene infinitos puntos de M. Para cualquier $\epsilon > 0$ que sea menor que k−a, el intervalo [a;k−ε] tiene un número finito de elementos de M. En efecto, si k es el supremo de C, entre k−ε y k hay algún punto $x \in C$ y, por lo tanto, [a;x] tiene un número finito de elementos de M. Luego, [a;k−ε] tiene la misma propiedad.

Ahora bien, si el subconjunto de M contenido en [a;k−ε] es finito y el contenido en [a;k] es infinito, el conjunto [k−ε;k] tiene infinitos puntos de M y, por lo tanto, $\forall \epsilon > 0$ en el intervalo [k−ε;k] hay algún punto $x \in M$ tal que $x \neq k-\epsilon$ y $x \neq k$. O sea, k es punto de acumulación de M.

Si el conjunto M tiene más de un punto de acumulación, el hallado por esta demostración se encuentra a la izquierda de los demás.

Conjunto cerrado

Un conjunto al cual le pertenecen todos sus puntos de acumulación se denomina cerrado. Es decir, un conjunto es cerrado si y sólo si le pertenecen todos sus puntos de acumulación.

$$C \text{ cerrado} \Leftrightarrow \forall a: (a \text{ punto de acumulación de } C \Rightarrow a \in C).$$

Ejemplos

El conjunto R de los números reales es cerrado, pues le pertenecen todos sus puntos de acumulación que son los números reales.

Un intervalo cerrado es, como su nombre lo indica, un conjunto cerrado.

Puede probarse fácilmente que cualquier conjunto que no tiene puntos de acumulación es un conjunto cerrado.

En efecto, sea C un conjunto cualquiera que no tiene ningún punto de acumulación.

De acuerdo con la definición, para que C sea un conjunto cerrado debe ser verdadera la siguiente implicación:

si a es un punto de acumulación de C, entonces a pertenece a C.

Pero el antecedente de esta implicación es falso, pues C no tiene ningún punto de acumulación.

Luego, la implicación es verdadera, pues cualquier implicación con antecedente falso es verdadera, de acuerdo con la tabla de verdad correspondiente (pág. 4).

Por lo tanto, el conjunto N y el conjunto Z, que no tienen puntos de acumulación, son conjuntos cerrados.

Cualquier conjunto finito es también un conjunto cerrado, pues según el contrarrecíproco del teorema visto en la página 31, no tiene puntos de acumulación.

Por la misma razón anterior, el conjunto vacío es un conjunto cerrado.

Obsérvese que, de acuerdo con la definición, un conjunto es cerrado si y sólo si incluye a su conjunto derivado.

En efecto, C es un conjunto cerrado si y sólo si

$$\forall a: (a \text{ punto de acumulación de } C \Rightarrow a \in C) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall a: (a \in C' \Rightarrow a \in C) \Leftrightarrow (C' \subseteq C)$$

Negación

Un conjunto no es cerrado si y sólo si tiene un punto de acumulación que no le pertenece.

C no es cerrado $\Leftrightarrow \exists a / (a$ punto de acumulación de $C \wedge a \notin C)$

Ejemplos

El conjunto Q de los números racionales no es cerrado, pues sus puntos de acumulación son los números reales y, de éstos, los irracionales no pertenecen a Q.

Es decir, Q no es cerrado, pues, por ejemplo $\sqrt{2}$ es punto de acumulación de Q y $\sqrt{2} \notin Q$.

El intervalo semiabierto (a;b] no es cerrado, pues a es punto de acumulación de (a;b] y $a \notin$ (a;b).

Teorema

La intersección de dos conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

Demostración

Sean A y B dos conjuntos cerrados. Para probar que su intersección es un conjunto cerrado debe probarse que si a es un punto de acumulación de $A \cap B$, entonces $a \in A \cap B$.

Si a es punto de acumulación de $A \cap B$, por definición, en todo entorno reducido de a hay un punto x que pertenece al conjunto $A \cap B$. O sea, en todo entorno reducido del punto a hay un punto x que pertenece simultáneamente al conjunto A y al conjunto B. Por lo tanto, el punto a es punto de acumulación de A y también es punto de acumulación de B.

Como A y B son conjuntos cerrados, todos sus puntos de acumulación les pertenecen. Es decir, $a \in A$ y también $a \in B$, lo cual implica que $a \in A \cap B$.

En forma similar, puede probarse que la unión de dos conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

◆ **Teorema**

El conjunto derivado de un conjunto A es un conjunto cerrado.

Demostración

Probar que A′ es un conjunto cerrado es probar que le pertenecen todos sus puntos de acumulación.

Es decir, hay que probar: a punto de acumulación de $A' \Rightarrow a \in A'$.

Pero probar que $a \in A'$ equivale a probar que es punto de acumulación de A.

Por lo tanto, el teorema consiste en probar que cualquier punto de acumulación de A′ también es punto de acumulación de A.

Si a es punto de acumulación de A′, a todo entorno reducido del punto a, de radio $\epsilon > 0$, pertenece un punto x de A′.

$a - \epsilon$ a $x - \delta$ c   x $x + \delta$ $a + \epsilon$

Como $x \in A'$, x es punto de acumulación de A, y en todo entorno reducido del punto x hay un punto $c \in A$.

Podemos elegir siempre un entorno reducido de centro x, con un radio $\delta > 0$, tal que $E'(x,\delta) \subseteq E'(a,\epsilon)$.

Luego, el punto $c \in E'(a,\epsilon)$.

Y, por lo tanto, en cualquier entorno reducido del punto a se puede encontrar un punto c que pertenece al conjunto A.

Es decir, a también es punto de acumulación de A, y el teorema queda probado.

◆ **Conjunto compacto**

Un conjunto es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

Ejemplos

Un intervalo cerrado es un conjunto compacto.

R no es compacto pues no está acotado. N no es compacto por la misma razón.

El conjunto {a.b} es compacto, al igual que cualquier conjunto finito.

◆ **Conjunto denso en sí**

Un conjunto es denso en sí si y sólo si todos sus puntos son de acumulación.

Es decir,

$$C \text{ denso en sí} \Leftrightarrow \forall a: (a \in C \Rightarrow a \text{ punto de acumulación de } C) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall a: (a \in C \Rightarrow a \in C').$$

Por lo tanto, un conjunto es denso en sí si y sólo si está incluido en su conjunto derivado:

$$C \text{ denso en sí} \Leftrightarrow C \subseteq C'.$$

Ejemplos

El conjunto R de los números reales es denso en sí, pues todos sus puntos son de acumulación.

El conjunto Q de los números racionales también es denso en sí, pues todos sus puntos son de acumulación.

N y Z no lo son, pues ninguno de sus puntos es de acumulación.

Nota: Al comienzo el lector debe poner especial atención para diferenciar las definiciones de conjunto cerrado y conjunto denso en sí.

◆ Conjunto perfecto

Un conjunto es perfecto si y sólo si es cerrado y denso en sí.

Es decir, un conjunto es perfecto si es igual a su conjunto derivado.

En efecto, si C es cerrado, entonces su derivado está incluido en él, y si C es denso en sí, entonces su derivado lo incluye. Por lo tanto, $C' \subseteq C \wedge C \subseteq C'$.

Luego, $C = C'$.

Ejemplos

R es un conjunto perfecto, pues $\mathbf{R}' = \mathbf{R}$.

Un intervalo cerrado es un conjunto perfecto, pues $[a;b]' = [a;b]$.

Q no es perfecto, pues es denso en sí pero no es cerrado.

Z y N no son perfectos, pues son cerrados pero no son densos en sí.

EJERCICIOS

1) Dar el conjunto derivado de cada uno de los siguientes conjuntos:

$A = (-2;5)$

$B = (1;7]$

$C = [0;4]$

$D = \{x / x \in Z \wedge |x-2| < 5\}$

$E = \{x / x \in Q \wedge |x-2| < 5\}$

$F = \{x / x \in \mathbf{R} \wedge |x-2| < 5\}$

$G = \{x / x \in \mathbf{R} \wedge |x-1| \leq 3\}$

$H = \{3,4,5\}$

$L = \left\{x / x = \frac{1}{n} \wedge n \in N\right\}$

$M = \{x / x \in \mathbf{R} \wedge 0 < |x-3| < 2\}$

$N = \{x / x \in Q \wedge |x| > 1\}$

$P = \left\{x / x = \frac{3n+5}{4n-1} \wedge n \in N\right\}$

$S = \left\{x / x = \frac{4n^2+1}{2n-1} \wedge n \in N\right\}$

2) Indicar cuáles de los conjuntos anteriores son cerrados.

3) Dar el conjunto derivado de cada uno de los siguientes conjuntos:

$A = \{x / x \in Q \wedge (|x-1| < 3 \vee x = -3)\}$

$B = \left\{x / x = \frac{1}{2n} \wedge n \in N\right\}$

$C = \{x / x \in Q \wedge (|x-2| < 1 \vee x = 0)\}$

$D = \left\{x / x = \frac{1}{3n} \wedge n \in N\right\}$

$E = \left\{x / x = \frac{2n}{2n+1} \wedge n \in N\right\}$

$F = \left\{x / x = \frac{5n-1}{10n+1} \wedge n \in N\right\}$

$G = \left\{x / x = \frac{3n+1}{n^2+2} \wedge n \in N\right\}$

$H = \left\{x / x = (-1)^n \frac{2n+3}{n} \wedge n \in N\right\}$

4) Indicar cuáles de los conjuntos anteriores son cerrados.

5) Clasificar los conjuntos del ejercicio 1 y del ejercicio 3 en conjuntos compactos, densos en sí y perfectos.

6) Demostrar que la unión de dos conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

7) Demostrar que la intersección de un número finito de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado. Idem para la unión.

8) Probar que si $A \subseteq B$, entonces $A' \subseteq B'$.

III. Punto interior

Un punto a, perteneciente a un conjunto C, es punto interior al mismo si y sólo si existe un entorno de a totalmente incluido en C.

Es decir,

$$a \text{ punto interior a } C \iff a \in C \wedge \exists E(a) / E(a) \subseteq C.$$

Al conjunto de puntos interiores al conjunto C lo designamos C_i.

Ejemplos

1) Cualquier número real es interior al conjunto **R** de los números reales. O sea, $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}$.

2) Un número racional no es interior al conjunto Q de los números racionales, pues en todo entorno de un número racional hay números irracionales que no pertenecen a Q. Luego, $Q_i = \phi$.

3) Todos los puntos de un intervalo abierto son interiores a él.

4) El conjunto $C = \left\{x / x = \frac{3}{n} \wedge n \in N\right\}$ no tiene puntos interiores. O sea, $C_i = \phi$.

Conjunto abierto

Un conjunto A es abierto si y sólo si todos sus puntos son interiores.

De acuerdo con los ejemplos anteriores, **R** es un conjunto abierto y Q no es un conjunto abierto.

El intervalo abierto (a,b) es abierto.

El intervalo semiabierto (a,b] no es abierto, pues b pertenece al conjunto y no es un punto interior al mismo.

El conjunto C no es abierto, pues, por ejemplo, $3 \in C$ y 3 no es interior a C.

Obsérvese que el conjunto **R** de los números reales es un conjunto abierto y cerrado. Lo mismo sucede con el conjunto vacío ϕ.

En cambio, el intervalo (a,b] no es ni abierto ni cerrado.

Teorema

La unión de dos conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

Demostración

Sean A y B conjuntos abiertos. Debe probarse que cualquier punto que pertenece al conjunto $A \cup B$ es interior al mismo.
Es decir, debe probarse que $\forall x$: $(x \in A \cup B \Rightarrow x$ interior a $A \cup B)$.
Si $x \in A \cup B$, entonces $x \in A \vee x \in B$.
Supongamos $x \in A$. Como A es abierto, x es interior al conjunto A.
Luego, existe un entorno de x incluido en A. O sea,

$$\exists E(x) \,/\, E(x) \subseteq A.$$

Pero, por consecuencia de la definición de unión: $A \subseteq A \cup B$.
Luego, por transitividad de la inclusión:

$$E(x) \subseteq A \wedge A \subseteq A \cup B \Rightarrow E(x) \subseteq A \cup B$$

y el teorema queda probado.
Si $x \in B$ se razona análogamente.

◆ **Teorema**

Si un conjunto es abierto, su complemento es cerrado.

Demostración

Sea A un conjunto abierto y B su complemento, de acuerdo con la definición dada en la página 9. Es decir, B está formado por todos los puntos del universal que no pertenecen a A.
Si consideramos un punto cualquiera a del conjunto A, como A es abierto, todos sus puntos son interiores. Por ello, existe un entorno del punto a totalmente incluido en el conjunto A. A dicho entorno, entonces, no pertenece ningún punto de B, y por lo tanto a no es punto de acumulación de B.
Luego, todos los puntos que no pertenecen a B no son puntos de acumulación de B.
Es decir, $a \notin B \Rightarrow$ a no es punto de acumulación de B, o su contrarrecíproco, a punto de acumulación de $B \Rightarrow a \in B$, y esto significa que B es un conjunto cerrado.
Es bastante común tomar la propiedad anterior y su recíproca como definición de conjunto abierto una vez definido conjunto cerrado. Es decir, un conjunto es abierto si y sólo si su complemento es cerrado.
Aplicando el teorema anterior, se observa que el conjunto R de los números reales y su complemento, el conjunto vacío, son ambos abiertos y cerrados.

EJERCICIOS

1) Dar el conjunto de los puntos interiores de cada conjunto del ejercicio 1 y del ejercicio 3 de la página 36.
2) Decir cuáles de los conjuntos anteriores son abiertos.
3) Demostrar que si un conjunto es cerrado, entonces su complemento es abierto.
4) Demostrar que la intersección de dos conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

5) Para cada uno de los conjuntos siguientes, a) dar el conjunto derivado y el conjunto de puntos interiores; b) justificar si los conjuntos iniciales son abiertos o cerrados:

$A = \{x \,/\, 0 < |x+2| < 1 \vee x = 0\}$ $\qquad$ $B = \{x \,/\, |x-2| \geq 3 \wedge 0 \leq x < 6\}$

$C = \{x \,/\, |x+1| > 2 \vee x = 1\}$ $\qquad$ $D = \{x \,/\, 0 < |x+3| \leq 1 \vee x = -1\}$

$E = \left\{x \,/\, x = \dfrac{2-5n}{n} \wedge n \in N\right\}$ $\qquad$ $F = \left\{x \,/\, x = \dfrac{3-4n^2}{2n^2} \wedge n \in N\right\}$

IV. Puntos aislados, adherentes, exteriores y fronteras

◆ **Punto aislado**

Un punto a que pertenece a un conjunto C es un punto aislado si y sólo si existe un entorno reducido de a al cual no pertenece ningún punto del conjunto C.
Es decir, a aislado en $C \Leftrightarrow a \in C \wedge \exists E'(a) \,/\, E'(a) \cap C = \phi$.

Ejemplos

Cada número natural es un punto aislado en el conjunto N.
Lo mismo sucede con cada número entero en el conjunto Z.
En el conjunto $C = \{x \,/\, x > 2 \vee x = 0\}$, 0 es un punto aislado.

◆ **Punto adherente**

Si en la definición de punto de acumulación se sustituye la frase entorno reducido por entorno, se obtiene la definición de punto adherente a un conjunto.
Por lo tanto, a es punto adherente al conjunto C si y sólo si a cualquier entorno de a pertenece por lo menos un punto de C.
O sea, a punto adherente a $C \Leftrightarrow \forall E(a)$: $\exists x \,/\, (x \in C \wedge x \in E(a))$.
Obsérvese que si un punto pertenece al conjunto, aunque esté aislado, es punto adherente, pues la definición sólo exige que en todo entorno haya un punto del conjunto que puede ser el centro del mismo.

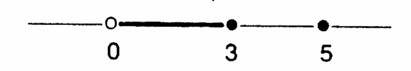
Adherencia

El conjunto formado por todos los puntos adherentes a un conjunto A se llama adherencia del mismo y se designa A_a.
De acuerdo con la definición de punto adherente, puede probarse que:

$$A_a = A \cup A'.$$

Ejemplos

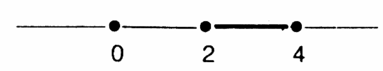
1) Sea $A = \{x \,/\, 0 < x \leq 3 \vee x = 5\}$.



Todos los puntos del intervalo cerrado [0,3] son puntos adherentes y también lo es el punto aislado 5.

Luego, $A_a = \{x / 0 \leq x \leq 3 \vee x = 5\} = A \cup \{0\}$.

2) Sea $A = \{x / 2 \leq x \leq 4 \vee x = 0\}$



En este caso $A_a = A$. Obsérvese que el conjunto A es un conjunto cerrado pues todos sus puntos de acumulación le pertenecen.

Puede demostrarse que A es cerrado si y sólo si es igual a su adherencia.

◆ Punto exterior

Un punto a es exterior a un conjunto C si y sólo si existe un entorno del mismo al cual no pertenece ningún punto del conjunto C.

Es decir, a exterior a $C \Leftrightarrow \exists E(a) / E(a) \cap C = \phi$.

Obsérvese que en este caso el punto no pertenece al conjunto.

Ejemplos

El punto 3 es exterior al conjunto de los números negativos.

El origen es exterior al intervalo (5;8).

◆ Punto frontera

Un punto es frontera cuando no es exterior ni interior al conjunto considerado.

Es decir, el punto a es punto frontera del conjunto A si y sólo si en todo entorno del punto a hay algún punto que pertenece al conjunto A y hay algún punto que pertenece a su complemento.

O sea:

$$a \text{ punto frontera de } A \Leftrightarrow \forall E(a): \left(E(a) \cap A \neq \phi \wedge E(a) \cap \bar{A} \neq \phi\right).$$

De la definición resulta que un punto frontera puede o no pertenecer al conjunto.

Ejemplos

Un punto aislado es punto frontera.

El 0 es frontera para el conjunto de los números positivos y también para el conjunto de los números negativos.

En el conjunto $A = \{x / 4 < x \leq 6 \vee x = 7\}$, 4, 6 y 7 son puntos frontera; 4 no pertenece al conjunto, pero 6 y 7 pertenecen al conjunto A.

EJERCICIOS

1) Considerar los conjuntos del ejercicio 1 y del ejercicio 3 de la página 36 y buscar puntos adherentes, aislados, exteriores y frontera.
2) Sea $B = \left\{x / \left(x = \dfrac{2n-7}{n+3} \wedge n \in N\right) \vee x = 6\right\}$. Hallar puntos frontera y puntos exteriores.
3) Probar que un conjunto es cerrado si y sólo si es igual a su adherencia.
4) Probar que la adherencia de un conjunto es un conjunto cerrado.
5) Completar el cuadro siguiente:

Conjunto	*Cerrado*	*No cerrado*	*Abierto*	*No abierto*	*Compacto*	*Denso en sí*	*Perfecto*
(0;1)							
(0;1]							
[0;1)							
[0;1]							
{0,1}							
Z							
Q							
R							
ϕ							

6) Dar, en cada caso, un conjunto que cumpla las siguientes condiciones:
   a) acotado, sin mínimo y abierto;
   b) acotado superiormente sin supremo;
   c) cerrado con punto de acumulación único;
   d) no abierto con punto de acumulación único;
   e) no abierto con dos puntos de acumulación.
7) Siendo $A = E'(1,3)$ y $B = \left\{x / x = \dfrac{1-2n}{n+1} \wedge n \in N\right\}$, hallar a) $A \cup B'$; b) $B_i \cup A'$ y c) supremo de $A \cap B$.

◆ V. Propiedad de Borel*

Una propiedad muy importante se cumple también en R como consecuencia del axioma de continuidad. Es la propiedad del cubrimiento finito o propiedad de Borel.

Cubrimiento abierto de un conjunto

Una familia F de conjuntos es un cubrimiento por intervalos abiertos del conjunto A si y sólo si se cumplen las dos condiciones siguientes:

1) Cada conjunto I_k de la familia F es un intervalo abierto.
2) Todos los puntos del conjunto A pertenecen —por lo menos— a uno de los elementos de F.

Es decir,

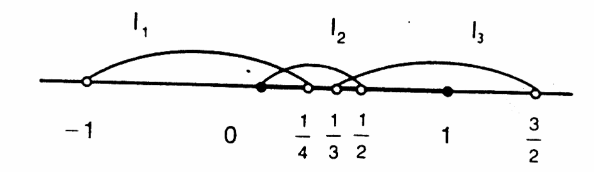
$$\forall x \in A \ \exists I_k \in F / x \in I_k$$

* Félix Borel (1871-1956), matemático y político francés, profesor de la Facultad de Ciencias de París y director científico de la Escuela Normal Superior.

Si se cumple el punto 2, diremos que F es un cubrimiento de A, o que F cubre a A.

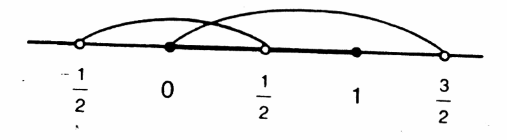
Ejemplo 1

Consideremos el intervalo cerrado A = [0;1].

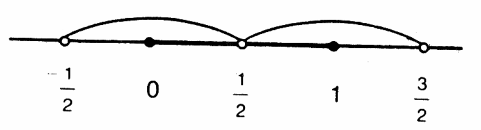


La familia $F = \left\{\left(-1;\frac{1}{4}\right), \left(0;\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3};\frac{3}{2}\right)\right\}$ es un cubrimiento por intervalos abiertos de A.

Además, como F está formada por tres conjuntos, F es un cubrimiento finito de A.



La familia $J = \left\{\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right), \left(0;\frac{3}{2}\right)\right\}$ es otro cubrimiento por intervalos abiertos y finito de A.



En cambio, la familia $H = \left\{\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)\right\}$ no es un cubrimiento de A, pues el punto $\frac{1}{2}$ no pertenece a ningún intervalo de H.

Ejemplo 2

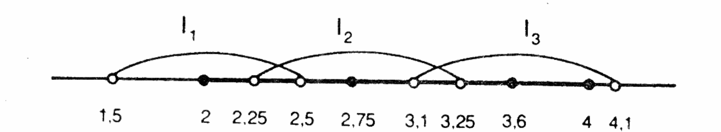
Consideremos el intervalo cerrado C = [2;4].

Para cualquier elemento $x \in C$ determinamos el intervalo abierto $\left(x - \frac{1}{2};\ x + \frac{1}{2}\right)$.

La familia formada por los infinitos intervalos anteriores es un cubrimiento por intervalos abiertos de C.

Es decir, $F = \left\{I \mid I = \left(x - \frac{1}{2};x + \frac{1}{2}\right) \wedge x \in C\right\}$ es un cubrimiento infinito de C.

Trataremos de hallar un subconjunto finito de F que también cubra a C.



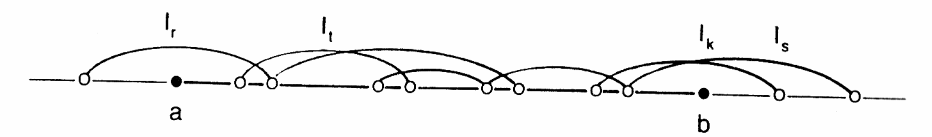
Sea $F_1 = \left\{\left(2 - \frac{1}{2};2+\frac{1}{2}\right), \left(2{,}75 - \frac{1}{2};2{,}75+\frac{1}{2}\right), \left(3{,}6 - \frac{1}{2};3{,}6+\frac{1}{2}\right)\right\}$.

La familia F_1 es un cubrimiento por intervalos abiertos de C y además $F_1 \subseteq F$. Es decir, se ha podido hallar un subconjunto finito de F que también cubre al conjunto C.

Esto siempre es posible si el conjunto C que se considera es un intervalo cerrado. La propiedad se conoce con el nombre de teorema de Borel y es válida también, en general, para conjuntos compactos.

Teorema de Borel

Si [a;b] es un intervalo cerrado y F es un cubrimiento por intervalos abiertos del mismo, entonces existe un subconjunto finito de F que también cubre al intervalo [a;b].



Consideremos un conjunto auxiliar C, formado de la siguiente manera:

$C = \{x \mid x \in [a;b] \wedge [a;x]$ está cubierto por una parte finita de $F\}$.

Admitiremos intervalos cerrados de la forma $[a;a] = \{a\}$, reducidos a un único punto.

Probaremos que C no es vacío y está acotado superiormente.

En primer lugar, como $a \in [a;b]$, existe un elemento de F, el intervalo abierto I_r, al cual pertenece el punto a. El conjunto $\{I_r\}$ tiene un solo elemento y por lo tanto es una parte *finita* de F.

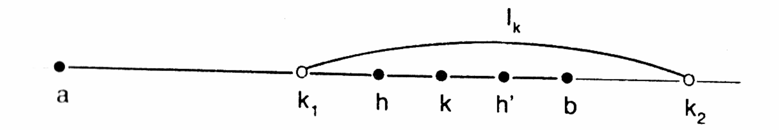
Esta parte finita cubre al intervalo [a;a], y como $a \in [a;a]$, se deduce —por definición de C— que $a \in C$. Luego, C no es vacío.

Además, por la forma en que se ha elegido el conjunto C, b es una cota superior del mismo. Luego, C tiene supremo.

Sea k = supremo C. Es $a \le k \le b$.

Si probamos que k = b y además que k p pertenece al conjunto C, el teorema queda demostrado.

Suponemos k < b. Como $k \in [a;b]$, existe un intervalo abierto I_k de F al cual pertenece k. Sean k_1 y k_2 los extremos de I_k. Por ser k el supremo de C y por ser $k_1 < k$, existe h tal que $k_1 < h \le k$ y $h \in C$.



Como $h \in C$, sabemos que un subconjunto finito de F cubre al intervalo $[a;h]$. Sea F_i dicho cubrimiento finito.

Como $k < k_2$, existe h' tal que $h' \in [a;b]$ y $k < h' < k_2$.

Se ve entonces que el intervalo $[a;h']$ es cubierto por $F_i \cup \{I_k\}$, y resulta $h' \in C$. Esto es absurdo, pues h' es mayor que el supremo k.

Por lo tanto, $k = b$.

Ahora bien, como el supremo de un conjunto puede o no pertenecer a él, faltaría probar que $b \in C$. El razonamiento expuesto para probar que $h' \in C$ puede aplicarse a k, y se obtiene $k \in C$.

Como ya hemos visto que $k = b$, se obtiene $b \in C$, lo cual prueba el teorema.

La tesis puede no verificarse si el intervalo considerado no es cerrado.

Por ejemplo, sea $A = (0;2)$.

La familia $F = \left\{ I \,/\, I = \left(\frac{x}{2};2\right) \wedge x \in A \right\}$ es un cubrimiento por intervalos abiertos de A.

Sin embargo, no es posible hallar un subconjunto finito de F que cubra al conjunto A.

Nota: El teorema de Borel, así como el de Bolzano-Weierstrass, y otros teoremas posteriores, como el de Weierstrass y el del valor intermedio para funciones continuas, admiten demostraciones bastante más simples si se considera una propiedad equivalente al axioma de continuidad de $\mathbb{R}$: *el teorema de los intervalos encajados,* que se demostrará en el capítulo 9.

La razón por la cual prefiero no anticipar dicha propiedad es que, a pesar de su fácil comprensión, lleva implícita la idea de límite de sucesiones, que se estudiará posteriormente.

RESPUESTAS A EJERCICIOS

CAPITULO 2

Sección I

1) $A = [2;4]$ $B = (-1;3]$ $C = [-7;-2)$ $D = (-1;3) = E(1,2)$
$F = E'(-1,2)$ $G = E(-2,1)$ $H = (-3;7) = E(2,5)$ $L = [-5;1]$
$M = E'(3,1)$ $N = E'(-4,2)$

2) a) $[2;3]$ b) $[1;3)$ c) $\{-4\} \cup [-2;1]$

3) $A \subseteq E(0,5)$ $B \subseteq E(0,11)$ $C \subseteq E(0,7)$ $D \subseteq E(0,5)$
$E \subseteq E(0,2)$ $F \subseteq E(0,3)$

4) $A \subseteq E(0,4)$ $B \subseteq E(0,9)$
C no está incluido en ningún entorno con radio mínimo
$D \subseteq E(0,5)$ E ídem que C $F \subseteq E(0,5)$

5) $A \subseteq E(2,5)$
No existe entorno con radio mínimo que incluya a B ni a C.
$D \subseteq E(0,1)$

6) $A = (0;3) = E\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ $B = \left(-\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right) = E\left(1,\frac{4}{3}\right)$
$C = \left(-3;-\frac{7}{3}\right]$ $D = (0;1) = E\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$
$E = (-1;1) = E(0,1)$

Sección II

1) $A' = [-2;5]$ $B' = [1;7]$ $C' = C$ $D' = \phi$ $E' = [-3;7]$
$F' = [-3;7]$ $G' = [-2;4]$ $H' = \phi$ $L' = \{0\}$ $M' = [1;5]$
$N' = \{x \,/\, x \in \mathbb{R} \wedge |x| \geq 1\}$ $P' = \left\{\frac{3}{4}\right\}$ $S' = \phi$

2) C, D, G, H y S son conjuntos cerrados.

3) $A' = [-2;4]$ $B' = \{0\}$ $C' = [1;3]$ $D' = \{0\}$
$E' = \{1\}$ $F' = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ $G' = \{0\}$ $H' = \{2,-2\}$

4) Ninguno es cerrado.

Sección III

1) $A_i = (-2;5)$ $B_i = (1;7)$ $C_i = (0;4)$ $D_i = \phi$
$E_i = \phi$ $F_i = (-3;7)$ $G_i = (-2;4)$ $H_i = \phi$
$L_i = \phi$ $M_i = M$ $N_i = \phi$ $P_i = \phi$
$S_i = \phi$

Para cada uno de los conjuntos del ejercicio 3, su interior es el conjunto vacío.

2) A, F y M del primer grupo son abiertos. En el segundo grupo ninguno es abierto.

5) a) $A' = [-3;-1]$ $A_i = E'(-2,1)$
$B' = [5;6]$ $B_i = (5;6)$
$C' = \{x \,/\, |x+1| \geq 2\}$ $C_i = \{x \,/\, |x+1| > 2\}$
$D' = [-4;-2]$ $D_i = E'(-3,1)$
$E' = \{-5\}$ $E_i = \phi$
$F' = \{-2\}$ $F_i = \phi$

b) A no es cerrado pues $-1 \in A' \wedge -1 \notin A$
A no es abierto pues $0 \in A \wedge 0 \notin A_i$
B no es cerrado pues $6 \in B' \wedge 6 \notin B$
B no es abierto pues $5 \in B \wedge 5 \notin B_i$

C no es cerrado pues $-3 \in C'$ $\wedge$ $-3 \notin C$
C no es abierto pues $1 \in C$ $\wedge$ $1 \notin C_i$
D no es cerrado pues $-3 \in D'$ $\wedge$ $-3 \notin D$
D no es abierto pues $-2 \in D$ $\wedge$ $-2 \notin D_i$
E no es cerrado pues $-5 \in E'$ $\wedge$ $-5 \notin E$
E no es abierto pues $-3 \in E$ $\wedge$ $-3 \notin E_i$
F no es cerrado pues $-2 \in F'$ $\wedge$ $-2 \notin F$
F no es abierto pues $-\frac{13}{8} \in F$ $\wedge$ $-\frac{13}{8} \notin F_i$

Sección IV

1) $A_a = [-2;5]$ $B_a = [1;7]$ $C_a = C$ $D_a = D$ $E_a = [-3;7]$
$F_a = [-3;7]$ $G_a = G$ $H_a = H$ $L_a = L \cup \{0\}$ $M_a = [1;5]$
$N_a = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge |x| \geq 1\}$ $P_a = P \cup \left\{\frac{3}{4}\right\}$ $S_a = S$

2) $B_f = B \cup \{2\}$ $B_e = \mathbb{R} - B_f$

5)

Conjunto	Cerrado	Abierto	Compacto	Denso en sí	Perfecto
(0;1)	no	sí	no	sí	no
(0;1]	no	no	no	sí	no
[0;1)	no	no	no	sí	no
[0;1]	sí	no	sí	sí	sí
{0,1}	sí	no	sí	no	no
Z	sí	no	no	no	no
Q	no	no	no	sí	no
R	sí	sí	no	sí	sí
ϕ	sí	sí	sí	sí	sí

6) Ejemplos: a) (4;7) b) ϕ

c y d) $\left\{x / \left(x = \frac{1}{n} \wedge n \in N\right) \vee x = 0\right\}$

e) $\left\{x / x = (-1)^n \frac{n+1}{n} \wedge n \in N\right\}$

7) a) $[-2;1) \cup (1;4)$ b) $[-2;4]$ c) $-\frac{1}{2}$

3. FUNCIONES ESCALARES

I. Relaciones funcionales

En matemática, en física y en otras ramas de la ciencia o de la vida humana se presentan relaciones binarias entre distintos conjuntos que tienen singular importancia. De estas relaciones interesan especialmente aquellas que hacen corresponder a cada elemento del primer conjunto un *único* elemento del segundo conjunto. Este tipo de relaciones recibe el nombre particular de relación funcional o función. Como sinónimos de función se utilizan, en general, los términos aplicación, transformación y correspondencia.

Por lo tanto, la idea fundamental en el concepto de función es que cada elemento del dominio tiene una y sólo una imagen en el recorrido, aunque un elemento del recorrido puede ser imagen de más de un elemento del dominio.

Si la aplicación se establece a partir de un conjunto finito, entonces se puede dar la función indicando, por extensión, el conjunto de pares ordenados correspondientes.

Por ejemplo, si

$$A = \{1,2,3\} \text{ y } f = \{(1;\sqrt{2}),(2;4),(3;4)\},$$

entonces f es una aplicación o función de A en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

El conjunto A es el dominio de la función. El recorrido o conjunto de imágenes de la función f es el conjunto $\{\sqrt{2},4\}$, que es un subconjunto de $\mathbb{R}$.

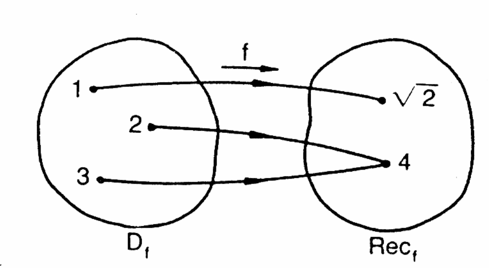
También puede indicarse la función f anotando la imagen de cada elemento del dominio a través de la función.

O sea,

$$f / f(1) = \sqrt{2} \wedge f(2) = 4 \wedge f(3) = 4.$$

En un esquema:

$$f: A \to \mathbb{R}$$



En este caso, la relación r, inversa de la relación funcional f, no es una función, pues al elemento 4 de su dominio le corresponden dos imágenes en el recorrido.

O sea, $r = \{(\sqrt{2};1),(4;2),(4;3)\}$ no es una función.

Es decir, la relación inversa de una función no es siempre una función.

Si el dominio es un conjunto infinito, entonces la función debe indicarse mediante una regla o conjunto de reglas que permitan obtener la imagen de cada elemento del primer conjunto.

Por ejemplo, si se toma como dominio el conjunto de los números enteros, la relación que a cada número entero le hace corresponder el número doble es una aplicación del conjunto Z de los números enteros en sí mismo.

Puede indicársela así:

$$f\colon Z \rightarrow Z \,/\, \forall x \in Z\colon f(x) = 2x.$$

x es la variable independiente o argumento; f(x) es la imagen de x o el valor de la función en x.

En el comienzo de un curso de análisis elemental interesan especialmente aquellas funciones cuyo dominio y recorrido son conjuntos de números reales. Se llaman <u>*funciones reales de una variable real o funciones escalares.*</u>

Si $$f\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \,/\, \forall x \in \mathbb{R}\colon f(x) = 3x-5,$$

entonces f es una función real de variable real x cuyo dominio es el conjunto de los números reales y cuyo recorrido es el mismo.

La función anterior puede darse también indicando solamente la regla que permite obtener las imágenes, quedando sobreentendido que su dominio es $\mathbb{R}$.

$$f\colon x \rightarrow 3x-5$$

Si el dominio es solamente un subconjunto de $\mathbb{R}$, debe indicárselo especialmente. De lo contrario, se considera como dominio el conjunto de todos los valores reales de x para los cuales la imagen de x es también un número real.

Por ejemplo, si $g\colon x \rightarrow \frac{1}{x}$, se sobreentiende en este caso que el dominio es el conjunto de los números reales del cual se ha excluido el cero. Es decir, la función g no está definida en el punto cero, o sea, no existe g(0).

Si se desea dar una función con la misma regla anterior cuyo dominio sea el conjunto $\mathbb{R}$, la imagen de 0 debe considerarse especialmente.

Por ejemplo,

$$h\colon x \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 5 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Por supuesto, h es una función distinta de g y la imagen de 0 es totalmente arbitraria.

De la misma forma, en funciones escalares se sobreentiende, por ejemplo, que el dominio de

$$s\colon x \rightarrow \sqrt{x}$$

es el conjunto de los números reales no negativos, y el de

$$t\colon x \rightarrow \ln x \qquad (\ln x = \log_e x)$$

es el conjunto de los números reales positivos.

Nota: El símbolo $\sqrt{x}$ indica exclusivamente la raíz cuadrada no negativa del número x.

Precisaremos los conceptos anteriores dando la siguiente <u>*definición de función:*</u>

Una relación f entre elementos de un conjunto A y elementos de un conjunto B es una función de A en B si y sólo si se cumplen las dos condiciones siguientes:

1) $\forall x \in A \; \exists y \in B \,/\, (x;y) \in f;$

2) $(x;y) \in f \wedge (x;z) \in f \Rightarrow y = z$

Dominio de f: $D_f = A$.

Recorrido de f: $Rec_f = \{y \,/\, y \in B \wedge \exists x \in A \,/\, (x;y) \in f\}$.

Ejemplos

Siendo $A = \{a,b,c\}$ y $B = \{y,z\}$

1) Si $f = \{(a;y), (b;y), (c;y)\}$, entonces f es una función de A en B, pues se verifican las dos condiciones de la definición.

2) Si $g = \{(a;y), (b;z)\}$, entonces g no es función de A en B, pues el elemento c del conjunto A no tiene imagen en B, es decir, no se verifica la primera condición de la definición. En este caso se puede obtener una función considerando como dominio el conjunto $A_1 = \{a,b\}$, el cual verifica: $A_1 \subseteq A$.

3) Si $h = \{(a;y), (a;z), (b;y), (c;z)\}$, entonces h no es función, pues no se cumple la segunda condición, ya que el elemento a del conjunto A tiene dos imágenes en B.

Es decir, se tiene $[(a;y) \in h \wedge (a;z) \in h \wedge y \neq z]$, que es la negación de la implicación considerada en la segunda parte de la definición de función.

EJERCICIOS

1) Siendo $A = \{a,b,c,d,m\}$ y $B = \{0,1,2,3\}$, indicar cuáles de las siguientes relaciones son funciones. En aquellas que no lo son, ver qué parte de la definición de función no se verifica.

$f = \{(a;0), (b;0), (c;1), (d;2), (m;3)\}$

$g = \{(a;0), (b;1), (c;2), (d;3), (m;3), (c;0)\}$

$h = \{(a;1), (b;2)\}$

2) Siendo $f\colon x \rightarrow x^2-3x+5$, hallar $f(0)$, $f(3)$, $f(-3)$, $f(2x)$ y $f(x-1)$.

Siendo $g\colon x \rightarrow x^3-x$, hallar $g(0)$, $g(a)$, $g(a+h)$, $g(x+h)$ y $g(-5)$.

Siendo $h\colon x \rightarrow \ln x = \log_e x$, hallar $h(e)$, $h(1)$, $h(\operatorname{sen} x)$ y $h(e^x)$.

3) Indicar dominio y recorrido adecuados a funciones escalares tales que:

$f\colon x \rightarrow \sqrt{x-2}$ $\quad g\colon x \rightarrow \sqrt{x^2}$ $\quad (\sqrt{x^2} = |x|)$

$h\colon x \rightarrow \sqrt{x^2-3}$ $\quad s\colon x \rightarrow \operatorname{tg} x$ $\quad r\colon x \rightarrow \sec x$

t: $x \rightarrow \ln(3-x)$ m: $x \rightarrow \ln|x|$ n: $x \rightarrow \ln(x-1)$

q: $x \rightarrow \ln|x-1|$ p: $x \rightarrow \dfrac{1}{x+4}$ u: $x \rightarrow -\dfrac{1}{x^2}$

4) Elegir dominio adecuado para cada una de las siguientes funciones escalares:

f: $x \rightarrow \sqrt{x^2-3x+2}$ g: $x \rightarrow \dfrac{2x^3}{\ln|x+2|}$ h: $x \rightarrow \dfrac{\sqrt{|x|-2}}{\ln(x-2)}$

II. Representación gráfica

Las funciones escalares pueden representarse gráficamente en un plano donde se ha introducido un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales. El dominio se considera sobre el eje de abscisas y el recorrido sobre el eje de ordenadas.

La representación gráfica de una función f está dada por los puntos (x;y) del plano, para los cuales es $y = f(x)$.

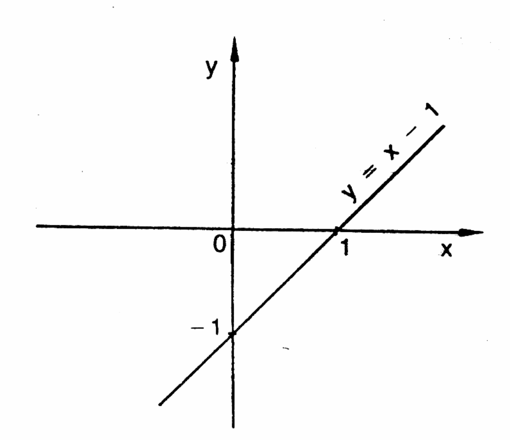
Suele usarse el nombre de grafo o gráfico para designar el conjunto de pares que pertenecen a la función. Es decir, los términos función, gráfico o grafo funcional son, en general, sinónimos.

Nosotros utilizaremos, por razones de comodidad, la palabra *"gráfico"* para referirnos exclusivamente a la representación gráfica de una función.

En estas etapas elementales, la representación gráfica, con sus consideraciones geométricas, sirve para aclarar notablemente los conceptos abstractos.

Ejemplos

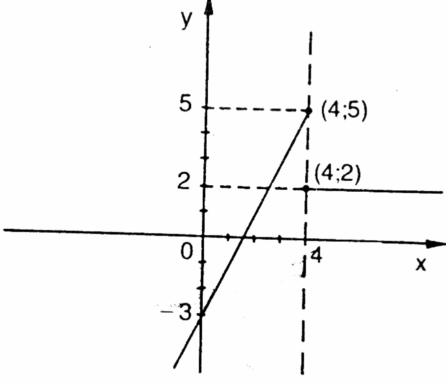
1) Sea la función f: $x \rightarrow x-1$.
Su gráfico es el conjunto de puntos (x;y) del plano, para los cuales es $y = x - 1$.



Obsérvese que la definición de función asegura que cualquier recta vertical corta el gráfico <u>*a lo sumo*</u> en un punto.

2) Sea

$$g: x \rightarrow \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x \leq 4 \\ 2 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

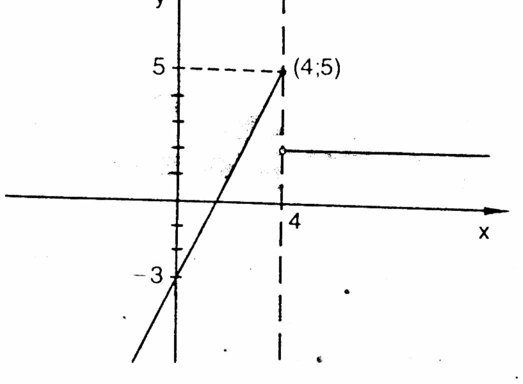


g no es una función, pues la recta vertical de ecuación $x = 4$ corta al gráfico en dos puntos: (4;2) y (4;5), es decir, el número 4 tiene dos imágenes.

Si eliminamos la segunda imagen de 4, por ejemplo:

$$h: x \rightarrow \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x \leq 4 \\ 2 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

entonces h es una función.

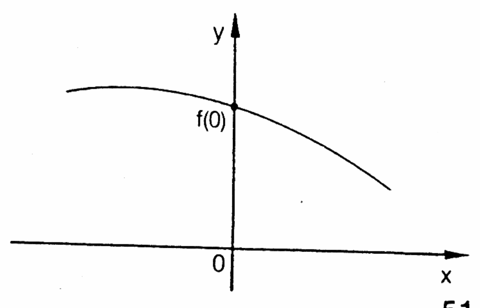


En efecto, ahora la vertical de ecuación $x = 4$ corta al gráfico solamente en el punto (4;5) y 5 es la única imagen de 4.

Por otra parte, al construir el gráfico de cualquier función, es conveniente encontrar, si existen, las intersecciones del mismo con los ejes de coordenadas.

La <u>*intersección con el eje y*</u>, si existe, es única, de acuerdo con la definición de función, y se obtiene para $x = 0$.

Es decir, si existe un punto de intersección del gráfico con el eje de ordenadas, dicho punto es $(0;f(0))$.



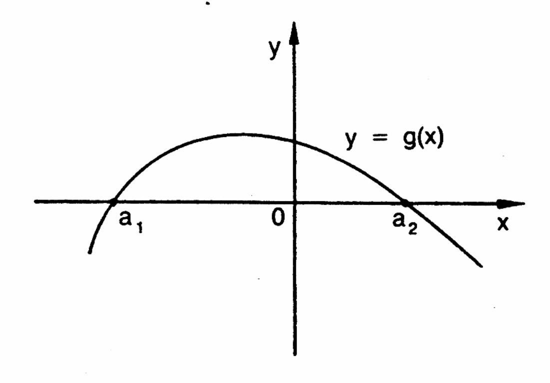
Las *intersecciones con el eje x* corresponden, si existen, a los puntos donde se anula el valor de la función.

Los puntos del dominio donde el valor de la función es cero reciben el nombre de *ceros de la función*.

O sea,

$$a \text{ cero de la función } f \iff f(a) = 0.$$

Si a es un número real, el gráfico de f corta al eje x en el punto (a;0).



a_1 y a_2 son ceros de la función g.

Funciones pares o impares

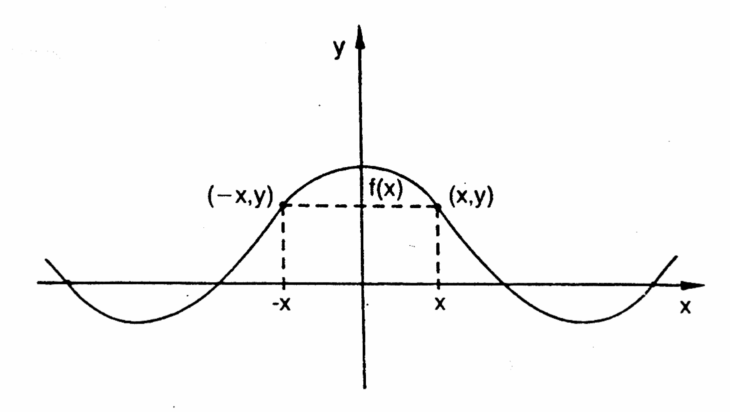
En algunos casos, la representación gráfica de ciertas funciones puede simplificarse, si se tiene en cuenta la simetría de la misma.

Por ejemplo, si una función f tiene el mismo valor en el punto x y en su opuesto $(-x)$, la función es una función *par*.

Es decir, f es función par $\iff \forall x$: $f(x) = f(-x)$.

El gráfico de una función par es simétrico respecto del eje de ordenadas.

El gráfico siguiente corresponde a una función par:



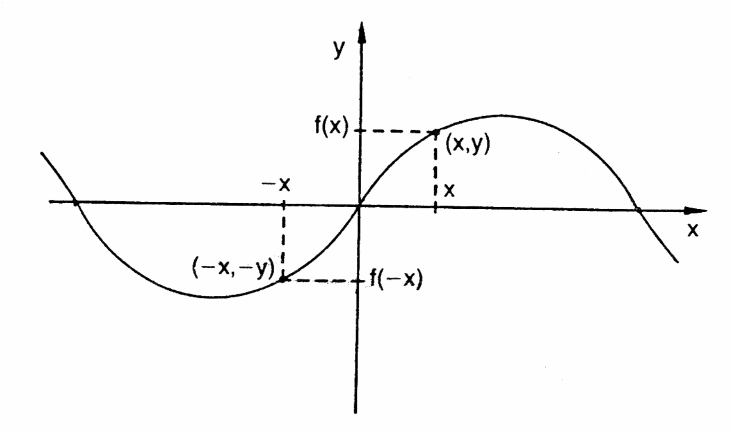
Las funciones $f: x \to \cos x$, $g: x \to x^2$, $h: x \to |x|$ son funciones pares.

En cambio, si los valores que alcanza f en números opuestos del dominio son números opuestos del recorrido, f es una función *impar*.

Es decir, f es función impar $\iff \forall x$: $f(x) = -f(-x)$.

En este caso el gráfico es simétrico respecto del origen.

El gráfico siguiente corresponde a una función impar:



Las funciones $f: x \to x$, $g: x \to \text{sen } x$, $h: x \to x^3$ son funciones impares.

Con un artificio simple puede demostrarse que cualquier función escalar es la suma de una función par más una función impar.

En efecto, siendo f una función escalar, es

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Para $h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ y $g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$, probaremos que h es par y g es impar:

$$h(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = h(x) \Rightarrow \text{h función par}$$

$$g(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -g(x) \Rightarrow \text{g función impar}$$

Consideramos, por ejemplo, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = x^2 + 3^x - 1$

Buscamos la función par $h / h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$

$$h(x) = \frac{x^2 + 3^x - 1 + (-x)^2 + 3^{-x} - 1}{2} \Rightarrow h(x) = \frac{2x^2 + 3^x + 3^{-x} - 2}{2}$$

Luego, $h(x) = x^2 - 1 + \frac{1}{2}(3^x + 3^{-x})$

La función impar es $g \,/\, g(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$

$$g(x) = \frac{x^2+3^x-1-[(-x)^2+3^{-x}-1]}{2} \Rightarrow g(x) = \frac{x^2+3^x-1-x^2-3^{-x}+1}{2}$$

Luego, $g(x) = \dfrac{1}{2}(3^x - 3^{-x})$

Por lo tanto,

$$f(x) = \underbrace{x^2-1+\frac{1}{2}(3^x+3^{-x})}_{h(x)}+\underbrace{\frac{1}{2}(3^x-3^{-x})}_{g(x)},$$

siendo h par y g impar.

EJERCICIOS

1) Hacer el gráfico de funciones dadas por las fórmulas siguientes, indicando dominio y recorrido.

$$f: x \to \begin{cases} -1 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 2x & \text{si } 1 < x < 3 \end{cases}$$

$$g: x \to \begin{cases} 2 & \text{si } -1 \le x < 0 \\ -1 & \text{si } 0 \le x < 2 \\ 3-x & \text{si } 2 \le x < 4 \\ x+1 & \text{si } 4 \le x \le 5 \end{cases}$$

$$h: x \to \begin{cases} x-3 & \text{si } 0 \le x < 2 \\ 2-3x & \text{si } -3 < x \le -1 \end{cases}$$

$$\ell: x \to \begin{cases} x & \text{si } -1 < x < 1 \\ -1 & \text{si } 1 < x < 3 \\ 2-x & \text{si } 3 \le x \le 5 \end{cases}$$

$$m: x \to \begin{cases} 4x-3 & \text{si } x \ge 1 \\ -5 & \text{si } x = 0 \\ -2x & \text{si } x \le -1 \end{cases}$$

$$n: x \to \begin{cases} -4 & \text{si } x = 3 \\ -2x+1 & \text{si } x > 4 \\ -x & \text{si } x \le 0 \end{cases}$$

$$t: x \to \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 2 \\ x+2 & \text{si } x \le 2 \end{cases}$$

$$u: x \to \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x > 0 \\ x^2-1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

2) Escribir cada una de las siguientes funciones como suma de una función par y una función impar:

a) $f(x) = \text{sen } 3x - x^2 + x + 5$ b) $f(x) = x + e^{-x} - 3$

III. Funciones definidas explícitamente

Una función escalar puede ser definida por cualquier recurso que permita hallar, para cada punto de un dominio determinado, el valor de la imagen correspondiente.

El método más común es, como ya se ha dicho, dar una regla, o varias, que permitan determinar f(x), conocido x, directamente mediante una sustitución numérica. Es el caso de las funciones definidas en forma explícita.

Por ejemplo, si $f: x \to x^2 + \text{sen}\, x$, la función f está *definida explícitamente* por la expresión anterior.

Suelen llamarse funciones transcendentes las funciones exponenciales como $g: x \to a^x$ $(a > 0)$, las logarítmicas como $h: x \to \ln x \,(\log_e x)$, las trigonométricas, etcétera.

Si bien la terminología anterior es útil para introducir el tema, el concepto moderno de función lleva a prescindir de esquemas rígidos. Se prefiere dar amplia libertad para la construcción de funciones, con la única exigencia de respetar la definición.

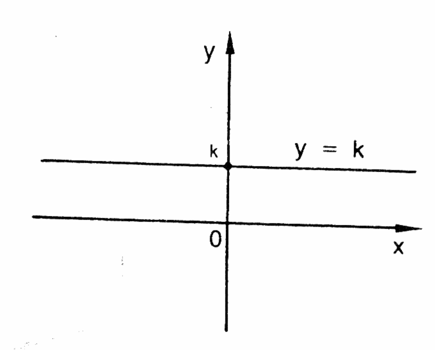
Presentaremos, a continuación, algunas funciones definidas en forma explícita, cuyo uso es muy común en el cálculo elemental.

Sin embargo, se aconseja al lector *"crear"* sus propias funciones hasta conseguir manejarlas con soltura.

Algunos ejemplos de funciones usuales son:

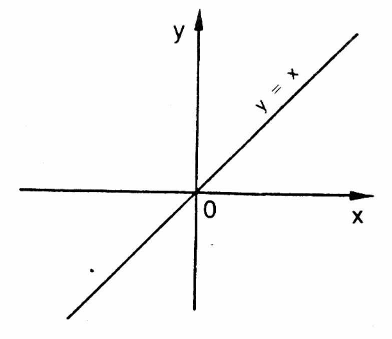
1) Función constante

f es una función constante si y sólo si $\exists k \in R \,/\, \forall x: f(x) = k$.
Su gráfico es una recta horizontal.



2) Función idéntica

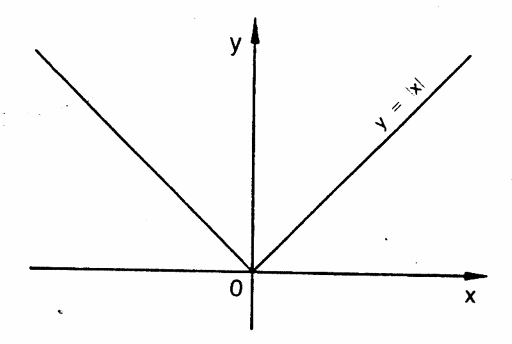
f es la función idéntica sobre R si y sólo si cada número real admite como imagen a ese mismo número real. Es decir, $\forall x: f(x) = x$.
Su gráfico es la recta que incluye a la bisectriz del primer cuadrante.



3) **Función valor absoluto**

f es la función módulo o valor absoluto si y sólo si $\forall x$: $f(x) = |x|$, de acuerdo con la definición dada en el capítulo 1.

Su gráfico está formado por las bisectrices del primero y segundo cuadrantes, pues los valores de f son no negativos.

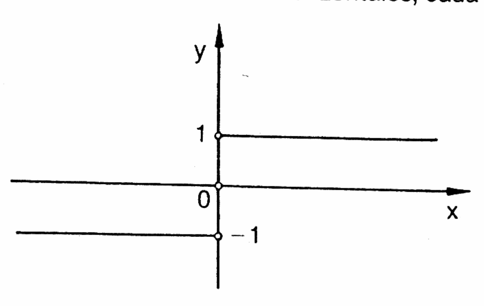


4) **Función signo**

La función signo está definida por la regla siguiente:

$$\forall x: \ \text{sgn } x = \frac{|x|}{x}$$

Su dominio es el conjunto de los números reales, del cual se excluye el cero. Su gráfico está formado por dos semirrectas horizontales, cada una sin su origen.



Nota: Algunos autores prefieren definir la función signo de la siguiente manera:

$$\text{sgn } x = \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

En este caso el dominio de la función es **R**.

5) **Función parte entera**

Se llama parte entera de un número real x al menor de los números enteros entre los cuales está comprendido si x no es número entero, y al mismo número x si éste es entero.

O sea, parte entera del número real x es el número entero e si y sólo si

$$e \leq x < e + 1.$$

Si x es número real, su parte entera se designa ent (x).

Así,

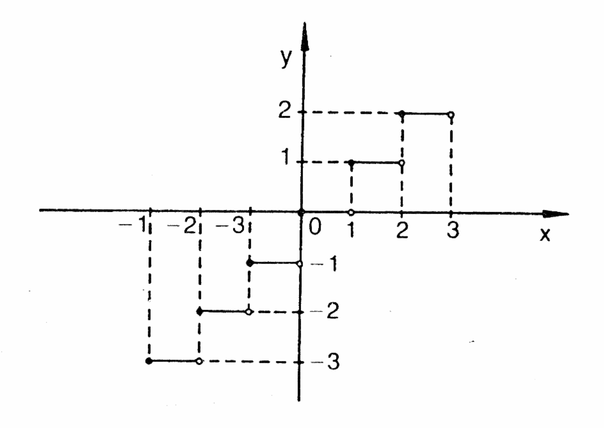
ent(1,6) = 1; ent(0,4) = 0; ent(−3,7) = −4; ent(−0,2) = −1; etcétera.

La función *"parte entera"* o *"piso"* es la que a cada número real le asigna, como imagen, su parte entera.

Es decir,

$$f: x \to \text{ent}(x).$$

Su gráfico es escalonado, formado por segmentos horizontales a los cuales no les pertenece el extremo derecho.



Su dominio es **R** y su recorrido es Z.

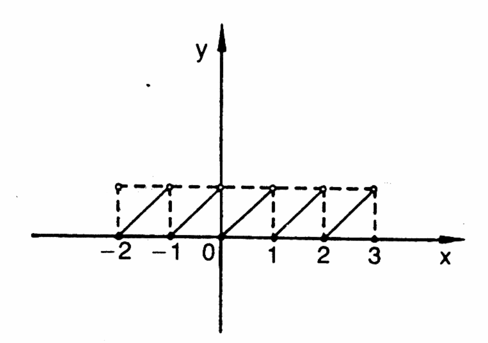
6) **Función mantisa**

La función mantisa se define de la siguiente manera:

$$\text{mant } x: x \to x - \text{ent}(x)$$

Así: mant (0,3) = 0,3 − 0 = 0,3

mant (5,7) = 5,7 − 5 = 0,7
mant (−0,6) = −0,6 − (−1) = 0,4
mant (−2,8) = −2,8 − (−3) = 0,2
etcétera.



Su dominio es R y su recorrido es [0;1).

7) **Funciones trigonométricas o circulares**

En trigonometría se consideran seis funciones trigonométricas: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante, definidas mediante recursos geométricos. Su utilización es importante no sólo en geometría sino en física y en matemática aplicada, en especial por su periodicidad.

Pueden definirse también en forma analítica utilizando series o integrales, y se llega en todos los casos a las mismas funciones.

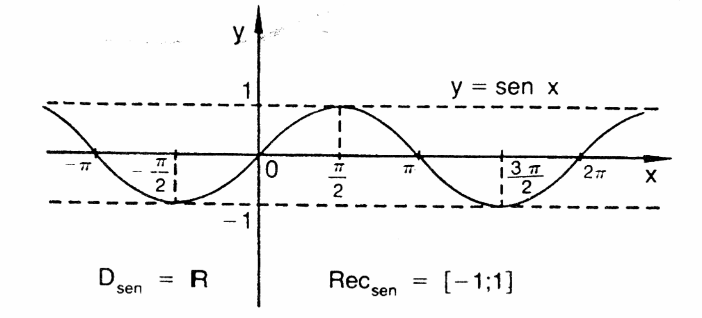
Indicamos a continuación sus propiedades más comunes y el gráfico de algunas de ellas.

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ $\quad$ $\text{sen}\,(2x) = 2\,\text{sen}\,x \cos x$ $\quad$ $\cos\,(2x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

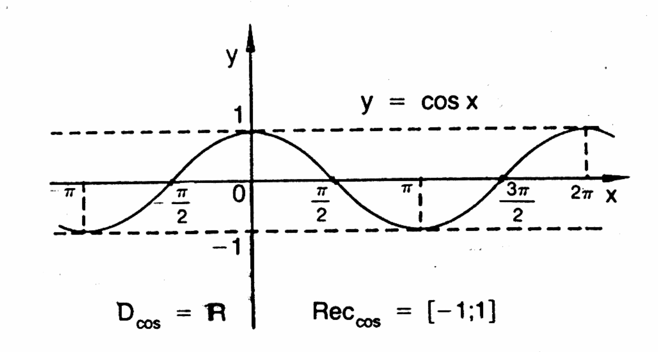
$\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos\,(2x)}{2}$ $\quad$ $\text{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos\,(2x)}{2}$ $\quad$ $\text{sen}\,0 = 0$

$\text{sen}\,\dfrac{\pi}{2} = 1$ $\quad$ $\cos 0 = 1$ $\quad$ $\cos \dfrac{\pi}{2} = 0$ $\quad$ $\text{tg}\,0 = 0$

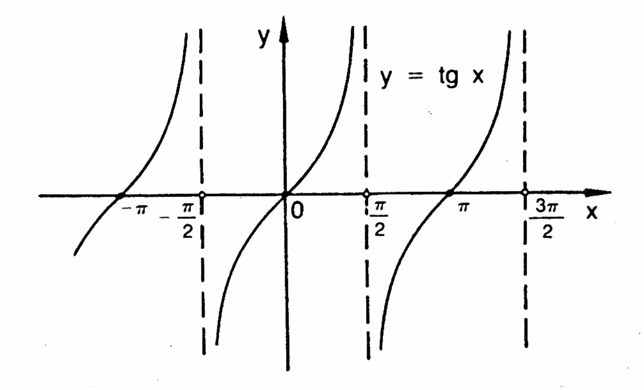
Las fórmulas anteriores pueden completarse con otras similares recurriendo a cualquier libro elemental de trigonometría.



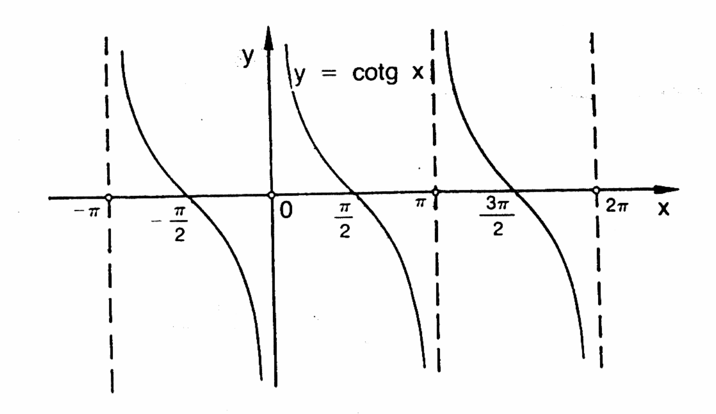
$D_{sen} = \mathbb{R}$ $\qquad$ $Rec_{sen} = [-1;1]$



$D_{cos} = \mathbb{R}$ $\qquad$ $Rec_{cos} = [-1;1]$



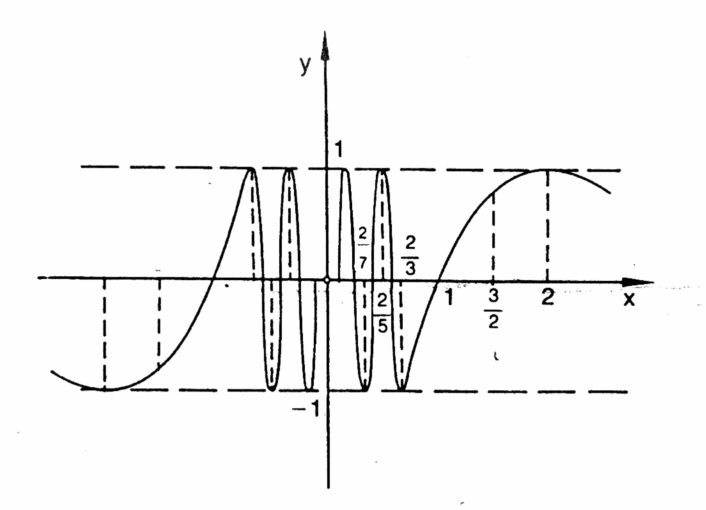
$D_{tg} = \left\{x \,/\, x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right\}$ $\qquad$ $Rec_{tg} = \mathbb{R}$



$D_{cotg} = \{x \,/\, x \in \mathbb{R} \wedge x \neq n\,\pi\}$ $\qquad$ $Rec_{cotg} = \mathbb{R}$

◆ Consideremos las funciones siguientes:

a). $\qquad f\colon x \to \text{sen}\,\dfrac{\pi}{x}$



Busquemos, primero, los ceros de la función que, como ya se ha visto, son los números del dominio que anulan el valor de la función.

En este caso,

$$f(x) = 0 \iff x = \frac{1}{n} \quad \wedge \ n \in Z - \{0\}$$

En efecto,

$$x = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{\pi}{x} = n\pi \ \cdot \ y \quad \text{sen}\,(n\pi) = 0.$$

Por otra parte, el mayor valor que puede alcanzar la función seno, para argumento real, es el número 1.

Resulta:

$$f(x) = 1 \iff x = \frac{2}{4n+1} \quad \wedge \ n \in Z.$$

En efecto,

$$\text{sen}\ \frac{\pi}{x} = 1 \quad \text{si} \quad \frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi.$$

También interesan los puntos del gráfico donde la función seno alcanza el menor valor, que es el número -1.

Resulta:

$$f(x) = -1 \iff x = \frac{2}{4n+3}$$

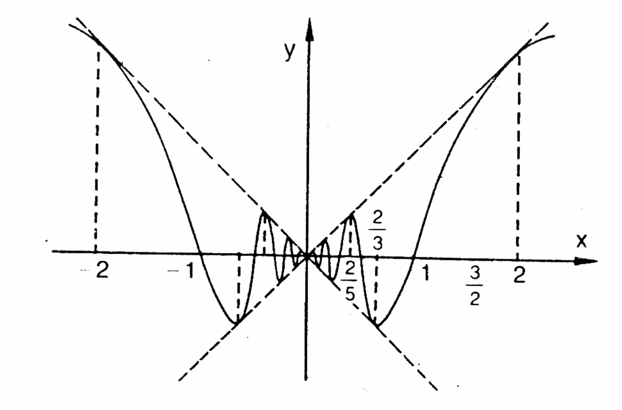
En efecto,

$$\text{sen}\ \frac{\pi}{x} = -1 \iff \frac{\pi}{x} = 3\,\frac{\pi}{2} + 2n\pi \ \wedge \ n \in Z.$$

Además f es una función impar, y su gráfico es simétrico respecto del origen.

b)

$$f: x \rightarrow \begin{cases} x\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



f es una función par, pues $\forall x$: $f(x) = f(-x)$.

8) **Funciones hiperbólicas**

Estas funciones son seis y se denominan: seno hiperbólico, coseno hiperbólico, tangente hiperbólica, etc. Se las designa, respectivamente: sh, ch, th, etcétera.

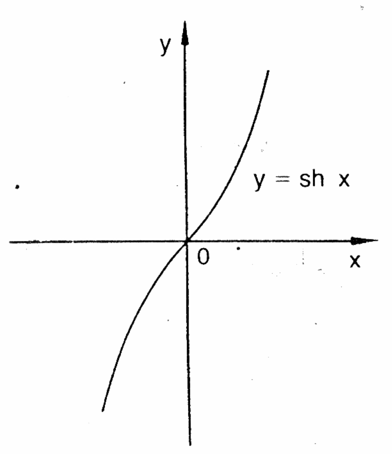
Se obtienen combinando funciones exponenciales cuya base es el número irracional $e = 2{,}7182\ldots$

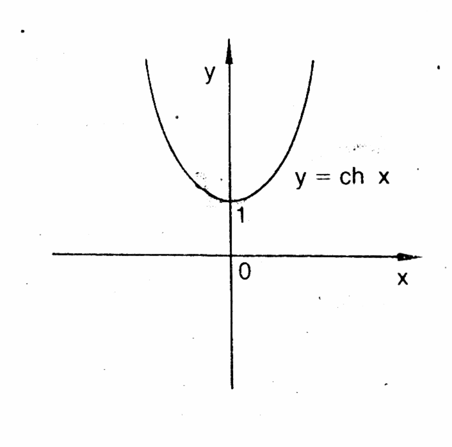
Se las define así:

$$\text{sh}\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{ch}\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\text{th}\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \text{coth}\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\text{sech}\ x = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \qquad \text{cosech}\ x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$



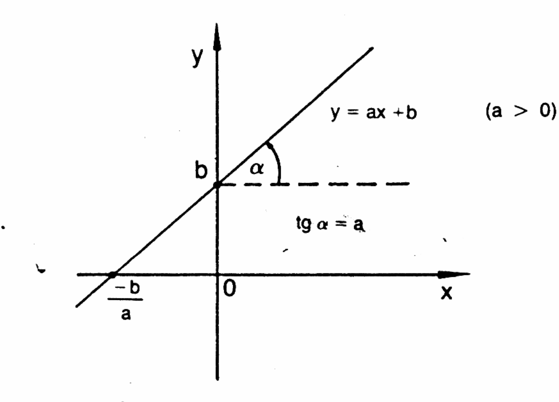


Se demuestra inmediatamente, utilizando las definiciones anteriores, que:

$\text{ch}^2\,x - \text{sh}^2\,x = 1 \qquad \text{ch}^2\,x + \text{sh}^2\,x = \text{ch}\,(2x) \qquad 2\,\text{sh}\,x\ \text{ch}\,x = \text{sh}\,(2x)$

9) **Función lineal**

f: $x \rightarrow ax+b$.

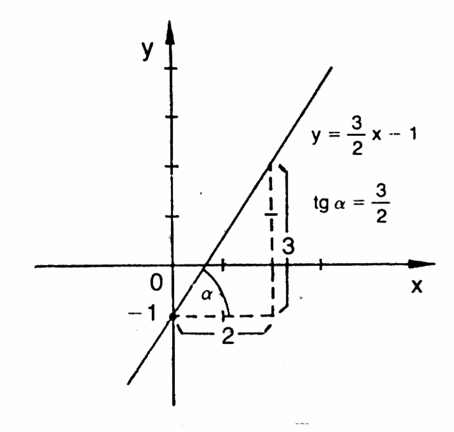


Su gráfico es una recta de pendiente a que corta al eje de ordenadas en el punto (0;b).

La función constante, vista anteriormente, es un caso especial de la función lineal donde $a = 0$. También lo es la función idéntica para $a = 1$ y $b = 0$.

Ejemplo

f: $x \rightarrow \frac{3}{2}x - 1$



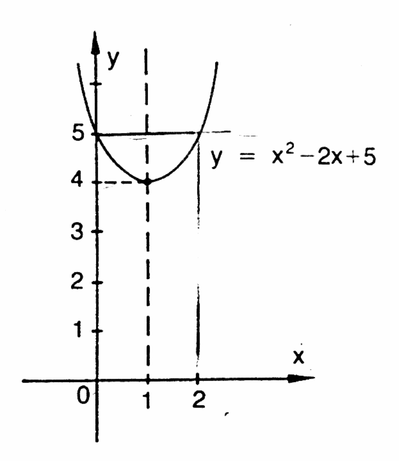
10) **Función cuadrática**

$$f: x \rightarrow ax^2+bx+c \qquad a \neq 0$$

El gráfico es una parábola cuyo eje y vértice se determinan fácilmente mediante el procedimiento de *"completar el cuadrado"*.

a) Sea f: $x \rightarrow x^2-2x+5$.

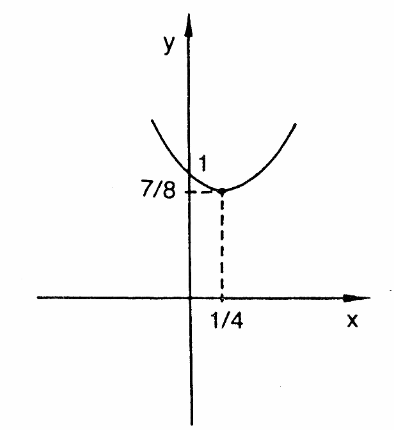
$$f(x) = x^2-2x+5 \Rightarrow f(x) = (x^2-2x+1)+4 \rightarrow f(x) = (x-1)^2+4$$



La parábola tiene como eje la recta de ecuación $x = 1$ y como vértice el punto (1;4).

b) Sea h: $x \rightarrow 2x^2-x+1$.

$$h(x) = 2\left(x^2-\frac{x}{2}\right)+1 \Rightarrow h(x) = 2\left(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}\right)-\frac{1}{8}+1 \Rightarrow h(x) = 2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}$$



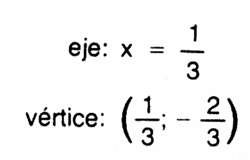
eje: $x = \frac{1}{4}$

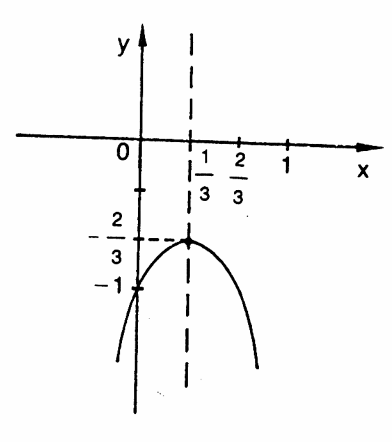
vértice: $\left(\frac{1}{4};\frac{7}{8}\right)$

c) Sea g: $x \rightarrow -3x^2+2x-1$.

$$g(x) = -3\left(x^2-\frac{2}{3}x\right)-1 \Rightarrow g(x) = -3\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{3}-1 \Rightarrow$$

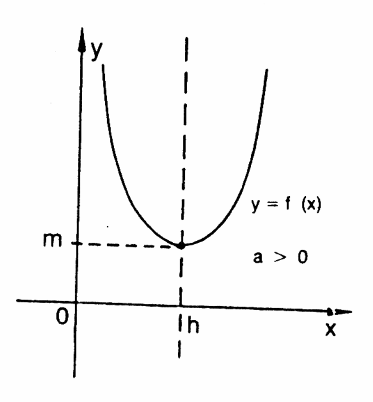
$$\Rightarrow g(x) = -3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{2}{3}$$





En este caso, por ser negativo el coeficiente de x^2, la concavidad de la parábola está dirigida hacia el eje negativo de ordenadas.

En general, la parábola correspondiente al gráfico de $f: x \rightarrow a(x-h)^2+m$ tiene por eje la recta de ecuación $x = h$ y por vértice el punto $(h;m)$. La concavidad es positiva si $a > 0$ y negativa para $a < 0$.



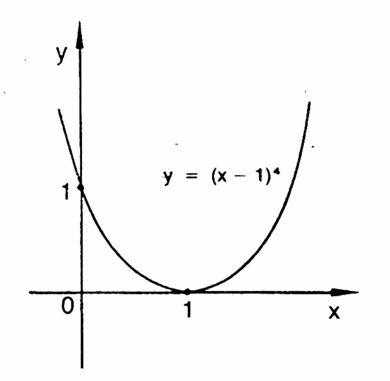
11) **Función polinómica**

La función lineal y la función cuadrática son casos especiales de funciones polinómicas del tipo

$$f: x \rightarrow a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 \quad (\forall_n: a_n \in \mathbb{R}).$$

Es de especial interés, para construir el gráfico de una función polinómica, conocer las raíces reales del polinomio correspondiente, o sea, los ceros de la función, pues indican los puntos en que el gráfico corta al eje de abscisas.

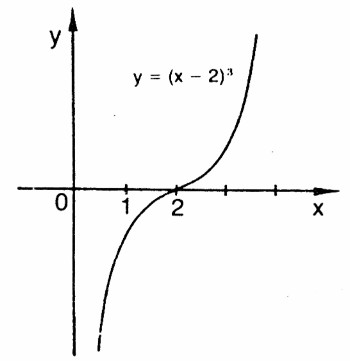
Sea $f: x \rightarrow (x-1)^4$.



El número 1 es una raíz de orden cuatro* del polinomio $f(x) = (x-1)^4$. Luego, el gráfico corta al eje x en $a = 1$, pero no lo atraviesa. Esto sucede siempre que la raíz es de orden par.

En cambio, si se trata de una raíz de orden impar, el gráfico atraviesa al eje en dicho punto.

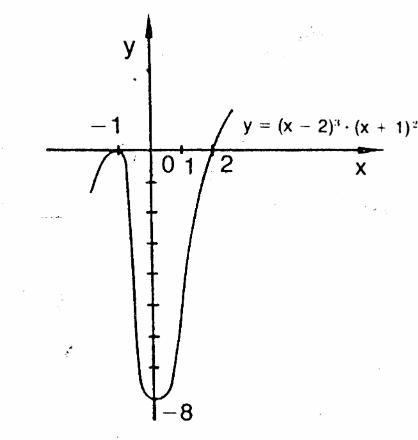
Sea $f: x \rightarrow (x-2)^3$.



En el punto $(2;0)$ el gráfico atraviesa al eje de abscisas.

Otro ejemplo:

$$f: x \rightarrow (x-2)^3 \cdot (x+1)^2.$$



**Nota.* El número r es raíz del polinomio p(x) si y sólo si $p(r) = 0$. La raíz r es de orden m (o tiene multiplicidad m) si y sólo si p(x) es divisible por $(x-r)^m$ y no lo es por $(x-r)^{m+1}$.

En (2;0) el gráfico atraviesa al eje de abscisas, pues 2 es raíz de orden impar. En cambio, en (−1;0) no lo atraviesa, pues −1 es raíz de orden par.

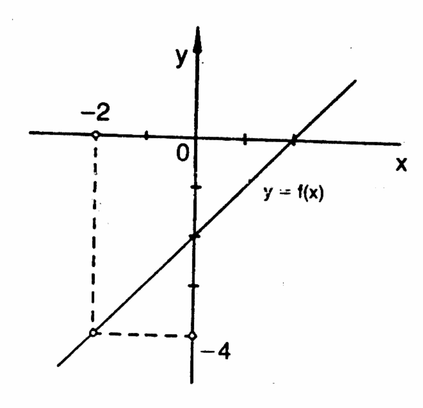
12) Funciones racionales

$$f: x \to \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} \qquad (b_m \neq 0 \wedge m \geq 1)$$

El dominio de f excluye los valores que anulan el denominador.

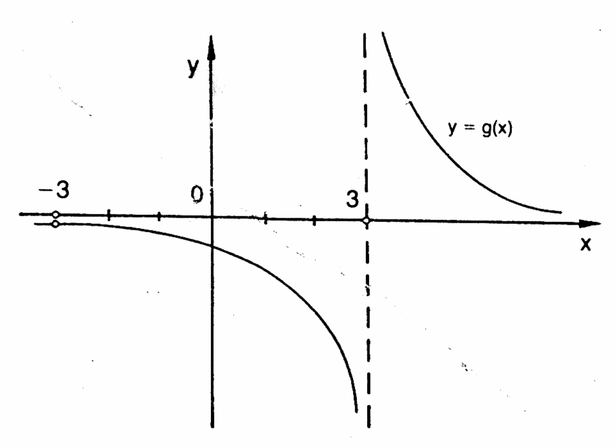
Para hacer el gráfico es necesario observar en primer lugar si numerador y denominador tienen factores comunes. En ese caso pueden simplificarse, indicando la función con una nueva regla donde se aclare el dominio correspondiente.

Sea $f: x \to \frac{x^2-4}{x+2}$. También $f: x \to x-2 \wedge x \neq -2$.



Su gráfico es la recta de ecuación $y = x-2$, de la cual se excluye el punto $(-2;-4)$.

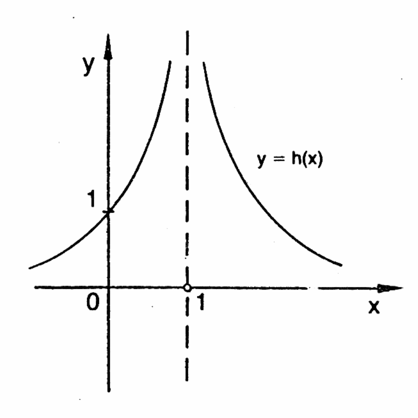
Sea $g: x \to \frac{x+3}{x^2-9}$. También $g: x \to \frac{1}{x-3} \wedge x \neq -3$.



En cualquier entorno reducido del punto $x = 3$, el conjunto de valores de g no está acotado. Se dice que la recta de ecuación $x = 3$ es una asíntota vertical al gráfico de g (este concepto se aclarará al considerar límite).

Como 3 es raíz de orden impar del denominador (previamente simplificado), los valores de la función cambian de signo en un entorno conveniente sobre el eje de abscisas a derecha e izquierda del punto $x = 3$.

Sea $h: x \to \frac{1}{(x-1)^2}$.

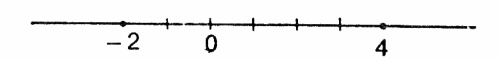


Como 1 es raíz de orden par del denominador, si se considera un entorno conveniente sobre el eje de abscisas a ambos lados del punto $x = 1$, la función toma en dicho entorno valores del mismo signo.

Como hemos dicho anteriormente, es aconsejable que cada uno decida "crear" sus propias funciones. Una forma interesante de hacerlo es utilizar la definición de valor absoluto.

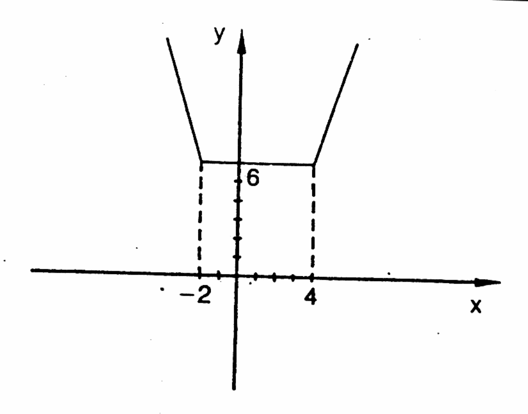
Ejemplo 1

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = |x-4|+|x+2|$.
En el dominio $\mathbb{R}$ debemos considerar dos puntos críticos: −2 y 4.



Para $x<-2$ es $|x-4| = -x+4 \wedge |x+2| = -x-2$ por definición de valor absoluto.
Para $-2 \leq x < 4$ es $|x-4| = -x+4 \wedge |x+2| = x+2$.
Para $x \geq 4$ es $|x-4| = x-4 \wedge |x+2| = x+2$.
Luego, $f(x) = -x+4-x-2$ si $x<-2$;
$f(x) = -x+4+x+2$ si $-2 \leq x < 4$;
$f(x) = x-4+x+2$ si $x \geq 4$.
Por lo tanto,

$$f: x \to \begin{cases} -2x+2 & \text{si } x<-2 \\ 6 & \text{si } -2 \leq x < 4 \\ 2x-2 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$



El recorrido de f es $\{y / y \geq 6\}$.
Obsérvese que hemos utilizado la siguiente definición de valor absoluto:

$$|a| = a \text{ si } a \geq 0 \wedge |a| = -a \text{ si } a < 0.$$

Nada cambia si se considera $|a| = a$ si $a > 0 \wedge |a| = -a$ si $a \leq 0$. O sea, no se alteran los valores que alcanza la función en los puntos críticos.

Ejemplo 2

Sea f: $x \to 1 - |x+2| + |x-3|$.

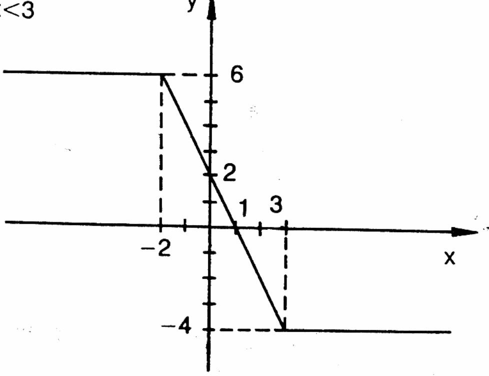
El dominio de la función es $\mathbb{R}$ y podemos considerar tres subconjuntos del mismo:

$D_1 = \{x / x < -2\}$ pues $|x+2| = -x-2 \wedge |x-3| = -x+3$ si $x < -2$
$D_2 = \{x / -2 \leq x < 3\}$ pues $|x+2| = x+2 \wedge |x-3| = -x+3$ si $-2 \leq x < 3$
$D_3 = \{x / x \geq 3\}$ pues $|x+2| = x+2 \wedge |x-3| = x-3$ si $x \geq 3$

Luego,

si $x \in D_1$ entonces $f(x) = 1+x+2-x+3$;
si $x \in D_2$ entonces $f(x) = 1-x-2-x+3$;
si $x \in D_3$ entonces $f(x) = 1-x-2+x-3$.

Resulta f: $x \to \begin{cases} 6 & \text{si } x < -2 \\ -2x+2 & \text{si } -2 \leq x < 3 \\ -4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$



El recorrido es $Rec_f = [-4;6]$.

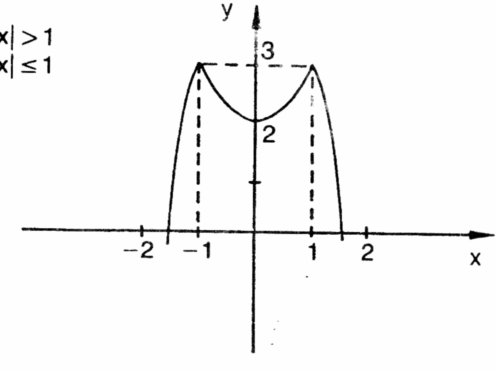
Ejemplo 3

Sea f: $x \to 3 - |x^2-1|$.
En este caso los puntos críticos del dominio son 1 y -1, que hacen $|x^2-1| = 0$.

$x < -1 \Rightarrow x^2-1 > 0 \Rightarrow |x^2-1| = x^2-1 \Rightarrow f(x) = 3-x^2+1$
$-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow x^2-1 \leq 0 \Rightarrow |x^2-1| = -x^2+1 \Rightarrow f(x) = 3+x^2-1$
$x > 1 \Rightarrow x^2-1 > 0 \Rightarrow |x^2-1| = x^2-1 \Rightarrow f(x) = 3-x^2+1$

O sea, f: $x \to \begin{cases} 4-x^2 & \text{si } x < -1 \\ x^2+2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 4-x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

También, f: $x \mapsto \begin{cases} 4-x^2 & \text{si } |x| > 1 \\ x^2+2 & \text{si } |x| \leq 1 \end{cases}$



$Rec_f = \{y / y \leq 3\}$

Funciones definidas implícitamente

Sea F(x;y) una expresión en dos variables x e y.
Por ejemplo:

$$F(x;y) = y+3x-1.$$

Una función f es solución de la ecuación $F(x;y) = 0$ si y sólo si $\forall x$: $F(x;f(x)) = 0$.
En este caso, se dice que la función f está definida *implícitamente* por $F(x;y) = 0$.

Sea $$F(x;y) = 2xy - 3y + 1.$$

De la ecuación $$2xy - 3y + 1 = 0$$

se puede despejar $$y = -\frac{1}{2x-3}.$$

Por lo tanto, $F(x;y) = 2xy-3y+1 = 0$ define implícitamente una función f cuya expresión explícita es

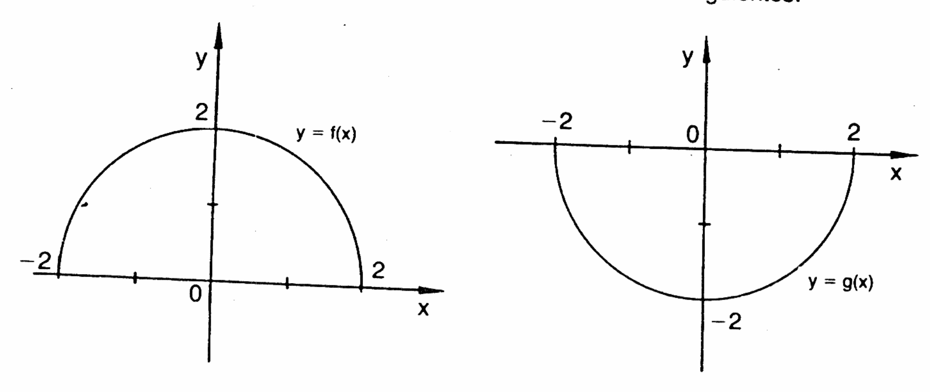
$$f: x \to -\frac{1}{2x-3}.$$

Algunas veces no es posible hallar la expresión explícita de la función indicada. En otros casos, una expresión en dos variables puede definir más de una función.

Si $F(x;y) = x^2 + y^2 - 4$, entonces $F(x;y) = 0$ puede definir implícitamente dos funciones distintas:

$$f: x \to \sqrt{4-x^2} \quad \text{y} \quad g: x \to -\sqrt{4-x^2},$$

cuyos gráficos son respectivamente las semicircunferencias siguientes:



También puede suceder que una expresión en dos variables no defina implícitamente a ninguna función (con dominio no vacío). Por ejemplo, esto sucede si $F(x;y) = x^2 + y^2 + 1$. En este caso, $F(x;y) = 0$ no se satisface para ningún par $(x;y)$ de números reales.

EJERCICIOS

1) Hacer el gráfico de $f: x \to \text{ent}(x) - 4$

2) Hacer el gráfico de las siguientes funciones lineales, indicando las intersecciones con ambos ejes.

$f: x \to 3x$ $\quad g: x \to 4x-1$ $\quad h: x \to \frac{3}{2}x+5$

$m: x \to -2x+4$ $\quad n: x \to -\frac{1}{3}x+2$ $\quad t: x \to -x-2$

3) Hacer el gráfico de las siguientes funciones cuadráticas. Completar previamente el cuadrado para hallar la ecuación del eje y las coordenadas del vértice de cada parábola.

$f: x \to x^2-6x+14$ $\quad g: x \to -x^2+4x-1$ $\quad h: x \to x^2+10x+23$

$m: x \to -x^2+3$ $\quad n: x \to -x^2+2x+2$ $\quad t: x \to x^2+6x+11$

$r: x \to 2x^2-12x+22$ $\quad s: x \to \frac{x^2}{3}+4x+11$ $\quad p: x \to -2x^2+4x+3$

4) Hallar los ceros reales de las siguientes funciones polinómicas y hacer el gráfico indicando las intersecciones con ambos ejes.

$f: x \to x^2-3x+1$ $\quad g: x \to x^3-2x^2-5x+6$ $\quad h: x \to x^3+4x^2-9x-36$

$m: x \to x^3+3x^2-x-3$ $\quad n: x \to x^5-16x^3$ $\quad t: x \to x^3-3x^2+4$

$r: x \to x^3-x^2-4x+4$ $\quad s: x \to x^4+3x^3-9x^2+5x$

5) Hacer el gráfico de las siguientes funciones, indicando dominio y recorrido.

$f: x \to \frac{x+4}{x-2}$ $\quad g: x \to \frac{4x-1}{2x+1}$ $\quad h: x \to \frac{3x+1}{x+4}$ $\quad m: x \to \frac{2x-5}{4x+1}$

6) Hacer el gráfico aproximado de las siguientes funciones, indicando el dominio.

$f: x \to \frac{1}{x-3}$ $\quad g: x \to \frac{x^2-25}{x+5}$ $\quad h: x \to \frac{(x-1)(x+3)}{x-2}$

$t: x \to \frac{x-4}{x^2-16}$ $\quad l: x \to \frac{3}{x^2+1}$ $\quad s: x \to \frac{1}{(x-2)^2}$

7) Hacer el gráfico aproximado de las siguientes funciones, indicando dominio y recorrido.

$f: x \to \frac{x-1}{x^2+2x-3}$ $\quad g: x \to \frac{x^3+x^2-x-1}{x+1}$ $\quad h: x \to \frac{x^2-x-2}{x-2}$

$l: x \to \frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$ $\quad m: x \to \frac{x}{2x^2-3x}$ $\quad n: x \to \frac{x}{x^3-x}$

$t: x \to \frac{x^2-3x-4}{x^2-5x+4}$ $\quad s: x \to \frac{x+3}{x^2+x-2}$ $\quad p: x \to \frac{x}{x^2-x-6}$

8) Graficar y hallar el recorrido de cada una de las siguientes funciones de **R** en **R**:

$f: x \to |x-5| - |x+3| - 1$ $\quad g: x \to 3|x-1| - |2x|$

$h: x \to |x-3| - |2x-1| + 3$ $\quad m: x \to |2x-4| + |x+5| - 1$

$s: x \to |x^2-4| - 1$ $\quad t: x \to |x^2-x|$

9) Idem para

$$f: x \to \begin{cases} |2x+1| & \text{si } x<-1 \\ |4-x| & \text{si } -1 \le x < 5 \\ |x-3| & \text{si } x \ge 5 \end{cases}$$

◆ 10) Indicar dominio adecuado, graficar, hallar intersecciones con los ejes y dar el recorrido de

$$f: x \to \left|\frac{x-1}{x+3}\right|$$

◆ 11) Ídem para $f: x \to \frac{2x}{|x+3|}$

◆ 12) Ídem para $f: x \to \frac{|x+1|}{3-x}$

◆ 13) Ídem para $f: x \to \ln|x-1|$

◆ 14) Ídem para $f: x \to |\ln x|$

◆ 15) Ídem para $f: x \to 2^{-|x-1|}$

◆ 16) Ídem para $f: x \to -\frac{|3x+2|}{|x-1|}$

◆ 17) Ídem para $f: x \to |x+2|+\left|\frac{x-3}{x}\right|$

◆ 18) Ídem para $f: x \to |x^2+2x+1|-2|x+4|-|x^2-1|$

Nota: Si algunos de los ejercicios propuestos en esta sección resultan demasiado complicados a esta altura del curso, puede volverse a ellos más adelante y realizar el estudio completo de cada una de las funciones elegidas.

IV. Clasificación de funciones

1. Funciones sobre o suryectivas

Hasta ahora se han considerado funciones de un conjunto *en* otro, donde el recorrido puede ser una parte del segundo conjunto. Si, en cambio, para una función f de A en B el recorrido coincide con el conjunto B, entonces f es una aplicación de A *sobre* B.

O sea, $f: A \to B$ es una aplicación de A sobre B si y sólo si

$$Rec_f = B.$$

Por ejemplo,

$$f: x \to 5x-1$$

es una función del conjunto $\mathbb{R}$ sobre sí mismo.

$$g: Z \to Z \,/\, \forall x \in Z: g(x) = 5x$$

no es una función sobre el conjunto de los números enteros, ya que el recorrido está formado exclusivamente por los números enteros que son múltiplos de 5.

$$h: x \to \operatorname{sen} x$$

es una función que aplica el conjunto $\mathbb{R}$ sobre el intervalo $[-1;1]$.

Obsérvese que, de acuerdo con las definiciones que hemos adoptado, una función siempre lo es *sobre* su recorrido.

2. Funciones inyectivas o "uno a uno"

En una función, un mismo número real puede ser imagen de distintos elementos del dominio, como sucede en $f: x \to x^2$, donde, por ejemplo, 4 es la imagen de 2 y también de -2.

Si se exige que cada elemento del recorrido sea imagen de un único elemento del dominio, entonces la aplicación es inyectiva.

O sea,

$$f: A \to B$$

es inyectiva o *"uno a uno"* si y sólo si

$$\forall a \in A\ \forall b \in A: \big(f(a) = f(b) \Rightarrow a = b\big)$$

o su contrarrecíproco: $\big(a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)\big)$

Es decir, una función inyectiva asigna a elementos diferentes del dominio elementos diferentes del recorrido.

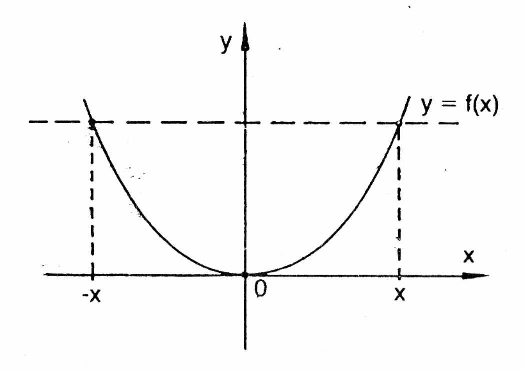
Geométricamente, si la función es inyectiva, una recta horizontal corta al gráfico *a lo sumo* en un punto.

Como ya se ha dicho,

$$f: x \to x^2 \quad \text{no es inyectiva,}$$

pues

$$\forall x \in D: \big(f(-x) = f(x) \wedge x \neq -x \ (\text{si } x \neq 0)\big).$$



Para negar la inyectividad basta exhibir un contraejemplo. Es decir,

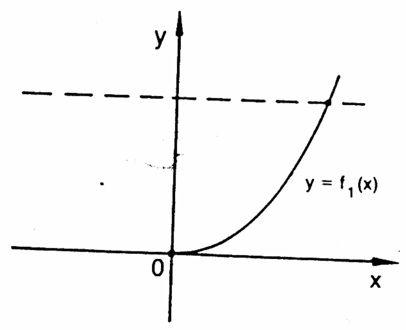
$$f \text{ no inyectiva} \Leftrightarrow \exists a \in A\ \exists b \in A: \big(f(a) = f(b) \wedge a \neq b\big).$$

En el caso anterior, por ejemplo,

$$\exists 2 \exists -2 \,/\, f(2) = f(-2) \wedge 2 \neq -2.$$

Si consideramos otra función f_1, definida por la misma regla anterior, pero cuyo

dominio es el conjunto de los números reales no negativos, entonces f_1 es una función inyectiva.



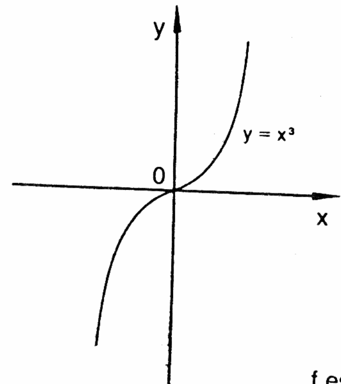
La función f_1 cuyo dominio es un subconjunto del dominio de f es una *restricción* de f.

Es decir, f_1 restricción de f $\Leftrightarrow$ $f_1 \subseteq f$.

3. **Función biyectiva o "uno a uno sobre"**

f es una función biyectiva si y sólo si es inyectiva y suryectiva. En este caso queda establecida una correspondencia biunívoca entre A y B.

Sea $f: x \rightarrow x^3$.



f es biyectiva de **R** en **R**.

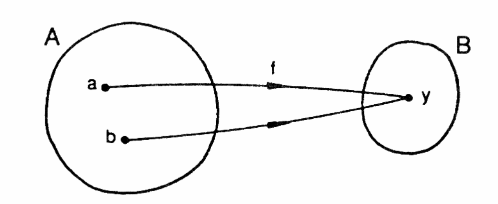
Las funciones biyectivas tienen extraordinaria importancia, pues sus relaciones inversas son también funciones biyectivas.

Es decir, como ya se ha visto, si f es una función, su relación inversa puede o no ser una función. Solamente si f es biyectiva su relación inversa es una función.

Sea

$$A = \{a,b\} \quad , \quad B = \{y\} \quad y \quad f = \{(a;y) , (b;y)\}.$$

f es una función de A sobre B que no es inyectiva.

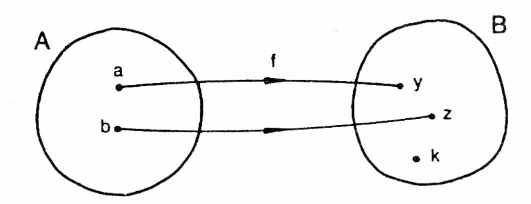


La relación inversa $g = \{(y;a) , (y;b)\}$ no es función de B en A, pues no se cumple la segunda condición exigida en la definición de función de que la imagen sea única.

Sea

$$A = \{a,b\} \quad , \quad B = \{y,z,k\} \quad y \quad f = \{(a;y) , (b;z)\}.$$

f es una función inyectiva de A en B que no es suryectiva.

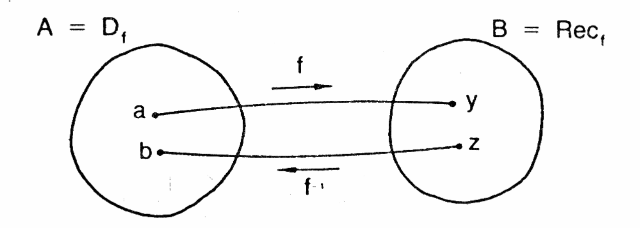


La relación inversa $g = \{(y;a) , (z;b)\}$ no es función de B en A, pues no cumple la primera condición de la definición de función, ya que el elemento k de B no tiene imagen en A.

Sea

$$A = \{a,b\} \quad , \quad B = \{y,z\} \quad y \quad f = \{(a;y) , (b;z)\}.$$

f es una función biyectiva de A en B.



La relación inversa $g = \{(y;a) , (z;b)\}$, función biyectiva de B sobre A, se denomina función inversa de f y se designa con el símbolo f^{-1}.

O sea,

$$g = f^{-1} \text{ y además } D_f = Rec_{f^{-1}} \wedge Rec_f = D_{f^{-1}}.$$

De acuerdo con los ejemplos anteriores, puede probarse que la condición necesaria y suficiente para que la relación inversa de una función f sea función biyectiva es que f sea biyectiva.

◆ **Teorema**

Sea f una función y g su relación inversa: f es función biyectiva si y sólo si g es función biyectiva.

Demostraremos la implicación directa: si f es una función biyectiva, entonces su relación inversa g es función biyectiva.

Sea

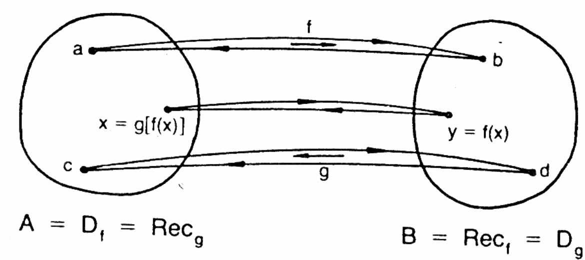
$$f: A \to B \quad y \quad g: B \to A.$$

Además,

$$g = \{(b;a) / (a;b) \in f\} \quad y \quad f \text{ biyectiva.}$$

Queremos probar:

1) g es una función;
2) g es biyectiva.



$A = D_f = Rec_g$ $\qquad$ $B = Rec_f = D_g$

1) Para que g sea función deben verificarse las dos condiciones de la definición de función.

Primera condición

Al ser f función de A *sobre* B, todos los elementos de B son segundas componentes de los pares de f y, por lo tanto, primeras componentes de los pares de g.

Es decir,

$$D_g = B.$$

Segunda condición

Al ser f *inyectiva:*

$$(a;b) \in f \wedge (c;d) \in f \wedge b = d \Rightarrow a = c \quad (1).$$

Pero, por definición de relación inversa:

$$(a;b) \in f \Leftrightarrow (b;a) \in g \quad y \quad (c;d) \in f \Leftrightarrow (d;c) \in g.$$

Reemplazando en (1), queda:

$$(b;a) \in g \wedge (d;c) \in g \wedge b = d \Rightarrow a = c,$$

que asegura la unicidad de la imagen.

Por lo tanto, g es una función de B en A.

2) Para que g sea biyectiva basta probar que es sobre A y que es inyectiva.

Primera condición

Al ser f una función y g su inversa, es

$$D_f = Rec_g = A.$$

Pero si el recorrido de g es A, la función g es *sobre* A.

Segunda condición

Por ser f una función, se cumple, de acuerdo con la segunda parte de la definición, que:

$$(a;b) \in f \wedge (c;d) \in f \wedge a = c \Rightarrow b = d.$$

Luego,

$$(b;a) \in g \wedge (d;c) \in g \wedge a = c \Rightarrow b = d,$$

y la función g es inyectiva.

La demostración de la implicación recíproca es completamente análoga.

Definición

Si f es una función de A en B se llama función inversa de f a la función f^{-1} de B en A / $\forall x \in A \; \forall y \in B$:

$$f^{-1}[f(x)] = x \wedge f[f^{-1}(y)] = y.$$

Por el teorema anterior, dicha función inversa existe y es única si y sólo si f es biyectiva. (En el teorema es $g = f^{-1}$.)

Ejemplos

1) Sea $f: x \to 3x - 1$.
f es una función biyectiva del conjunto $\mathbb{R}$ en sí mismo. Por lo tanto existe su función inversa f^{-1}.
El recurso más sencillo para encontrar la regla que defina a f^{-1} es escribir

$$y = 3x - 1 \quad \text{y despejar} \quad x = \frac{y+1}{3}.$$

Resulta

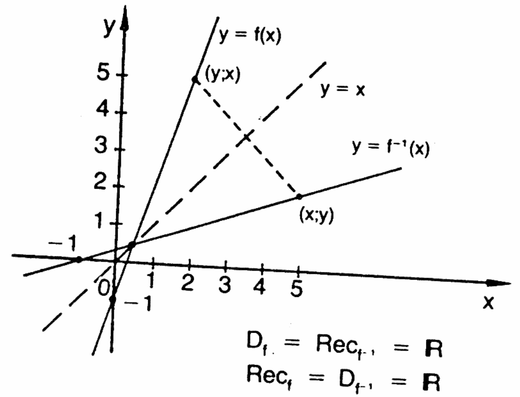
$$f^{-1}: y \to \frac{y+1}{3}.$$

Es costumbre, al anotar la regla que corresponde a f^{-1}, llamar también x a la variable.

O sea,

$$f: x \rightarrow 3x - 1,$$
$$f^{-1}: x \rightarrow \frac{x+1}{3}.$$

El gráfico de f^{-1} puede construirse mediante simetría del gráfico de f respecto de la recta de ecuación $y = x$.



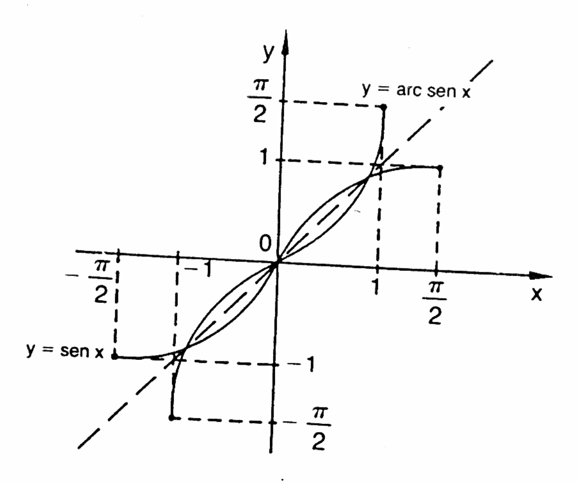
2) Sea $f: x \rightarrow$ sen x.

f no es función biyectiva. Puede considerarse una restricción de f cuyo dominio sea el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

O sea,

$$g: x \rightarrow \text{sen } x \wedge -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2},$$

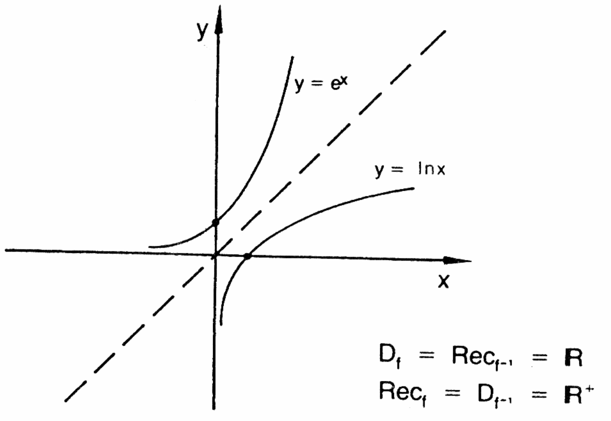
$$g^{-1}: x \rightarrow \text{arc sen } x.$$



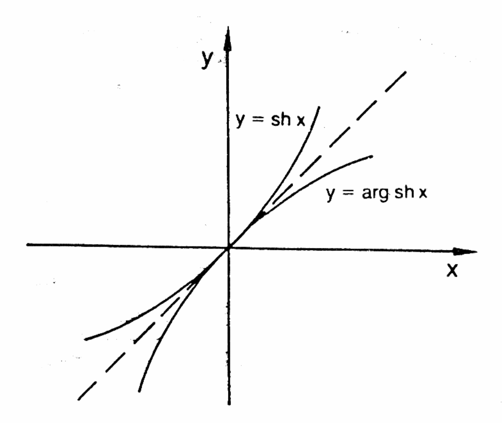
Como se ha indicado al comienzo de este ejemplo, la función inversa de la función seno es la función arco seno. Preferimos emplear esta notación para designar la función inversa de la función seno y no la notación sen^{-1}, que suele usarse en los libros modernos y en las calculadoras, y que puede confundirse erróneamente con la función cosecante, en la cual $\forall x \neq n\pi$: $\text{cosec } x = \frac{1}{\text{sen } x} = (\text{sen } x)^{-1}$.

Por las mismas razones la función inversa de la función coseno se designa arco coseno, etcétera.

3) Sea $f: x \rightarrow e^x$. f es biyectiva sobre el conjunto de los números reales positivos.
$f^{-1}: x \rightarrow \ln x$.



4) Sea $f: x \rightarrow$ sh x. f es biyectiva en **R**.
$f^{-1}: x \rightarrow$ arg sh x.



Utilizando la definición, puede probarse que

$$\text{arg sh } x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

En efecto,

$$y = \arg sh\, x \Leftrightarrow sh\, y = x \Leftrightarrow \frac{e^y - e^{-y}}{2} = x \Leftrightarrow e^y - e^{-y} - 2x = 0.$$

Multiplicando ambos miembros por e^y, resulta:

$$e^{2y} - 1 - 2xe^y = 0 \Leftrightarrow (e^y)^2 - 2x(e^y) - 1 = 0.$$

La igualdad anterior es una ecuación cuadrática en e^y, que resolvemos aplicando la fórmula:

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} \Leftrightarrow e^y = x \pm \sqrt{x^2+1}.$$

Siendo $\forall y$: $e^y > 0$, solamente aceptamos la solución $e^y = x + \sqrt{x^2+1}$.
Por lo tanto, $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, o sea, $\arg sh\, x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.
Una fórmula análoga se obtiene para $y = \arg ch\, x$.
Las funciones inversas de las funciones hiperbólicas y trigonométricas se utilizan frecuentemente en el cálculo de integrales.

◆ Restricciones

Dada una relación binaria, llamamos restricción de la misma a cualquiera de sus subconjuntos.

Es decir, para la relación $\mathcal{R} \subseteq A \times B$, $\mathcal{R}_1$ es una restricción de $\mathcal{R}$ si y sólo si $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}$.

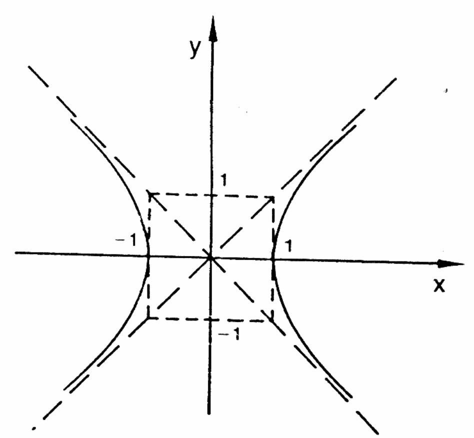
En algunos casos, dada una relación binaria que no es función, interesa hallar restricciones que lo sean, como ya hemos visto para funciones definidas en forma implícita.

Ejemplo 1

Consideremos la siguiente relación definida en $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{R} = \{(x;y) / x^2 - y^2 = 1\}.$$

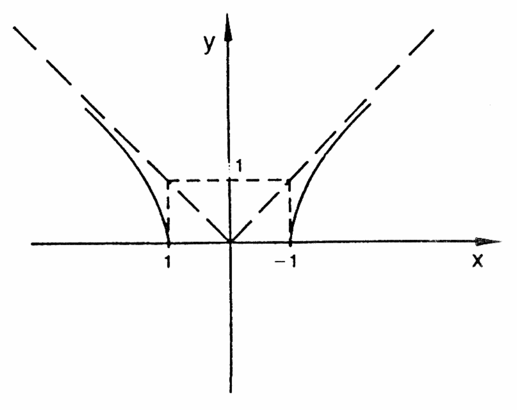
Su gráfico es una hipérbola equilátera, su dominio es $D = \{x / |x| \geq 1\}$ y su recorrido es $\mathbb{R}$.



a) Busquemos una restricción que sea función.
Por ejemplo, $f_1 = \{(x;y) / x^2 - y^2 = 1 \wedge y \geq 0\}$.
Se trata de una restricción de $\mathcal{R}$ pues $f_1 \subseteq \mathcal{R}$. En efecto,

$$\forall (x;y): \left((x;y) \in f_1 \Rightarrow (x;y) \in \mathcal{R}\right).$$

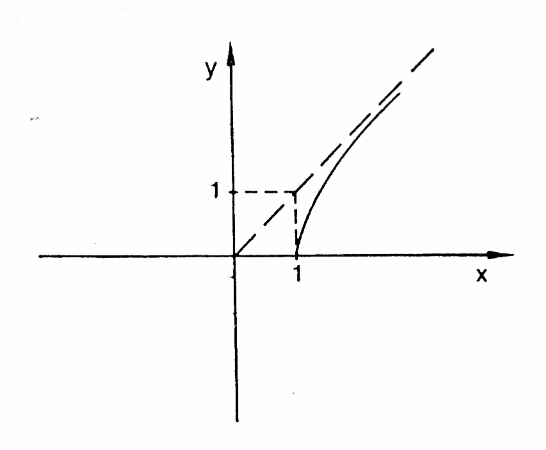
El dominio también es $D = \{x / |x| \geq 1\}$, pero el recorrido es $\mathbb{R}^+ \cup \{0\} = \{y / y \geq 0\}$



La misma función puede anotarse $f_1 = \left\{(x;y) / y = \sqrt{x^2 - 1}\right\}$.
Otra restricción funcional es $f_2 = \left\{(x;y) / y = -\sqrt{x^2 - 1}\right\}$.
En este caso, para el mismo dominio, el recorrido es $\mathbb{R}^- \cup \{0\} = \{y / y \leq 0\}$.
También es otra restricción funcional de $\mathcal{R}$ la siguiente:

$$f_3 = \{(1;0), (-1;0)\} \quad \text{con dominio } \{1, -1\} \text{ y recorrido } \{0\}.$$

b) Busquemos una restricción de $\mathcal{R}$ que sea función inyectiva.
Por ejemplo, $g_1 = \{(x;y) / x^2 - y^2 = 1 \wedge y \geq 0 \wedge x \geq 1\}$ es función inyectiva de A en $\mathbb{R}$ para $A = \{x / x \geq 1\}$.



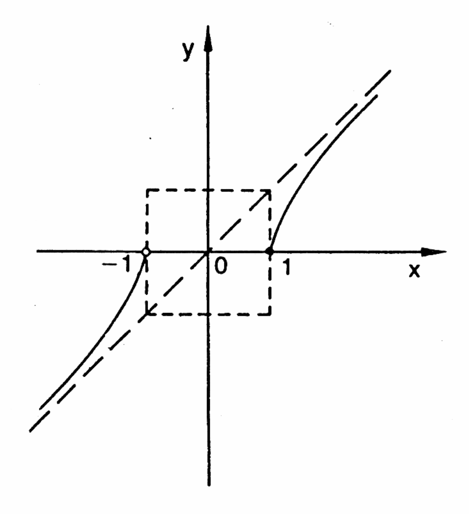
También $g_2 = \{(1;0), (-2;\sqrt{3}), (3;2\sqrt{2})\}$ con dominio $D = \{1,-2,3\}$.

c) Queremos dar ahora restricciones de $\mathcal{R}$ que sean funciones biyectivas.
Las funciones g_1 y g_2 del punto b) son funciones biyectivas si elegimos adecuadamente el segundo conjunto:

g_1 es biyectiva de A en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$,
g_2 es biyectiva de D en $\{0, \sqrt{3}, 2\sqrt{2}\}$.

Otra restricción funcional biyectiva de $\mathcal{R}$ puede darse con el siguiente conjunto:

$$h = \{(x;y) / (y = \sqrt{x^2-1} \wedge x \geq 1) \vee (y = -\sqrt{x^2-1} \wedge x < -1)\}$$



Su dominio es $C = \{x / |x| > 1 \vee x = 1\}$. Su recorrido es $\mathbb{R}$. Demostraremos que h es biyectiva de C en $\mathbb{R}$.

1) h inyectiva $\Leftrightarrow \forall x_1 \forall x_2: (h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$.
Para $x \geq 1$:

$$h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow \sqrt{x_1^2-1} = \sqrt{x_2^2-1} \Rightarrow x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = x_2,$$

pues $x_1 > 0 \wedge x_2 > 0$.

Para $x < -1$:

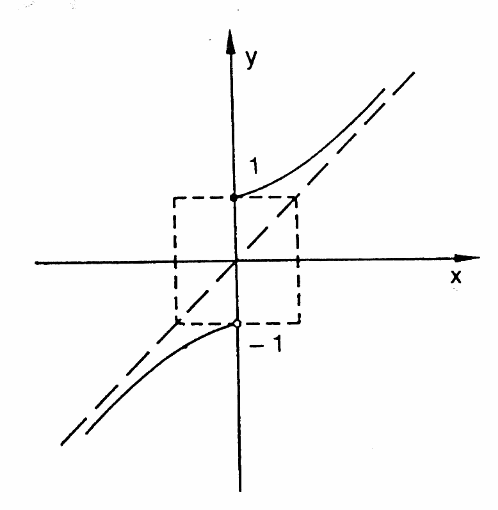
$$h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow -\sqrt{x_1^2-1} = -\sqrt{x_2^2-1} \Rightarrow x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow -x_1 = -x_2,$$

pues $x_1 < 0 \wedge x_2 < 0$.

También resulta $x_1 = x_2$ y h es inyectiva.

2) h es sobreyectiva en $\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in C: y = h(x)$.
Si $y \geq 0$, entonces $x = \sqrt{1+y^2}$.
Si $y < 0$, entonces $x = -\sqrt{1+y^2}$.

Por lo tanto, h es biyectiva y admite función inversa h^{-1}, también biyectiva, siendo $h^{-1} = \{(x;y) / (y = \sqrt{1+x^2} \wedge x \geq 0) \vee (y = -\sqrt{1+x^2} \wedge x < 0)\}$.



El dominio de h^{-1} es $\mathbb{R}$ y su recorrido $C = \mathbb{R} - [-1;1)$.

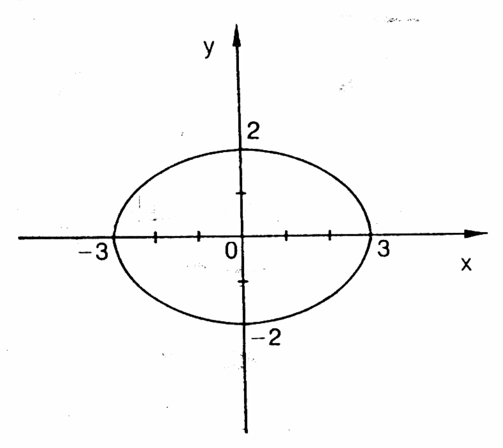
Ejemplo 2

Definimos en $\mathbb{R}$ la siguiente relación binaria:

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow 4x^2 + 9y^2 = 36.$$

O sea, $\mathcal{R} = \left\{(x;y) / \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\right\}$.

Su gráfico es una elipse, su dominio el intervalo cerrado $[-3;3]$ y su recorrido el intervalo cerrado $[-2;2]$.



a) Hallar tres restricciones distintas que sean funciones con el mismo dominio $[-3;3]$:

$f_1 = \{(x;y) / 4x^2+9y^2 = 36 \wedge y \geq 0\}$ Rec $f_1 = [0;2]$

$f_2 = \{(x;y) / 4x^2+9y^2 = 36 \wedge y \leq 0\}$ Rec $f_2 = [-2;0]$

$$f_3 = \left\{(x;y) / \left(y = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2} \wedge 0 \leq x \leq 3\right) \vee \right.$$ Rec $f_3 = (-2;2]$

$$\left. \vee \left(y = -\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2} \wedge -3 \leq x < 0\right)\right\}$$

b) Hallar una restricción de $\mathcal{R}$ que sea función inyectiva:

$$g = f_3 - \{(-3;0)\} \qquad D_g = (-3;3] \qquad Rec_g = (-2;2]$$

c) Hallar dos restricciones de $\mathcal{R}$ que sean funciones biyectivas y dar las funciones inversas:

$$h_1 = \left\{(x;y) / y = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2} \wedge 0 \leq x \leq 3\right\} \qquad D_{h_1} = [0;3] \qquad Rec_{h_1} = [0;2]$$

$$h_1^{-1} = \left\{(x;y) / y = \frac{3}{2}\sqrt{4-x^2} \wedge 0 \leq x \leq 2\right\}$$

$$h_2 = \left\{(3;0), (0;2), \left(2;\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)\right\} \qquad D_{h_2} = \{3,0,2\} \qquad Rec_{h_2} = \left\{0,2,\frac{2\sqrt{5}}{3}\right\}$$

$$h_2^{-1} = \left\{(0;3), (2;0), \left(\frac{2\sqrt{5}}{3};2\right)\right\}$$

◆ Conjuntos numerables

Las funciones biyectivas tienen extraordinaria importancia no sólo para asegurar la existencia de la función inversa, sino también para determinar el número cardinal de un conjunto dado.

En efecto, se dice que dos conjuntos tienen el mismo número cardinal o son coordinables o equipotentes si y sólo si existe una aplicación biyectiva entre los mismos.

Por ejemplo, los conjuntos $A = \{5,6\}$ y $B = \{c,d\}$ son coordinables, pues existe una aplicación biyectiva entre ambos. Así, la función $f / f(5) = c$ y $f(6) = d$ es una función biyectiva de A en B y el número cardinal de ambos conjuntos es "2".

La noción de número cardinal puede extenderse también a conjuntos infinitos, y dos conjuntos infinitos tienen el mismo número cardinal si y sólo si existe una aplicación biyectiva entre ambos.

Cantor propuso el símbolo $\aleph_0$ (aleph cero) para designar al número cardinal del conjunto de los números naturales.

Definición

Un conjunto infinito C es ***numerable*** si y sólo si es coordinable con el conjunto de los números naturales, es decir, si existe una aplicación biyectiva de C en N.

Puede probarse que el conjunto P de los números pares positivos es numerable.

En efecto, la función $f: P \rightarrow N / \forall x: f(x) = \frac{1}{2}x$ es una función biyectiva en N.

Análogamente puede verificarse, eligiendo convenientemente una función biyectiva en N, que el conjunto Z de los números enteros es un conjunto numerable.

El conjunto Q de los números racionales, a pesar de ser un conjunto denso en sí, es un conjunto numerable.

Es decir, es posible establecer una aplicación biyectiva de Q en N.

Para obtenerla puede recurrirse al proceso siguiente, llamado de diagonalización.

Consideremos el siguiente esquema, en el cual se ubican todos los números racionales positivos:

$1 \rightarrow 2 \quad 3 \rightarrow 4 \quad 5 \rightarrow$ ....
$\swarrow \quad \nearrow \quad \swarrow \quad \nearrow$
$\frac{1}{2} \quad \frac{2}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{4}{2} \quad \frac{5}{2}$ ....
$\downarrow \quad \nearrow \quad \swarrow \quad \nearrow \quad \swarrow$
$\frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{3} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{5}{3}$ ....
$\downarrow \quad \swarrow \quad \nearrow \quad \swarrow$
$\frac{1}{4} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{4}{4} \quad \frac{5}{4}$ ....
....

Ahora podemos numerar los elementos del cuadro anterior siguiendo el orden marcado por las flechas y omitiendo los números que aparecen repetidos.

Se obtiene así la sucesión:

$$\left(1;\ 2;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ 3;\ 4;\ \frac{3}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{1}{4};\ \ldots\right),$$

a cuyos términos podemos designarlos:

$$(a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4;\ a_5;\ \ldots).$$

Luego, la sucesión $(0;\ a_1;\ -a_1;\ a_2;\ -a_2;\ \ldots)$ contiene a todos los números racionales, y puede establecerse una aplicación biyectiva de Q en N de la siguiente manera:

$$f: \begin{array}{rcl} 0 & \rightarrow & 1 \\ a_1 & \rightarrow & 2 \\ -a_1 & \rightarrow & 3 \\ a_2 & \rightarrow & 4 \\ -a_2 & \rightarrow & 5 \\ \ldots & & \\ \ldots & & \end{array}$$

- Por lo tanto, el conjunto Q es numerable.

Sin embargo, no todos los conjuntos infinitos son numerables.

El conjunto **R** de los números reales ***no es numerable.*** Es decir, no existe ninguna aplicación biyectiva de **R** en **N**.

Para demostrarlo puede probarse, en primer lugar, que no es numerable el conjunto $(0;1) \subseteq \mathbb{R}$.

Para hacerlo se recurre a una demostración por el absurdo.

Recordemos, primero, que todo número real x puede expresarse como número decimal de infinitas cifras, periódicas si x es racional y no periódicas si x es irracional.

Ahora bien, si el conjunto (0;1) formado por los infinitos números reales comprendidos entre 0 y 1 fuera numerable, sus elementos podrían escribirse de la siguiente manera:

$$n_1 = 0,a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ \ldots\ldots\ a_n\ \ldots\ldots$$
$$n_2 = 0,b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5\ \ldots\ldots\ b_n\ \ldots\ldots$$
$$n_3 = 0,c_1\ c_2\ c_3\ c_4\ c_5\ \ldots\ldots\ c_n\ \ldots\ldots$$
$$n_4 = 0,d_1\ d_2\ d_3\ d_4\ d_5\ \ldots\ldots\ d_n\ \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Puede construirse ahora un número $x \in (0;1)$ que no figura en la sucesión anterior.

El número $x = 0,x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 \ldots\ldots\ x_n \ldots\ldots$ se construye de la siguiente forma:

En primer lugar, ninguna de sus cifras es 0 ni es 9, y, además,

$$x_1 \neq a_1 \wedge x_2 \neq b_2 \wedge x_3 \neq c_3 \wedge x_4 \neq d_4 \wedge \ldots \wedge x_n \neq n_n \wedge \ldots$$

Por lo tanto, $x \in (0;1)$, pues como ninguna de sus cifras es 0 ni es 9, $x \neq 0$ y $x \neq 0,999\ldots$ $(0,999\ldots = 1)$.

Además, el número x difiere de cada número del arreglo anterior por lo menos en la cifra que aparece en la diagonal señalada con la flecha.

Por lo tanto, el número x no pertenece a la sucesión anterior y los números reales del intervalo (0;1) no forman un conjunto numerable.

Con esto queda probado que **R** no es numerable, pues se demuestra fácilmente que cualquier subconjunto de un conjunto numerable es también un conjunto numerable.

Tampoco es numerable el conjunto de los números irracionales.

EJERCICIOS

1) Indicar si las siguientes funciones son inyectivas o suryectivas: a) de Z en Z; b) de Q en Q; c) de **R** en **R**.

f: $x \to 2x-1$
g: $x \to 5x$
h: $x \to x^2$

2) Indicar cuáles funciones son biyectivas. Para esas funciones, anotar sobre qué conjunto y dar f^{-1}. Hacer el gráfico de ambas utilizando simetría.

f: $x \to \cos x$ $\quad 0 \le x \le \pi$
g: $x \to \sqrt{x-1}$
h: $x \to \log x \ (\log_{10} x)$
t: $x \to 2x^2 - 1$

3) Indicar dominio y recorrido de las siguientes funciones biyectivas y de sus inversas.

f: $x \to 2x - 3$
g: $x \to x^3$
h: $x \to \sqrt{4 - x^2}$ $\quad 0 \le x \le 2$
t: $x \to \dfrac{2x+3}{5x-1}$
s: $x \to \dfrac{x-2}{x+3}$
l: $x \to \dfrac{5}{x^2+1}$ $\quad x \ge 0$
m: $x \to \dfrac{2x-1}{x+3}$
n: $x \to \dfrac{1}{x}$
u: $x \to \dfrac{1}{x+3}$
r: $x \to \dfrac{4x-1}{2x+4}$

4) Graficar la siguiente relación, definida en **R**:

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow 4y^2 - x^2 = 9$$

a) justificar que no es función;
b) dar una restricción que sea función indicando dominio y recorrido;
c) dar una restricción que sea función no inyectiva y justificar;
d) dar una restricción que sea función biyectiva y demostrar que lo es en los conjuntos elegidos. Dar la función inversa.

5) Idem para $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow y^2 = x + 4$.

V. Algebra de funciones

Funciones iguales

Dos funciones son iguales si y sólo si están formadas por los mismos pares ordenados.

$$f = g \iff D_f = D_g \wedge \forall x \in D_f\!: f(x) = g(x)$$

Sean

$$f\!: x \to \frac{(x+3)(x-3)}{x-3}$$

$$y \quad g\!: x \to x + 3.$$

f y g no son funciones iguales, pues el par (3;6) $\notin$ f y, en cambio, pertenece a g. Si consideramos una restricción de g, de cuyo dominio se ha excluido el número 3, entonces se obtiene una nueva función g_1 igual a f.

$$g_1\!: x \to x + 3 \wedge x \neq 3$$

Las funciones escalares pueden combinarse para obtener nuevas funciones escalares:

1. **Suma de funciones**

La función h es la suma de las funciones f y g si y sólo si:

$$D_h = D_f \cap D_g \wedge \forall x \in D_h\!: h(x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

2. **Resta de funciones**

La función h es la resta de las funciones f y g si y sólo si:

$$D_h = D_f \cap D_g \wedge \forall x \in D_h\!: h(x) = (f-g)(x) = f(x) - g(x).$$

3. **Producto de funciones**

La función h es el producto de las funciones f y g si y sólo si:

$$D_h = D_f \cap D_g \wedge \forall x \in D_h\!: h(x) = (fg)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

4. **Cociente de funciones**

La función h es el cociente de la función f sobre la función g si y sólo si:

$$D_h = D_f \cap D_g - \{x / g(x) = 0\} \wedge \forall x \in D_h\!: h(x) = \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Ejemplos

1) Sean

$f\!: x \to \ln x$ $\qquad D_f = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge x > 0\}$

y $g\!: x \to \dfrac{1}{x-2}$ $\qquad D_g = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 2\}$

$f + g\!: x \to \ln x + \dfrac{1}{x-2}$ $\qquad D_{f+g} = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge x > 0 \wedge x \neq 2\}$

2) Sean

$f\!: x \to \operatorname{sen} x$ $\qquad D_f = \mathbb{R}$

y $g\!: x \to x - 1$ $\qquad D_g = \mathbb{R}$

$\dfrac{f}{g}\!: x \to \dfrac{\operatorname{sen} x}{x-1}$ $\qquad D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{1\}$

$\dfrac{g}{f}\!: x \to \dfrac{x-1}{\operatorname{sen} x}$ $\qquad D_{\frac{g}{f}} = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge x \neq n\pi \wedge n \in \mathbb{Z}\}$

5. **Composición de funciones**

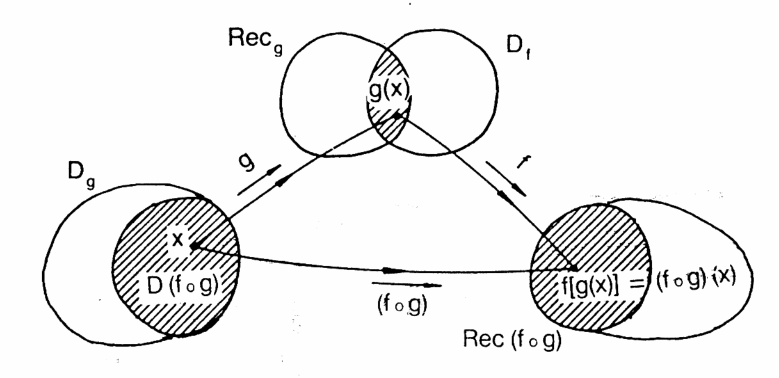
Dadas dos funciones, es posible, a veces, hallar una nueva función h, que se llama función compuesta de g con f, mediante la siguiente regla:

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f[g(x)].$$

Es decir, la función compuesta $h = f \circ g$ resulta de aplicar sucesivamente dos funciones, primero la función g y luego la función f.

Esto no siempre es posible, pues para que existan valores de la función compuesta h es necesario que el recorrido de g sea un subconjunto del dominio de f: $Rec_g \subseteq D_f$.

Si el dominio de f no incluye al recorrido de g, se debe considerar una restricción de la función g.



Obsérvese que en el caso correspondiente a la figura anterior se compone una restricción de g con una restricción de f. Seguimos usando la expresión "g compuesta con f" para simplificar el lenguaje.

En forma análoga puede definirse la función compuesta de f con g o de sus restricciones. También puede hacerse la composición de varias funciones, y se demuestra que es asociativa.

Ejemplos

1) Sean

$f: x \to 3x$ $\quad D_f = \mathbb{R}$ $\quad Rec_f = \mathbb{R}$

y

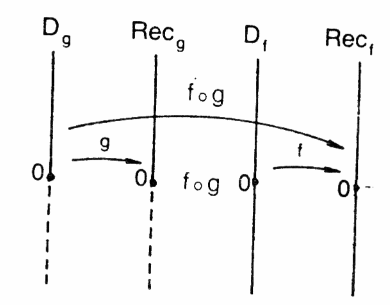
$g: x \to \sqrt{x}$ $\quad D_g = \{x / x \geq 0\}$ $\quad Rec_g = \{y / y \geq 0\}$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(\sqrt{x}) = 3\sqrt{x}$$

Luego,

$$f \circ g: x \to 3\sqrt{x}.$$

En este caso el dominio de la función compuesta coincide con el dominio de g. En efecto, el recorrido de g es el conjunto de los números reales no negativos, que es un subconjunto del dominio de f. Es decir, se cumple directamente: $Rec_g \subseteq D_f$.



Si se quiere hallar g ∘ f, es

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(3x) = \sqrt{3x}.$$

No se cumple ahora la condición exigida de que $Rec_f \subseteq D_g$. Debemos buscar, entonces, una restricción de f, considerando la parte del dominio de f cuya imagen está incluida en el dominio de g. Basta considerar el subconjunto de D_f que se aplica sobre el conjunto de los números reales no negativos, es decir, también el conjunto de los números no negativos.

Luego, consideramos

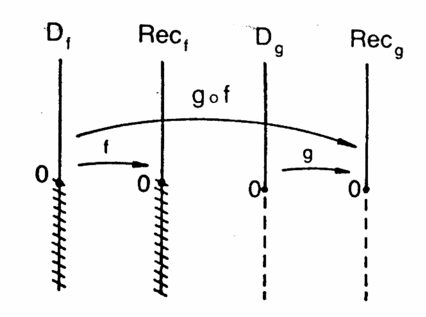
$$D_f^* = \{x / x \geq 0\}.$$

Ahora,

$$Rec_f^* = \{y/y \geq 0\} \quad y \quad Rec_f^* \subseteq D_g.$$

Nota: D_f^* indica el dominio de la restricción de f y Rec_f^* su recorrido.

Gráficamente:



Luego,

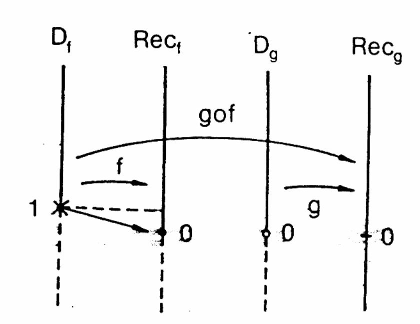
$$D_{g \circ f} = D_f^*.$$

2) Sean

$$f: x \to \sqrt{x-1} \quad y \quad g: x \to \ln x.$$

Hallar g ∘ f:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(\sqrt{x-1}) = \ln(\sqrt{x-1})$$



El único elemento de Rec_f que no pertenece a D_g es el cero. Luego, se debe excluir del dominio de f el elemento cuya imagen es 0, es decir, el número 1.

Luego, consideramos f con dominio

$$D_f^* = \{x / x > 1\}.$$

Ahora,

$$Rec_f^* = \{y / y > 0\},$$

$$Rec_f^* \subseteq D_g.$$

Por lo tanto,

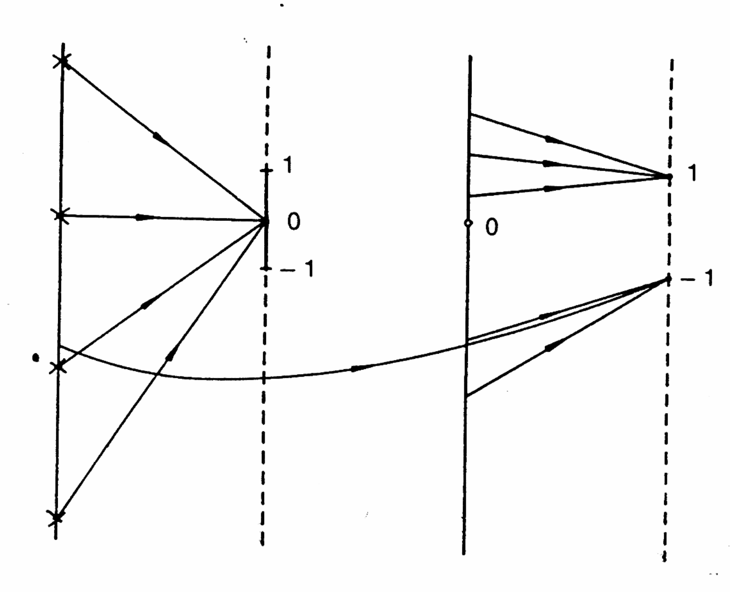
$$D_{g \circ f} = D_f^*.$$

3) Sean

$$f: x \rightarrow \frac{|x|}{x} \quad \text{y} \quad g: x \rightarrow \text{sen}\, x.$$

Hallar f o g:

$$f \circ g: x \rightarrow \frac{|\text{sen}\, x|}{\text{sen}\, x}$$



$$\text{Rec}_g \cap D_f = \{x / 0 < |x| \leq 1\}.$$

Luego, se deben excluir del dominio de g los elementos que se aplican sobre 0. Es decir,

$$D_g^* = D_{f \circ g} = \{x / \text{sen}\, x \neq 0\} = \{x / x \neq n\pi \wedge n \in Z\}.$$

Ya hemos señalado que la composición de funciones es asociativa. En efecto, para f: A → B, g: B → C, h: C → D, podemos demostrar que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$:

$$\left.\begin{array}{l} \forall x: (h \circ (g \circ f))(x) = h(g \circ f)(x) = h(g(f(x))) \\ \forall x: ((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) \end{array}\right\} \Rightarrow \forall x: (h \circ (g \circ f))(x) = ((h \circ g) \circ f)(x)$$

También se ha visto, a través de algunos ejemplos, que la composición de funciones no es conmutativa.

Si las funciones son biyectivas, puede hablarse, en ciertos casos, de conmutatividad de cada función con su inversa.

Si f es biyectiva de **R** en **R**, se verifica $\forall x \in \mathbf{R}: (f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$.

Es decir, la función compuesta $f \circ f^{-1}$ le asigna a cada número real x el mismo número x como imagen. Lo mismo sucede con $f^{-1} \circ f$. O sea, la función compuesta es la función idéntica o la identidad de **R** en **R**.

Por ejemplo, siendo f: **R** → **R** / f(x) = 5x + 2, resulta:

$$f^{-1}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} / f^{-1}(x) = \frac{x-2}{5}$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f[f^{-1}(x)] = f\left(\frac{x-2}{5}\right) = 5\left(\frac{x-2}{5}\right) + 2 = x$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}[f(x)] = f^{-1}(5x+2) = \frac{5x+2-2}{5} = x$$

Si el dominio de la función biyectiva no es **R**, al componerla con su inversa se obtiene la función idéntica, pero ésta puede estar definida en conjuntos diferentes.

Sea $f: A \rightarrow B / f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$. Puede demostrarse que f es biyectiva si $A = \mathbf{R} - \{-3\}$ y $B = \mathbf{R} - \{2\}$, resultando $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{2-x}$.

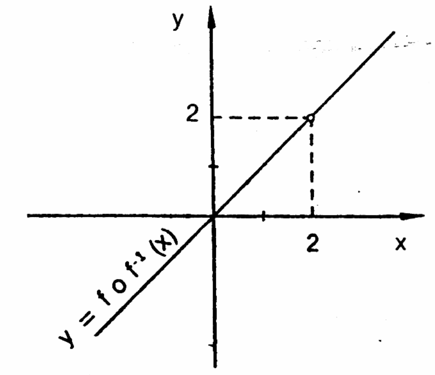
Ahora bien, al componer $f \circ f^{-1}$, el resultado es la función idéntica con dominio y recorrido B. Es decir, $f \circ f^{-1} = I_B$.

En efecto, $\forall x \in B: (f \circ f^{-1})(x) = f[f^{-1}(x)] = f\left(\frac{3x+1}{2-x}\right) =$

$$= \frac{2\left(\frac{3x+1}{2-x}\right) - 1}{\left(\frac{3x+1}{2-x}\right) + 3} = \frac{6x+2-2+x}{3x+1+6-3x} = \frac{7x}{7} = x.$$

O sea, a la función compuesta $f \circ f^{-1}$ no le pertenece el par (2;2).

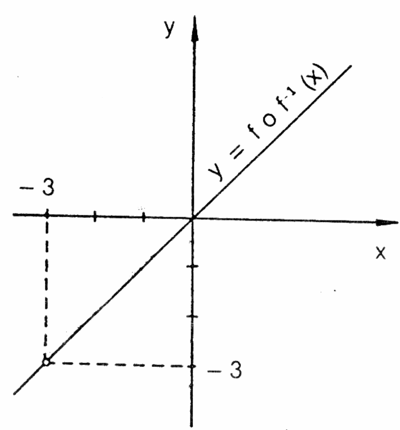
Si queremos graficar $f \circ f^{-1}$, resulta:



Análogamente, al componer $f^{-1} \circ f$, el resultado es la función idéntica con dominio y recorrido A. Es decir, $f^{-1} \circ f = I_A$.

En efecto, $f^{-1}\left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right) = \dfrac{3\left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right)+1}{2-\left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right)} = \dfrac{6x-3+x+3}{2x+6-2x+1} = x$

En este caso, a la función compuesta $f^{-1} \circ f$ no le pertenece el par $(-3;-3)$ y su gráfico es:



Por lo tanto, no se puede indicar que $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$.

EJERCICIOS

1) Indicar dominio y recorrido de f y de g. Hallar $f+g$, $f-g$, fg, $\frac{f}{g}$, $\frac{g}{f}$, $g \circ f$ y $f \circ g$.
Dar el dominio de cada una de las funciones halladas.

a) $f: x \to x+3$ $g: x \to 2x-1$
b) $f: x \to \sqrt{x}$ $g: x \to x^3$
c) $f: x \to \ln x$ $g: x \to \sqrt{x}$
d) $f: x \to \sqrt{9-x^2}$ $g: x \to \sqrt{x^2-25}$
e) $f: x \to x^2+2$ $g: x \to \ln(x-2)$

2) Hallar $f \circ g$ y $g \circ f$, indicando sus dominios.

a) $f: x \to 2x+1$ $g: x \to \operatorname{sen} x$
b) $f: x \to \operatorname{tg} x$ $g: x \to 2x-3$
c) $f: x \to \ln(x-3)$ $g: x \to x^2+3$
d) $f: x \to \ln(x-2)$ $g: x \to \sqrt{x}$
e) $f: x \to \ln(x-1)$ $g: x \to \sqrt{x+3}$
h) $f: x \to \operatorname{sen} x$ $g: x \to \ln(x^2-1)$
k) $f: x \to \sqrt{x^2-5}$ $g: x \to |x-5|$
m) $f: x \to x^2-1$ $g: x \to \dfrac{1}{x+3}$

s) $f: x \to x^2-2$ $g: x \to \ln(x+1)$

3) Hallar dominio y recorrido de $f \circ g$.

a) $f: x \to \ln x$ $g: x \to |\operatorname{sen} x|$
b) $f: x \to \dfrac{|x|}{x}$ $g: x \to x^2-6x+8$
c) $f: x \to \dfrac{1}{x}$ $g: x \to \operatorname{mant} x$
d) $f: x \to \ln(x+3)$ $g: x \to -|x-2|$
e) $f: x \to \sqrt{x^2-9}$ $g: x \to |x-3|$

4) Sea $f: A \to B \,/\, f(x) = \sqrt{x^2+1}$. a) Elegir A y B para que f sea biyectiva. b) Demostrar que lo es. c) Hallar f^{-1}. d) Verificar $f \circ f^{-1} = I_B$. e) Verificar $f^{-1} \circ f = I_A$.

5) Idem para $f(x) = \sqrt[3]{1-x^4}$.

VI. Ecuaciones paramétricas de una curva plana

Hemos visto en este capítulo que los gráficos de funciones escalares son conjuntos incluidos en $\mathbb{R}^2$. En todos ellos, una recta vertical corta al gráfico a lo sumo en un punto.

Curvas más generales pueden ser graficadas utilizando dos funciones escalares que dan una representación paramétrica de las mismas.

Por ejemplo,

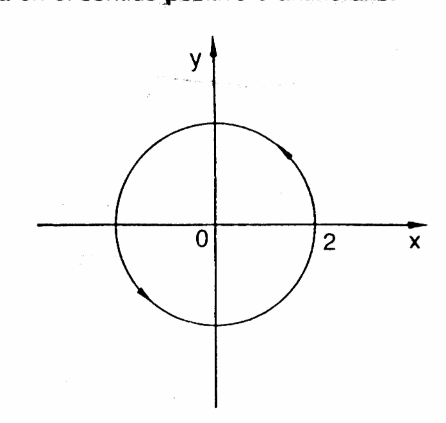
$$C = \{(x;y) \,/\, x = 2\cos t \wedge y = 2\operatorname{sen} t \wedge 0 \le t \le 2\pi\}$$

es un conjunto formado por los puntos de una circunferencia con centro en el origen y radio 2.

$x = 2\cos t \wedge y = 2\operatorname{sen} t$ son las ecuaciones paramétricas de la circunferencia, y el número real t, variable, es el parámetro.

Si elevamos al cuadrado y sumamos miembro a miembro las dos ecuaciones, eliminamos el parámetro y obtenemos la ecuación cartesiana $x^2 + y^2 = 4$.

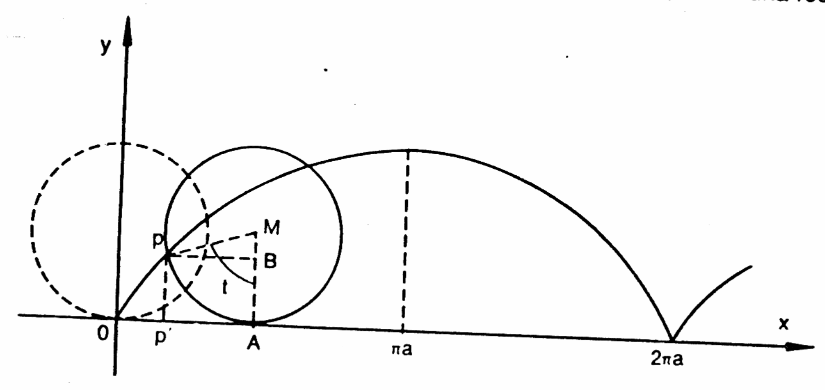
La curva C puede considerarse también como la trayectoria de un punto que recorre la circunferencia en el sentido positivo o antihorario.



Si en las mismas ecuaciones paramétricas consideramos $0 \le t \le 4\pi$, la circunferencia es recorrida dos veces en el mismo sentido.

De la misma manera, $x = a \cos t \wedge y = b \operatorname{sen} t$ son las ecuaciones paramétricas de la elipse de ecuación cartesiana $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Recíprocamente, conocida la trayectoria de un punto móvil en el plano, podemos tratar de hallar sus ecuaciones paramétricas. Por ejemplo, la cicloide es la trayectoria de un punto fijo de una circunferencia que rueda, sin deslizarse, sobre una recta.



Por la definición dada, es $OA = PA = a\,t$.
Siendo $P = (x;y)$, resulta:

$$x = OP' = OA - P'A = a\,t - a \operatorname{sen} t \wedge y = PP' = MA - MB = a - a \cos t.$$

Puede probarse, entonces, que las ecuaciones paramétricas de la cicloide son:

$$x = a\,(t - \operatorname{sen} t) \wedge y = a\,(1 - \cos t).$$

En general, si f y g son funciones escalares, obtenemos $C \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que

$$C = \{(x;y) / x = g(t) \wedge y = f(t) \wedge t \in D_f \cap D_g\}.$$

Como caso particular podemos considerar aquel en que g es la función idéntica, o sea,

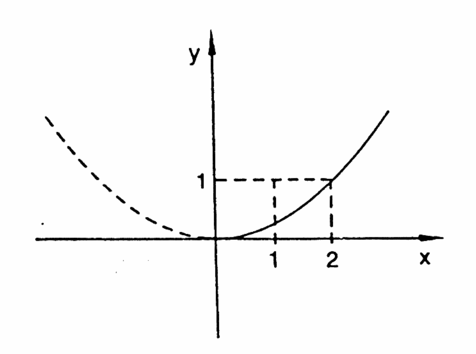
$$C = \{(x;y) / x = t \wedge y = f(t)\}.$$

En esta situación el conjunto C es, directamente, el gráfico de la función escalar f.

Ejemplo 1

Sea $C = \{(x;y) / x = 2\sqrt{t} \wedge y = t^2 \wedge t \geq 0\}$.

Si eliminamos el parámetro, obtenemos $y = \frac{x^4}{16}$. Sin embargo, C no es todo el gráfico de la función escalar $h: x \to \frac{x^4}{16}$, ya que solamente está incluida en C la parte del gráfico para la cual es $x \geq 0$.



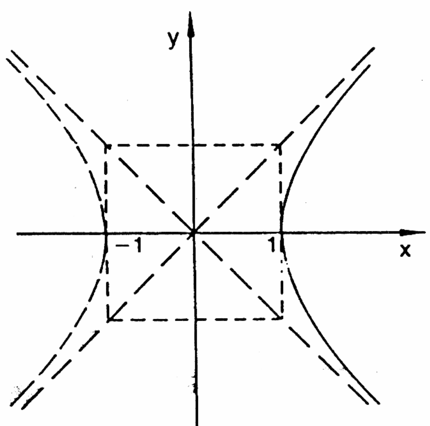
Ejemplo 2

$$C = \{(x;y) / x = \operatorname{ch} t \wedge y = \operatorname{sh} t \wedge t \in \mathbb{R}\}$$

Al eliminar el parámetro, obtenemos:

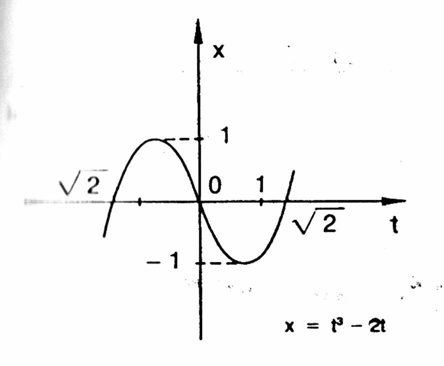
$$x^2 - y^2 = \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1 \quad , \quad \text{o sea, } x^2 - y^2 = 1.$$

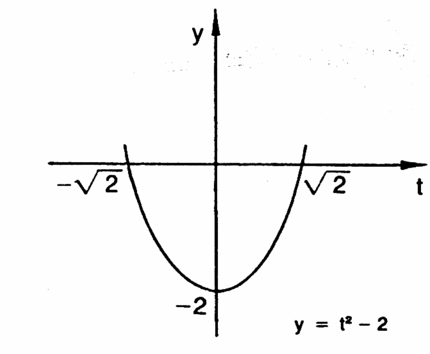
Pero C es solamente una rama de la hipérbola equilátera, para $x \geq 1$, ya que $\operatorname{ch} t \geq 1$.



Ejemplo 3

$$C = \{(x;y) / x = t^3 - 2t \wedge y = t^2 - 2 \wedge t \in \mathbb{R}\}.$$



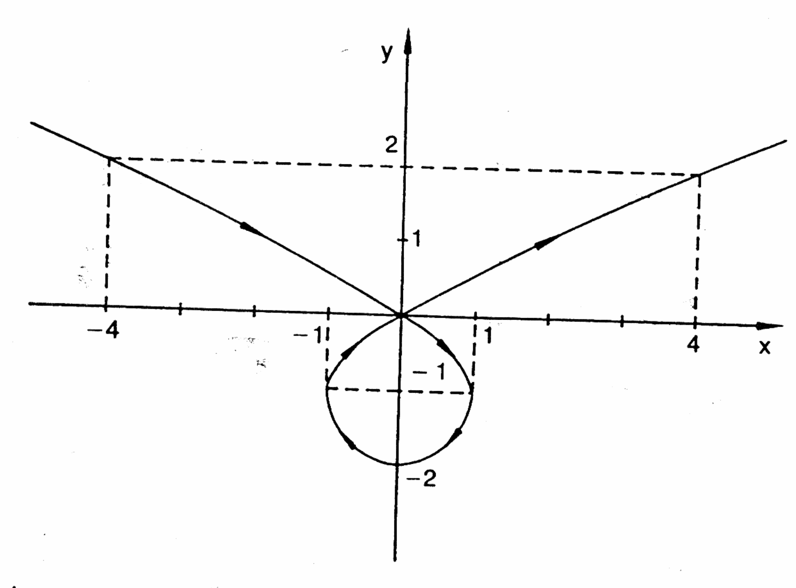


Para dibujar la trayectoria correspondiente a C buscamos primero algunos valores aislados según el cuadro siguiente:

t	-3	-2	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	2	3	......
x	-21	-4	0	1	0	-1	0	4	21	......
y	7	2	0	-1	-2	-1	0	2	7	......

Además, observamos que: .

$(t < -\sqrt{2} \Rightarrow x < 0 \wedge y > 0) \wedge$
$\wedge (-\sqrt{2} \leq t < 0 \Rightarrow 0 < x \leq 1 \wedge -2 < y \leq 0) \wedge$
$\wedge (0 \leq t < \sqrt{2} \Rightarrow -1 \leq x < 0 \wedge -2 < y \leq 0) \wedge$
$\wedge (t > \sqrt{2} \Rightarrow x > 0 \wedge y > 0)$



Las representaciones paramétricas de las curvas forman parte de la teoría general de las funciones vectoriales. (Cálculo 2, pág. 291.)

EJERCICIOS

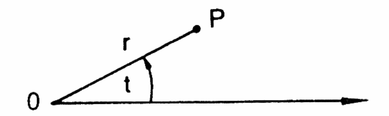
1) Siendo $C = \{(x;y) / x = g(t) \wedge y = f(t) \wedge t \in D_f \cap D_g\}$
   a) graficar g y f; b) eliminar el parámetro y obtener una ecuación cartesiana del tipo $F(x;y) = 0$. c) siendo $A = \{(x;y) / F(x;y) = 0\}$, graficar A y C y ver si coinciden, . para $g: t \rightarrow t^2 \wedge f: t \rightarrow 2t$.
2) Idem si $g: t \rightarrow 2 \cos t \wedge f: t \rightarrow 4 \operatorname{sen}^2 t$.
3) Idem si $g: t \rightarrow \operatorname{cosec} t \wedge f: t \rightarrow -\operatorname{cotg}^2 t \wedge 0 < t < \pi$
4) Idem si $g: t \rightarrow 5 e^t \wedge f: t \rightarrow 2 e^t$.
5) Ecuación cartesiana y gráfico de la astroide, cuyas ecuaciones paramétricas son: $x = a \cos^3 t \wedge y = a \operatorname{sen}^3 t \wedge a > 0 \wedge 0 \leq t < 2\pi$.

VII. Ecuación polar de una curva plana

Coordenadas polares

Las coordenadas cartesianas ortogonales permiten ubicar un único punto del plano mediante un único par de números reales (x;y).

Éste no es el único sistema de coordenadas que se utiliza en el plano, y, en algunas ocasiones, otro sistema resulta más conveniente: el de coordenadas polares. Este sistema tiene como elementos de referencia un polo 0 y un eje polar que coincide con el semieje positivo de abscisas del sistema cartesiano ortogonal.



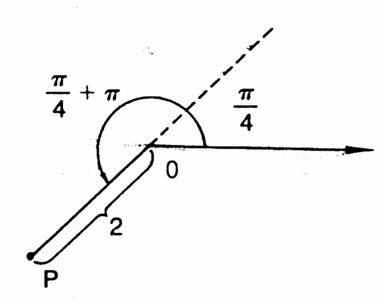
Para ubicar un punto P en el plano basta considerar su distancia r al polo y el ángulo t que forma el eje polar con el segmento OP, medido en radianes. Con esta definición, r y t son números reales, el primero no negativo.

El par de coordenadas polares (r;t) que se asigna a un punto P del plano no es único, pues le corresponden también, al mismo punto P, los infinitos pares $(r;t + 2k\pi)$ con $k \in Z$. Además, al origen le corresponden los infinitos pares (0;t) con $t \in R$.

Por otra parte, dado un par de números reales, si se lo considera como coordenadas polares de un punto del plano, es necesario interpretar qué significa que el número r sea negativo.

Para ello, dado el par (r;t), si $r < 0$, entonces se le hace corresponder un punto del plano cuya distancia al polo es $-r$ y el argumento $t + \pi$.

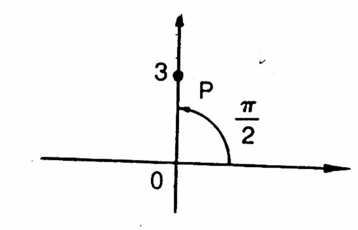
Por ejemplo, al par $\left(-2;\frac{\pi}{4}\right)$ se le hace corresponder el punto P de la figura siguiente:



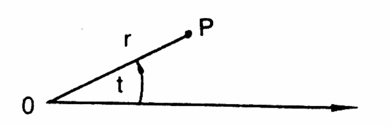
Las fórmulas de pasaje al sistema cartesiano ortogonal son:

$$x = r \cos t \wedge y = r \operatorname{sen} t.$$

Obsérvese que, por ejemplo, al punto P de la figura siguiente, cuyas coordenadas cartesianas son (0;3), le corresponden como coordenadas polares los infinitos pares: $\left(3;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$ y $\left(-3;3\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$ con $k \in Z$.



En general,



a P le corresponden las coordenadas polares $(r;t+2k\pi)$ y $(-r;t+(2k+1)\pi)$ con $k \in Z$.

Nota: A veces es necesario establecer una biyección entre el conjunto de los puntos del plano y el conjunto de sus coordenadas polares. Para ello puede exigirse $r > 0$ y $0 \leq t < 2\pi$, y asignarle al polo el par (0;0) (Cálculo 2, pág. 54).

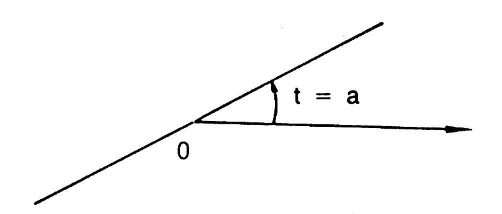
Ecuación polar

Sean r y t coordenadas polares y f una función escalar. La ecuación $r = f(t)$ es la ecuación polar de f y el conjunto $C = \{(r \cos t; r \operatorname{sen} t) / r = f(t)\}$ es su gráfico.

Obsérvese que la ecuación polar $r = f(t)$ corresponde a las ecuaciones paramétricas $x = f(t) \cos t \wedge y = f(t) \operatorname{sen} t$ con parámetro t.

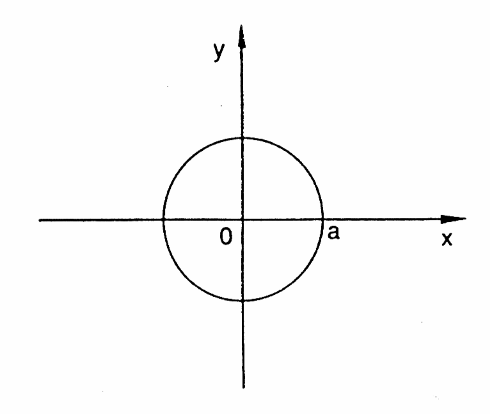
Ejemplo 1

La ecuación polar $t = a$ corresponde a una recta que pasa por el origen y tiene pendiente a.



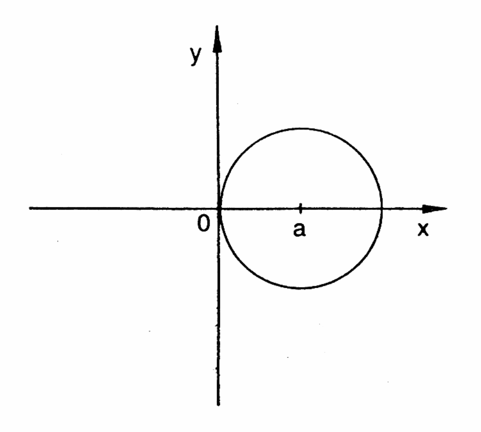
Ejemplo 2

Para una circunferencia con centro en el origen y radio a, cuya ecuación cartesiana es $x^2 + y^2 = a^2$, la ecuación polar es $r = a$.



Ejemplo 3

Consideremos la ecuación cartesiana $(x - a)^2 + y^2 = a^2$, que corresponde a una circunferencia con centro en el punto (a;0) y radio a $(a > 0)$.

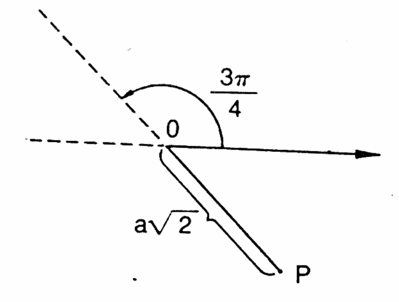


Para obtener su ecuación polar vemos que

$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = a^2 \Longleftrightarrow x^2 - 2ax + y^2 = 0 \Longleftrightarrow r^2 - 2\,ar \cos t = 0 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow r(r - 2a \cos t) = 0 \Longleftrightarrow r = 0 \vee r = 2a \cos t.$

La ecuación polar es, entonces, $r = 2a \cos t$, pues $r = 0$ es el caso particular en que $t = \frac{\pi}{2}$.

Obsérvese que si t es un ángulo del segundo o tercer cuadrante, resulta $r < 0$. Por ejemplo, $t = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow r = -a\sqrt{2}$ y el punto P está ubicado en la posición ilustrada en la siguiente figura:

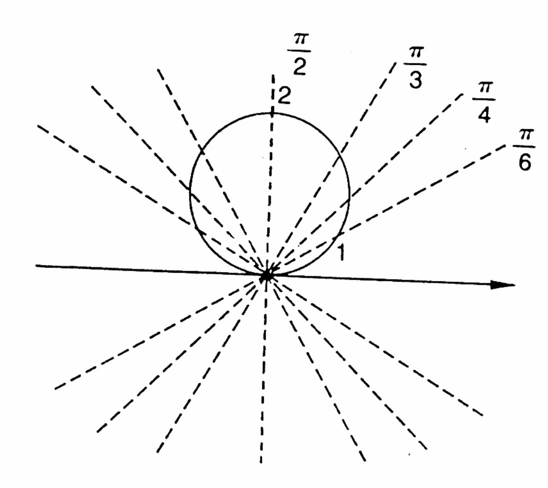


Ejemplo 4

Graficar la curva cuya ecuación polar es $r = 2 \operatorname{sen} t$.

Consideremos algunos valores:

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	....
r	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	0	-1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}$	-2	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$	-1	0	....



EJERCICIOS

1) Encontrar las coordenadas cartesianas de los puntos cuyas coordenadas polares son:

$P_1 \begin{cases} r = 2 \\ t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $\quad P_2 \begin{cases} r = 3 \\ t = 5\pi \end{cases}$ $\quad P_3 \begin{cases} r = -5 \\ t = \frac{7\pi}{6} \end{cases}$

2) Encontrar todos los pares de coordenadas polares que pueden asignarse a los puntos cuyas coordenadas cartesianas son:

$P_1 \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$ $\quad P_2 \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

3) Graficar la curva de ecuación polar $r = 2(1 - 2 \operatorname{sen} t)$.
4) Idem para $r = |2 \cos t|$.
5) Idem para $r = \operatorname{sen} 2t$.
6) Idem para $r = t$ (espiral de Arquímedes).
7) Idem para $r = 1 + \cos t$ (cardioide).
8) Encontrar la ecuación polar de la curva cuya ecuación cartesiana es $xy = 1$.
9) Idem para $x^2 + y^2 + 4y = 0$.
10) Idem para $(x^2 + y^2)^2 = 9(x^2 - y^2)$ (lemniscata de Bernoulli).
11) Idem para $y^2(4 - x) = x^3$ (cisoide de Diocles).

Respuestas a ejercicios

CAPÍTULO 3

Sección I

1) g no es función: $(c;2) \in g \wedge (c;0) \in g \wedge 2 \neq 0$
h no es función de A en B pues $D_h \neq A$

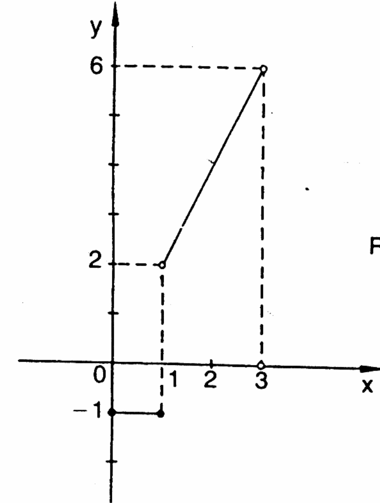
2) $f(0) = 5$, $f(3) = 5$, $f(-3) = 23$, $f(2x) = 4x^2 - 6x + 5$,
$f(x - 1) = x^2 - 5x + 9$
$h(e) = 1$, $h(1) = 0$, $h(\operatorname{sen} x) = \ln(\operatorname{sen} x)$, $h(e^x) = x$

3) $D_f = \{x / x \in R \wedge x \geq 2\}$ $\quad Rec_f = \{y / y \in R \wedge y \geq 0\}$
$D_g = R$ $\quad Rec_g = \{y / y \geq 0\}$
$D_h = \{x / x \in R \wedge |x| \geq \sqrt{3}\}$ $\quad Rec_h = \{y / y \in R \wedge y \geq 0\}$
$D_s = \{x / x \in R \wedge x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \wedge k \in Z\}$ $\quad Rec_s = R$
$D_t = \{x / x \in R \wedge x < 3\}$ $\quad Rec_t = R$
$D_m = \{x / x \in R \wedge x \neq 0\}$ $\quad Rec_m = R$
$D_q = \{x / x \in R \wedge x \neq 1\}$ $\quad Rec_q = R$
$D_p = R - \{-4\}$ $\quad Rec_p = R - \{0\}$
$D_u = R - \{0\}$ $\quad Rec_u = \{y / y < 0\}$

4) $D_f = (-\infty;1] \cup [2;+\infty)$
$D_g = R - \{-3,-2,-1\}$
$D_h = \{x / x > 2 \wedge x \neq 3\}$

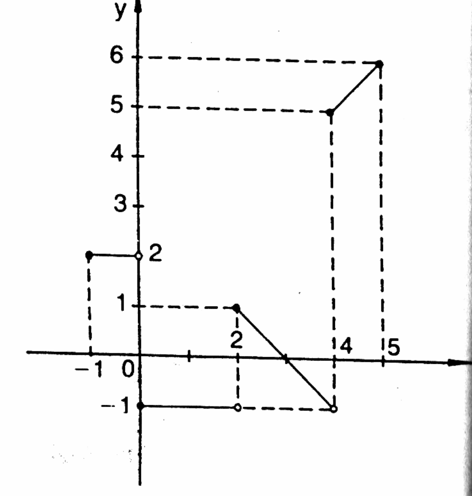
Sección II

1)



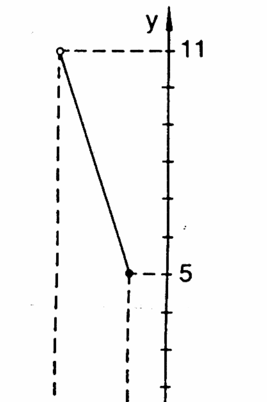
$D_f = [0;3)$

$Rec_f = \{-1\} \cup (2;6)$



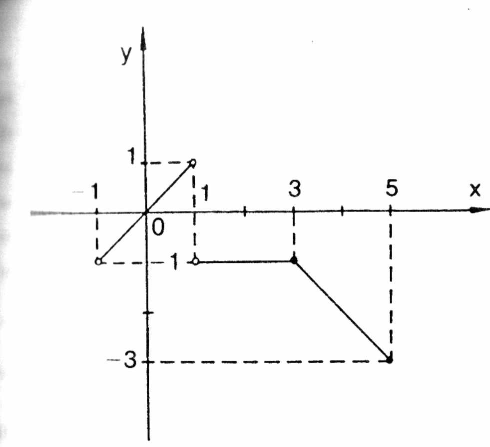
$D_g = [-1;5]$

$Rec_g = [-1;1] \cup \{2\} \cup [5;6]$



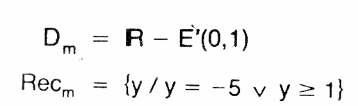
$D_h = (-3;-1] \cup [0;2)$

$Rec_h = [5;11) \cup [-3;-1)$



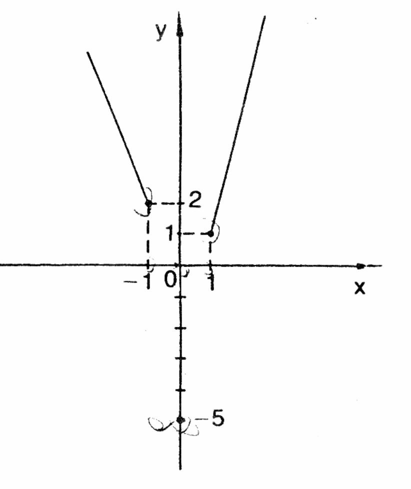
$D_l = (-1;5] - \{1\}$

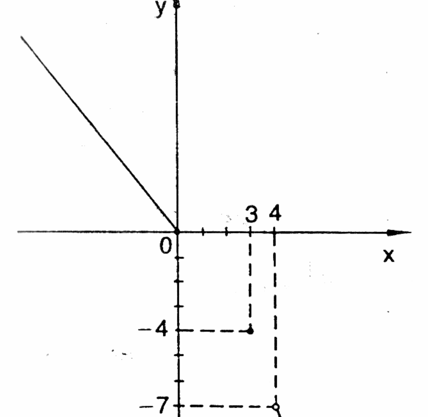
$Rec_l = [-3;1)$



$D_m = \mathbb{R} - E'(0,1)$

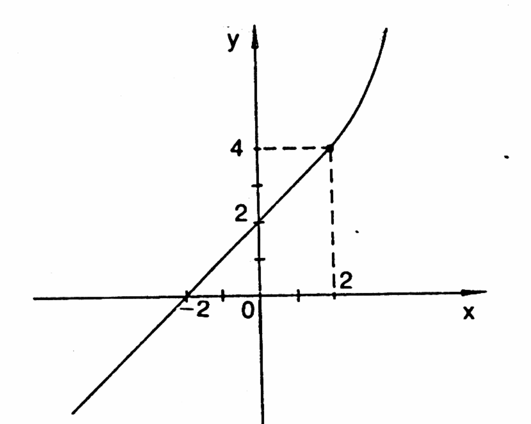
$Rec_m = \{y \,/\, y = -5 \vee y \geq 1\}$





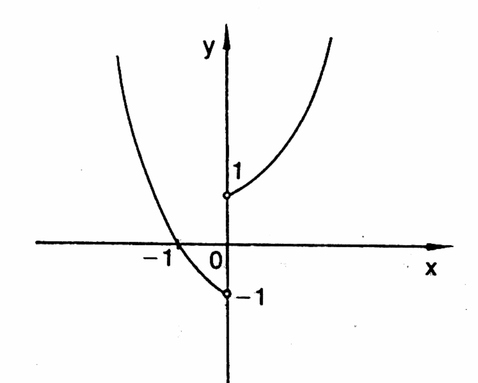
$D_n = (-\infty;\ 0] \cup \{3\} \cup (4;+\infty)$

$Rec_n = (-\infty;-7) \cup \{-4\} \cup [0;+\infty)$



$D_t = \mathbb{R}$

$Rec_t = \mathbb{R}$



$D_u = \mathbb{R} - \{0\}$

$Rec_u = \{y \,/\, y > -1\}$

2) a) $f(x) = (5 - x^2) + (\text{sen } 3x + x)$ b) $f(x) = (\text{ch } x - 3) + (x - \text{sh } x)$

Sección III

2) Intersección del gráfico de f con ambos ejes en (0;0)

g: intersección con eje x en $\left(\frac{1}{4};0\right)$, con eje y en $(0;-1)$

h: intersección con eje x en $\left(-\frac{10}{3};0\right)$, con eje y en $(0;5)$

m: intersección con eje x en (2;0), con eje y en (0;4)

n: intersección con eje x en (6;0), con eje y en (0;2)

t: intersección con eje x en (−2;0), con eje y en (0;−2)

3)

$f(x) = (x-3)^2 + 5$	eje: $x = 3$	vértice: (3;5)
$g(x) = -(x-2)^2 + 3$	eje: $x = 2$	vértice: (2;3)
$h(x) = (x+5)^2 - 2$	eje: $x = -5$	vértice: (−5;−2)
$m(x) = -x^2 + 3$	eje: $x = 0$	vértice: (0;3)
$n(x) = -(x-1)^2 + 3$	eje: $x = 1$	vértice: (1;3)
$t(x) = (x+3)^2 + 2$	eje: $x = -3$	vértice: (−3;2)
$r(x) = 2(x-3)^2 + 4$	eje: $x = 3$	vértice: (3;4)
$s(x) = \frac{1}{3}(x+6)^2 - 1$	eje: $x = -6$	vértice: (−6;−1)
$p(x) = -2(x-1)^2 + 5$	eje: $x = 1$	vértice: (1;5)

4) Intersecciones del gráfico de g con el eje x: (1;0), (3;0), (−2;0).
con el eje y: (0;6).
Intersecciones del gráfico de h con el eje x: (3;0), (−3;0), (−4;0).
con el eje y: (0;−36).
Intersecciones del gráfico de m con el eje x: (−1;0), (1;0), (−3;0).
con el eje y: (0;−3).
Intersecciones del gráfico de n con el eje x: (0;0), (4;0), (−4;0).
con el eje y: (0;0).
Intersecciones del gráfico de t con el eje x: (2;0), (−1;0).
con el eje y: (0;4).
Intersecciones del gráfico de r con el eje x: (2;0), (−2;0), (1;0).
con el eje y: (0;4).
Intersecciones del gráfico de s con el eje x: (0;0), (1;0), (−5;0).
con el eje y: (0;0).

5)

$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$	$Rec_f = \mathbb{R} - \{1\}$	$x = 2$	es asintota vertical
		$y = 1$	es asintota horizontal
$D_g = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$	$Rec_g = \mathbb{R} - \{2\}$	$x = -\frac{1}{2}$	es asintota vertical
		$y = 2$	es asintota horizontal
$D_h = \mathbb{R} - \{-4\}$	$Rec_h = \mathbb{R} - \{3\}$	$x = -4$	es asintota vertical
		$y = 3$	es asintota horizontal
$D_m = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{4}\right\}$	$Rec_m = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$	$x = -\frac{1}{4}$	es asintota vertical
		$y = \frac{1}{2}$	es asintota horizontal

6)

$D_f = \mathbb{R} - \{3\}$	$x = 3$ es asíntota vertical
$D_g = \mathbb{R} - \{-5\}$	El gráfico es el de la recta $y = x - 5$ excluido el punto (−5;−10)
$D_t = \mathbb{R} - \{4, -4\}$	$x = -4$ es asíntota vertical
$D_l = \mathbb{R}$	$y = 0$ es asíntota horizontal
$D_s = \mathbb{R} - \{2\}$	$x = 2$ es asíntota vertical
	$y = 0$ es asíntota horizontal

7) $D_f = \mathbb{R} - \{-3,1\}$ $\quad Rec_f = \mathbb{R} - \left\{0, \frac{1}{4}\right\}$ $\quad$ asíntota vertical: $x = -3$

$D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$ $\quad Rec_g = \{y / y \geq -1\}$ $\quad g(x) = x^2 - 1 \wedge x \neq -1$

$D_h = \mathbb{R} - \{2\}$ $\quad Rec_h = \mathbb{R} - \{3\}$ $\quad h(x) = x + 1 \wedge x \neq 2$

$D_l = \mathbb{R} - \{1\}$ $\quad Rec_l = \{y / y \geq 1\}$ $\quad l(x) = x^2 + 1 \wedge x \neq 1$

$D_m = \mathbb{R} - \left\{0, \frac{3}{2}\right\}$ $\quad Rec_m = \mathbb{R} - \left\{0, -\frac{1}{3}\right\}$ $\quad$ asíntota vertical: $x = \frac{3}{2}$

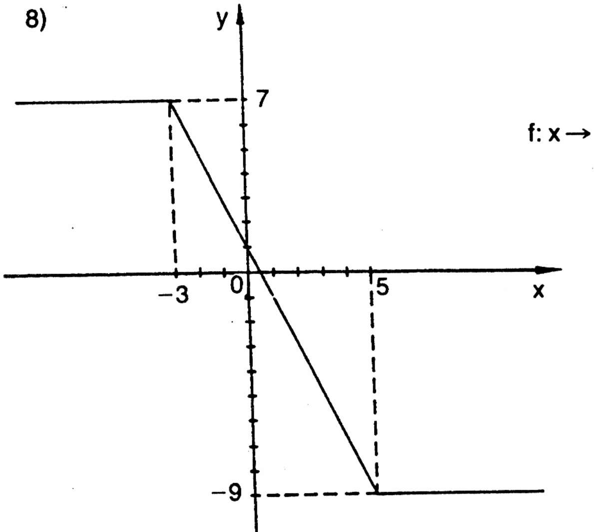
$D_n = \mathbb{R} - \{0,1,-1\}$ $\quad Rec_n = \mathbb{R} - [-1;0]$ $\quad x = 1,\ x = -1$ son asíntotas verticales

$D_s = \mathbb{R} - \{1,-2\}$ $\quad Rec_s = \mathbb{R}$ $\quad x = 1,\ x = -2$ son asíntotas verticales

$D_t = \mathbb{R} - \{4,1\}$ $\quad Rec_t = \mathbb{R} - \{1\}$ $\quad x = 1$ es asíntota vertical

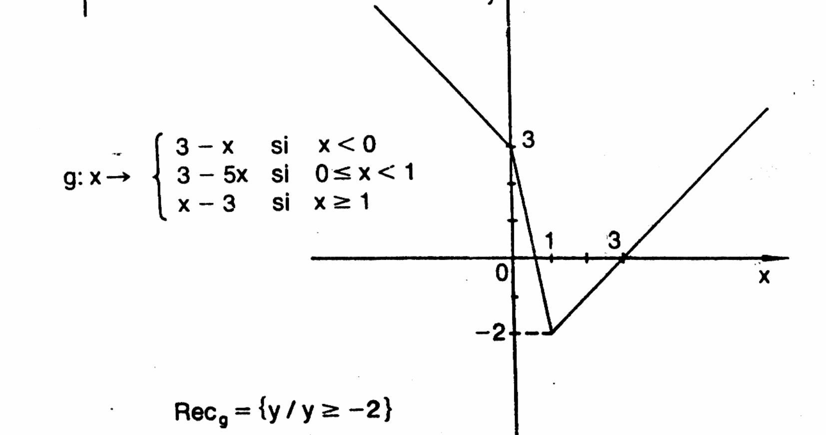
$D_p = \mathbb{R} - \{3,-2\}$ $\quad Rec_p = \mathbb{R}$ $\quad x = -2,\ x = 3$ son asíntotas verticales

8)



$$f: x \rightarrow \begin{cases} 7 & \text{si } x < -3 \\ 1 - 2x & \text{si } -3 \leq x < 5 \\ -9 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

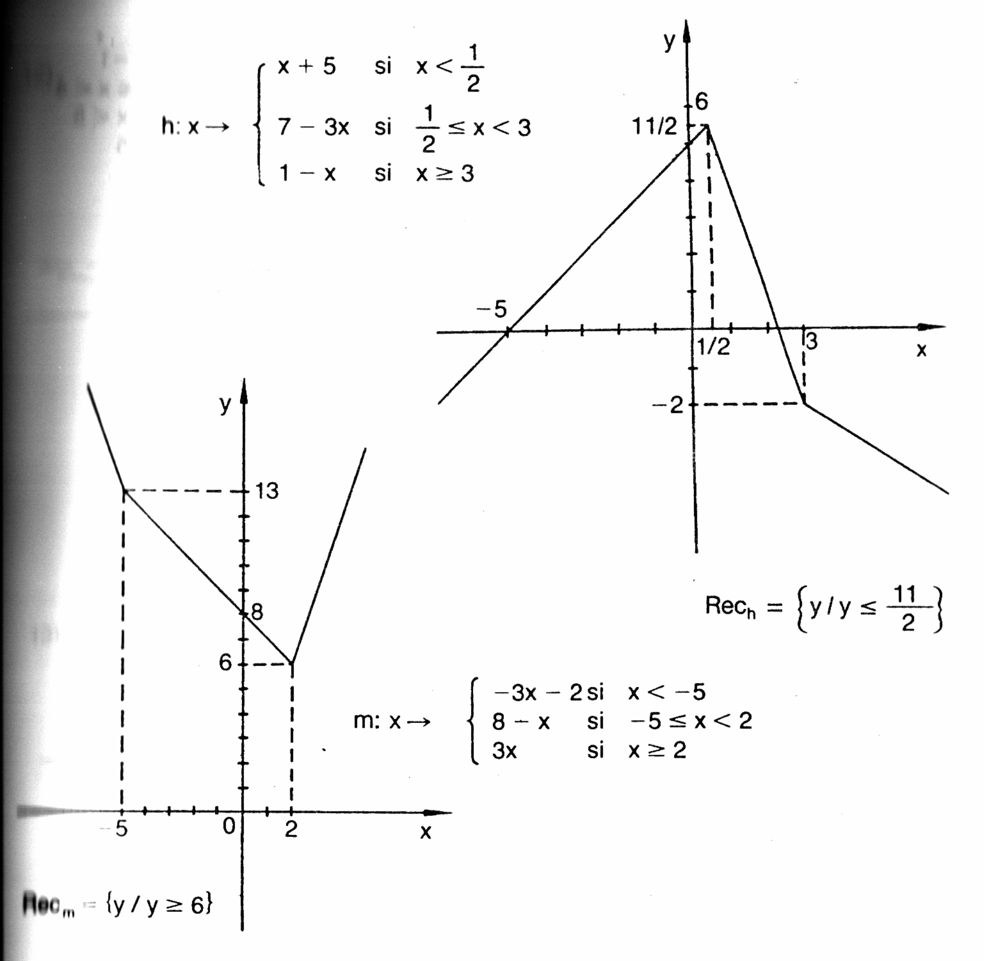
$Rec_f = [-9; 7]$



$$g: x \rightarrow \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < 0 \\ 3 - 5x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x - 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$Rec_g = \{y / y \geq -2\}$

$$h: x \rightarrow \begin{cases} x + 5 & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ 7 - 3x & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 3 \\ 1 - x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

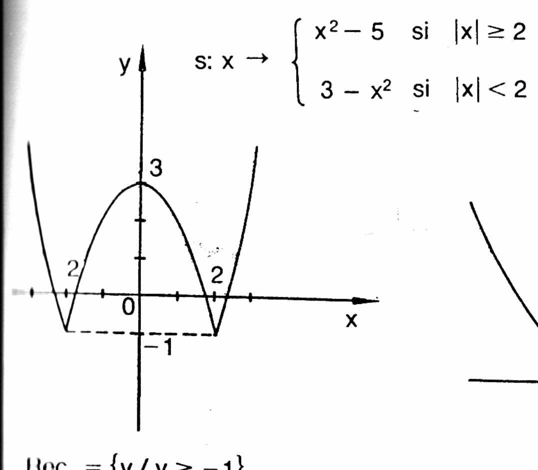


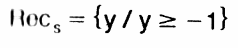
$Rec_h = \left\{y / y \leq \frac{11}{2}\right\}$

$$m: x \rightarrow \begin{cases} -3x - 2 & \text{si } x < -5 \\ 8 - x & \text{si } -5 \leq x < 2 \\ 3x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$Rec_m = \{y / y \geq 6\}$

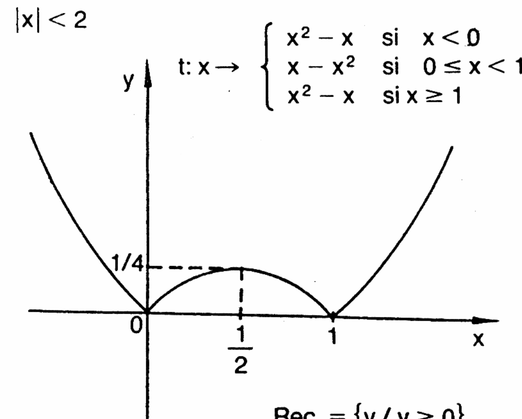
$$s: x \rightarrow \begin{cases} x^2 - 5 & \text{si } |x| \geq 2 \\ 3 - x^2 & \text{si } |x| < 2 \end{cases}$$





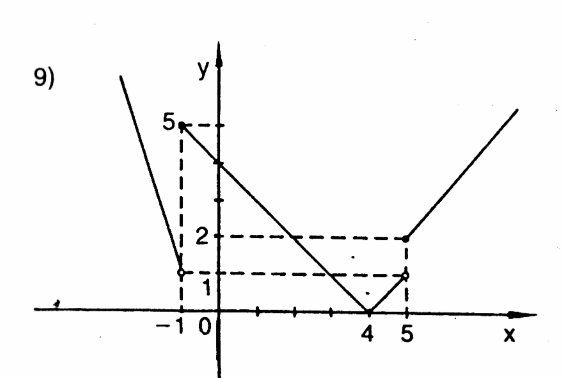
$Rec_s = \{y / y \geq -1\}$

$$t: x \rightarrow \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x < 0 \\ x - x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x^2 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$



$Rec_t = \{y / y \geq 0\}$

9)

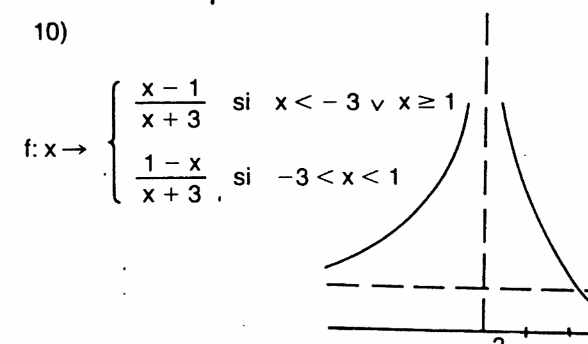


$$f: x \rightarrow \begin{cases} -2x - 1 & \text{si} \quad x < -1 \\ 4 - x & \text{si} \quad -1 \leq x < 4 \\ x - 4 & \text{si} \quad 4 \leq x < 5 \\ x - 3 & \text{si} \quad x \geq 5 \end{cases}$$

$Rec_f = \{y \,/\, y \geq 0\}$

10)

$$f: x \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{x+3} & \text{si} \quad x < -3 \vee x \geq 1 \\ \dfrac{1-x}{x+3} & \text{si} \quad -3 < x < 1 \end{cases}$$



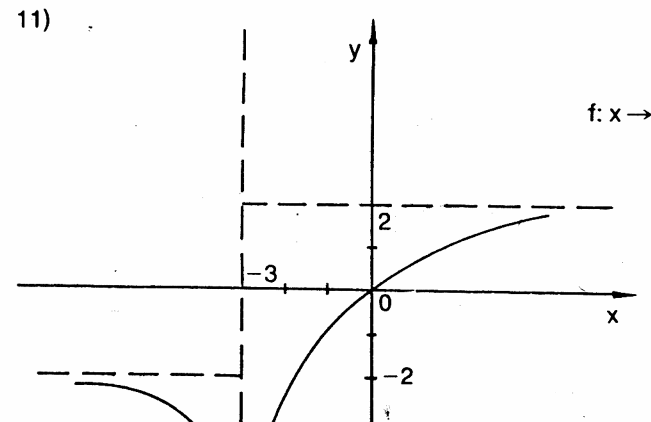
int. eje x: (1; 0)

int. eje y: $\left(0; \frac{1}{3}\right)$

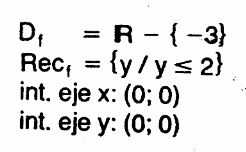
$D_f \ = \mathbb{R} - \{-3\}$

$Rec_f = \{y/y \geq 0\}$

11)



$$f: x \rightarrow \begin{cases} \dfrac{2x}{x+3} & \text{si} \quad x > -3 \\ \dfrac{-2x}{x+3} & \text{si} \quad x < -3 \end{cases}$$



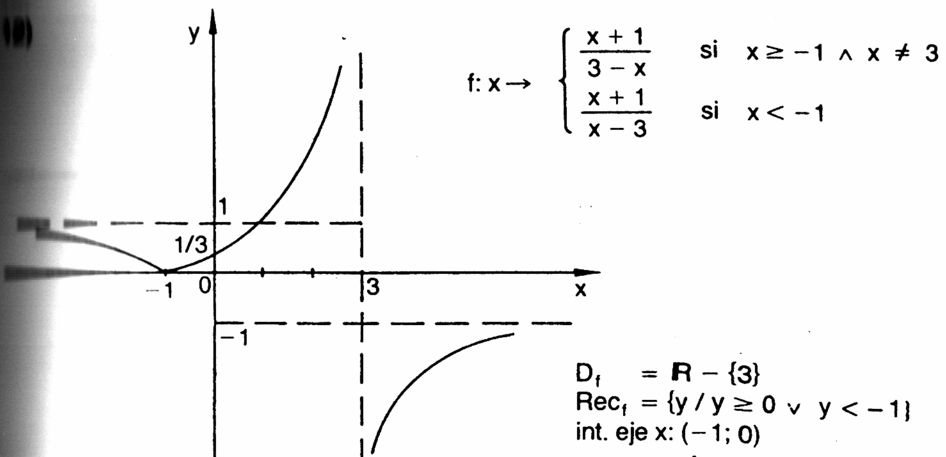
$D_f \ = \mathbb{R} - \{-3\}$

$Rec_f = \{y \,/\, y \leq 2\}$

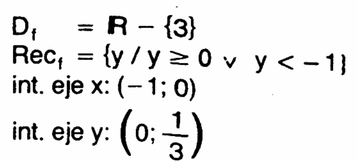
int. eje x: (0; 0)

int. eje y: (0; 0)

12)



$$f: x \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{3-x} & \text{si} \quad x \geq -1 \wedge x \neq 3 \\ \dfrac{x+1}{x-3} & \text{si} \quad x < -1 \end{cases}$$



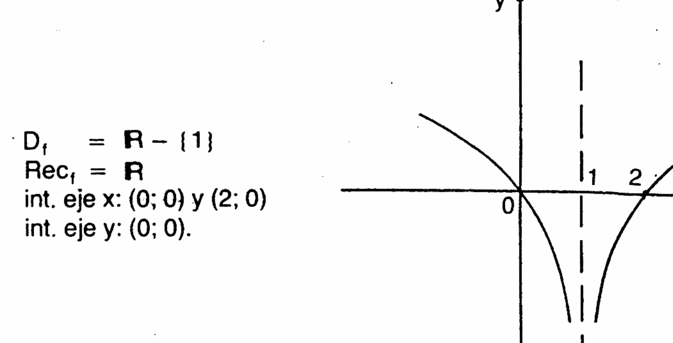
$D_f \ = \mathbb{R} - \{3\}$

$Rec_f = \{y \,/\, y \geq 0 \vee y < -1\}$

int. eje x: (−1; 0)

int. eje y: $\left(0; \frac{1}{3}\right)$

13)



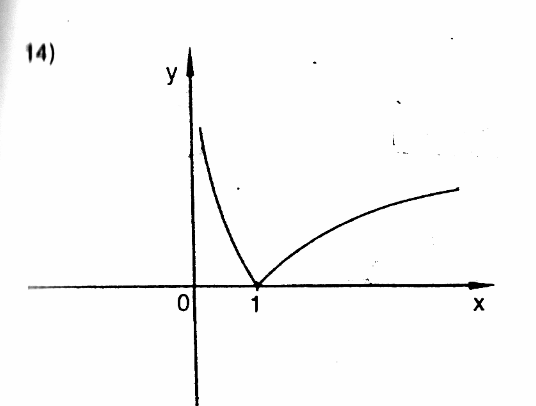
$D_f \ = \mathbb{R} - \{1\}$

$Rec_f = \mathbb{R}$

int. eje x: (0; 0) y (2; 0)

int. eje y: (0; 0).

14)

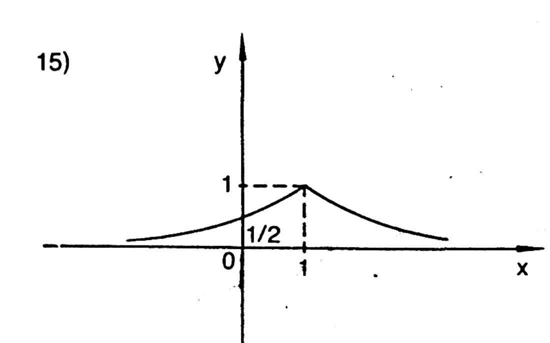


$D_f \ = \mathbb{R}^+$

$Rec_f = \{y \,/\, y \geq 0\}$

int. eje x: (1; 0)

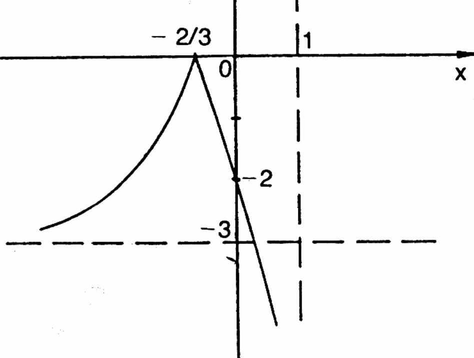
15)



$D_f = \mathbb{R}$
$Rec_f = (0; 1)$
int. eje y: $\left(0; \frac{1}{2}\right)$

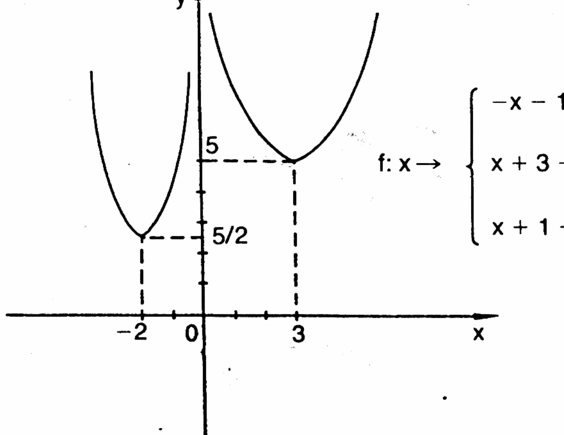
16)

$$f: x \to \begin{cases} \dfrac{3x+2}{1-x} & \text{si } x < -\dfrac{2}{3} \vee x > 1 \\ \dfrac{3x+2}{x-1} & \text{si } -\dfrac{2}{3} \le x < 1 \end{cases}$$



$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$
$Rec_f = \{y / y \le 0\}$
int. eje x: $\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$
int. eje y: $(0; -2)$

17)

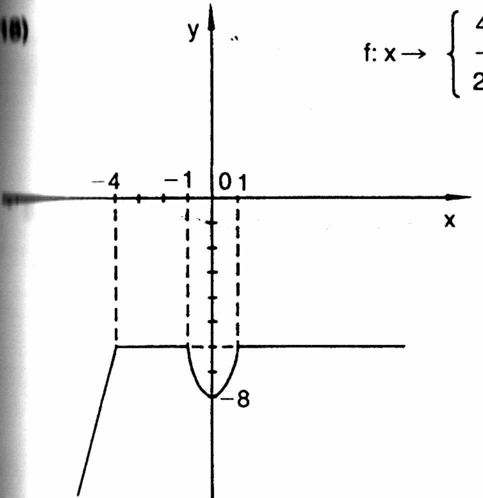


$$f: x \to \begin{cases} -x - 1 - \dfrac{3}{x} & \text{si } x < -2 \\ x + 3 - \dfrac{3}{x} & \text{si } -2 \le x < 0 \vee x \ge 3 \\ x + 1 + \dfrac{3}{x} & \text{si } 0 < x < 3 \end{cases}$$

$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

$Rec_f = \left\{y / y \ge \frac{5}{2}\right\}$

18)



$$f: x \to \begin{cases} 4x + 10 & \text{si } x < -4 \\ -6 & \text{si } -4 \le x < -1 \vee x \ge 1 \\ 2x^2 - 8 & \text{si } -1 \le x < 1 \end{cases}$$

$D_f = \mathbb{R}$
$Rec_f = \{y / y \le -6\}$
int. eje y: $(0; -8)$

Sección IV

1) f es función inyectiva de Z en Z, pero no es suryectiva. Es biyectiva sobre Q y sobre $\mathbb{R}$. Idem para g.

h no es biyectiva.

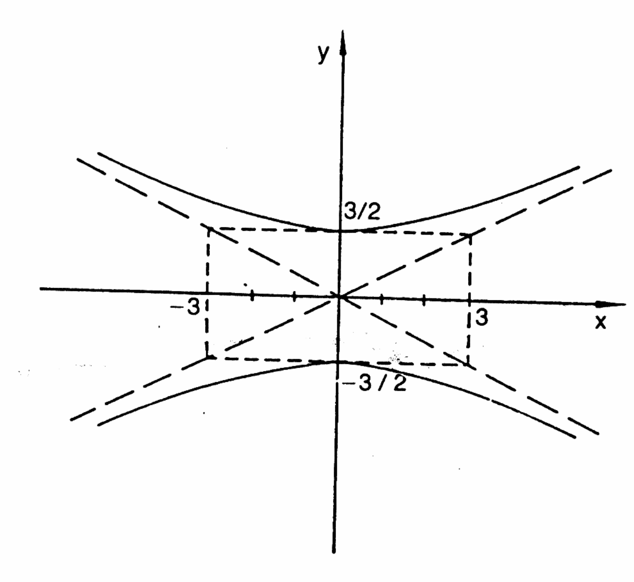
2) $f^{-1}: x \to \text{arc cos } x$; $\quad g^{-1}: x \to x^2 + 1 \; (x \ge 0)$; $\quad h^{-1}: x \to 10^x$.

t no es biyectiva.

3)

$t^{-1}: x \to \dfrac{x+3}{5x-2}$	$D_t = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{5}\right\}$	$Rec_t = \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{5}\right\}$
$s^{-1}: x \to \dfrac{2+3x}{1-x}$	$D_s = \mathbb{R} - \{-3\}$	$Rec_s = \mathbb{R} - \{1\}$
$\ell^{-1}: x \to \sqrt{\dfrac{5}{x} - 1}$	$D_\ell = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge x \ge 0\}$ $Rec_\ell = \{y / y \in \mathbb{R} \wedge 0 < y \le 5\}$	
$m^{-1}: x \to \dfrac{1+3x}{2-x}$	$D_m = \mathbb{R} - \{-3\}$	$Rec_m = \mathbb{R} - \{2\}$
$n^{-1}: x \to \dfrac{1}{x}$	$D_n = \mathbb{R} - \{0\}$	$Rec_n = \mathbb{R} - \{0\}$
$u^{-1}: x \to \dfrac{1-3x}{x}$	$D_u = \mathbb{R} - \{-3\}$	$Rec_u = \mathbb{R} - \{0\}$
$r^{-1}: x \to \dfrac{4x+1}{4-2x}$	$D_r = \mathbb{R} - \{-2\}$	$Rec_r = \mathbb{R} - \{2\}$

4)



a) no es función, pues, por ejemplo: $\left(0; \frac{3}{2}\right) \in \mathcal{R} \wedge \left(0; -\frac{3}{2}\right) \in \mathcal{R} \wedge \frac{3}{2} \neq -\frac{3}{2}$

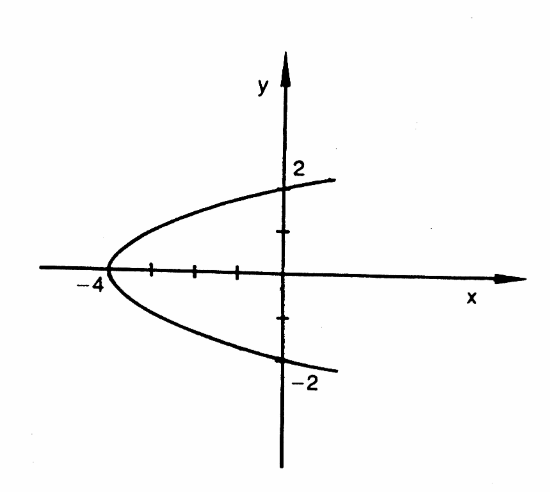
b) por ejemplo, $f = \left\{(x;y) / y = \frac{1}{2}\sqrt{9+x^2}\right\}$ $D_f = \mathbb{R}$ $Rec_f = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$

c) f no es inyectiva, pues $\left(4; \frac{5}{2}\right) \in f \wedge \left(-4; \frac{5}{2}\right) \in f \wedge 4 \neq -4$

d) $g = \left\{(x;y) / y = \frac{1}{2}\sqrt{9+x^2} \wedge x \geq 0\right\}$ $D_g = \{x / x \geq 0\}$

$Rec_g = \left\{y / y \geq \frac{3}{2}\right\}$ $g^{-1} = \left\{(x;y) / y = 4x^2 - 9 \wedge \geq \frac{3}{2}\right\}$

5)



a) no es función con variable x, pues $(0;2) \in \mathcal{R} \wedge (0;-2) \in \mathcal{R} \wedge 2 \neq -2$

b) $f = \left\{(x;y) / y = \sqrt{x+4}\right\}$ $D_f = \{x / x \geq -4\}$ $Rec_f = \{y / y \geq 0\}$

c) no $\exists$. Todas las restricciones funcionales son inyectivas.

d) f es biyectiva. $f^{-1} = \{(x;y) / y = x^2 - 4 \wedge x \geq 0\}$

Sección V

1) a) $D_f = Rec_f = \mathbb{R}$ $D_g = Rec_g = \mathbb{R}$

$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = D_{g \circ f} = D_{f \circ g} = \mathbb{R}$

$D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

$D_{\frac{g}{f}} = \mathbb{R} - \{-3\}$

$(f \circ g)(x) = 2x + 2 \mid (g \circ f)(x) = 2x + 5$

b) $D_f = \{x / x \geq 0\}$ $Rec_f = \{y / y \geq 0\}$

$D_g = \mathbb{R}$ $Rec_g = \mathbb{R}$

$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = D_{g \circ f} = D_{f \circ g} = \{x / x \geq 0\}$

$D_{\frac{f}{g}} = D_{\frac{g}{f}} = \{x / x > 0\}$

$(f \circ g)(x) = \sqrt{x^3}$ $(g \circ f)(x) = \left(\sqrt{x}\right)^3$

c) $D_f = \{x / x > 0\}$ $Rec_f = \mathbb{R}$ $D_g = \{x / x \geq 0\}$ $Rec_g = \{y / y \geq 0\}$

$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = D_{\frac{f}{g}} = D_{f \circ g} = \{x / x > 0\}$ $D_{g \circ f} = \{x / x \geq 1\}$

$D_{\frac{g}{f}} = \{x / x > 0 \wedge x \neq 1\}$ $(f \circ g)(x) = \ln\sqrt{x}$ $(g \circ f)(x) = \sqrt{\ln x}$

d) $D_f = [-3;3]$ $Rec_f = [-3;3]$ $D_g = \{x / |x| \geq 5\}$ $Rec_g = \mathbb{R}$

$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = D_{\frac{f}{g}} = D_{\frac{g}{f}} = D_{g \circ f} = \phi$

$D_{f \circ g} = [-\sqrt{34}; \sqrt{34}]$ $(f \circ g)(x) = \sqrt{34 - x^2}$

e) $D_f = \mathbb{R}$ $Rec_f = \{y / y \geq 2\}$ $D_g = \{x / x > 2\}$ $Rec_g = \mathbb{R}$

$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = D_{\frac{g}{f}} = D_{f \circ g} = \{x / x > 2\}$

$D_{\frac{f}{g}} = \{x / x > 2 \wedge x \neq 3\}$ $D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \{0\}$ $(f \circ g)(x) = \ln^2(x-2) + 2$

$(g \circ f)(x) = \ln x^2$

2) a) $(f \circ g)(x) = 2 \operatorname{sen} x + 1$ $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$

$(g \circ f)(x) = \operatorname{sen}(2x + 1)$ $D_{g \circ f} = \mathbb{R}$

b) $(f \circ g)(x) = \operatorname{tg}(2x - 3)$ $\qquad D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \left\{x / x = (2k+1)\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} \wedge k \in Z\right\}$

$(g \circ f)(x) = 2 \operatorname{tg} x - 3$ $\qquad D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \left\{x / x = \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge k \in Z\right\}$

c) $(f \circ g)(x) = \ln x^2$ $\qquad D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \{0\}$

$(g \circ f)(x) = \ln^2 (x - 3) + 3$ $\qquad D_{g \circ f} = \{x / x > 3\}$

d) $(f \circ g)(x) = \ln(\sqrt{x} - 2)$ $\qquad D_{f \circ g} = \{x / x > 4\}$

$(g \circ f)(x) = \sqrt{\ln (x - 2)}$ $\qquad D_{g \circ f} = \{x / x \geq 3\}$

e) $(f \circ g)(x) = \ln(\sqrt{x + 3} - 1)$ $\qquad D_{f \circ g} = \{x / x > -2\}$

$(g \circ f)(x) = \sqrt{\ln (x - 1) + 3}$ $\qquad D_{g \circ f} = \{x / x \geq 1 + e^{-3}\}$

h) $(f \circ g)(x) = \operatorname{sen}[\ln (x^2 - 1)]$ $\qquad D_{f \circ g} = \{x / |x| > 1\}$

$(g \circ f)(x) = \ln (\operatorname{sen}^2 x - 1)$ $\qquad D_{g \circ f} = \phi$

m) $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{(x+3)^2} - 1$ $\qquad D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \{-3\}$

$(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2}$ $\qquad D_{g \circ f} = \mathbb{R}$

s) $(f \circ g)(x) = \ln^2 (x + 1) - 2$ $\qquad D_{f \circ g} = \{x / x > -1\}$

$(g \circ f)(x) = \ln (x^2 - 1)$ $\qquad D_{g \circ f} = \{x / |x| > 1\}$

3) a) $D_{f \circ g} = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge x \neq n\pi \wedge n \in Z\}$

$Rec_{f \circ g} = \{y / y \leq 0\}$

b) $D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \{2{,}4\}$

$Rec_{f \circ g} = \{1, -1\}$

c) $D_{f \circ g} = \mathbb{R} - Z$ $\qquad Rec_{f \circ g} = \{y / y \geq 1\}$

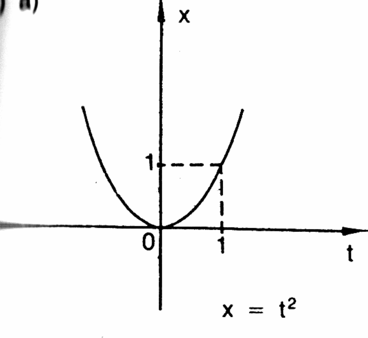
d) $D_{f \circ g} = (-1;5)$ $\qquad Rec_{f \circ g} = \{y / y < \ln 3\}$

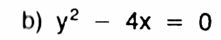
e) $D_{f \circ g} = \mathbb{R} - (0;6)$ $\qquad Rec_{f \circ g} = \{y / y \geq 0\}$

4) $A = \{x / x \geq 1\}$ $\qquad B = \{y / y \geq 0\}$ $\qquad f^{-1}(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ (es un ejemplo)

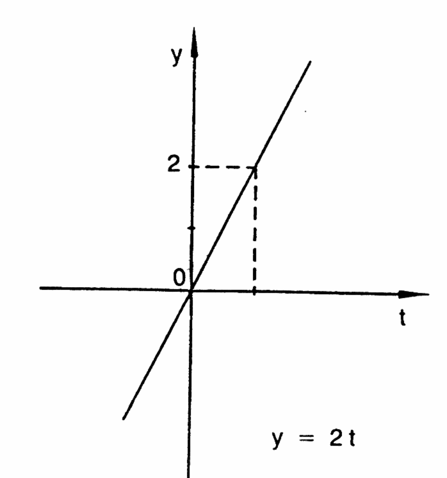
5) $A = \{x / x \geq 0\}$ $\qquad B = \{y / y \leq 1\}$ $\qquad f^{-1}(x) = \sqrt[4]{1 - x^3}$ (es un ejemplo)

1) a)





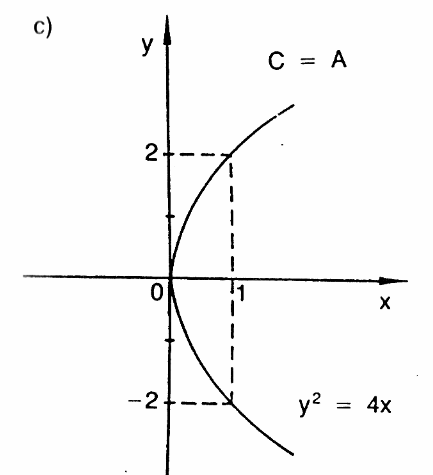
$x = t^2$



$y = 2t$

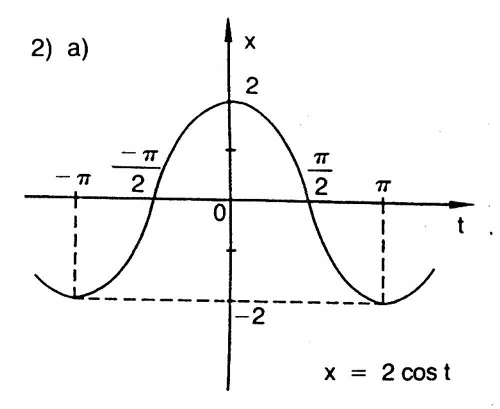
b) $y^2 - 4x = 0$

c)

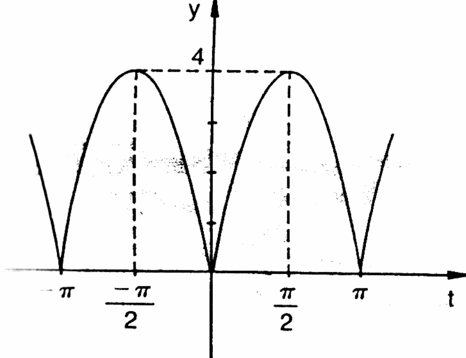
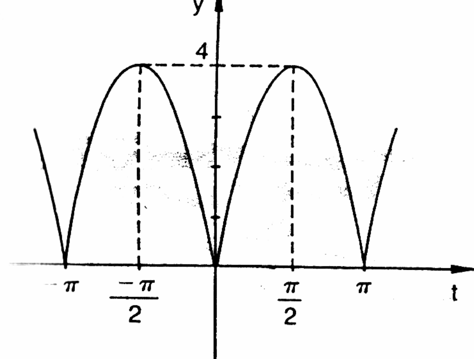


$y^2 = 4x$

2) a)



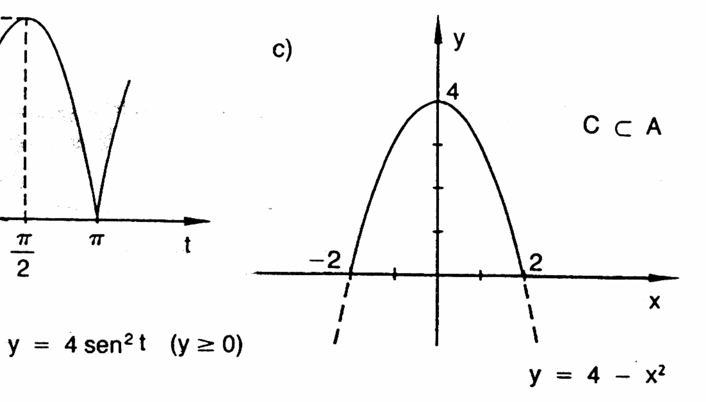
$x = 2 \cos t$

$y = 4 \operatorname{sen}^2 t \quad (y \geq 0)$

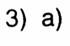
b) $x^2 + y - 4 = 0$

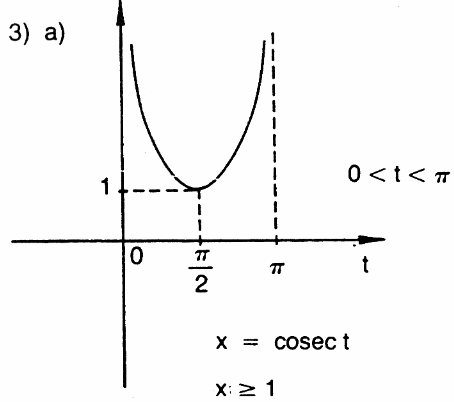
c)

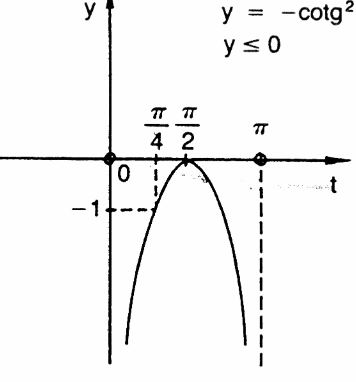


$y = 4 - x^2$

3) a)



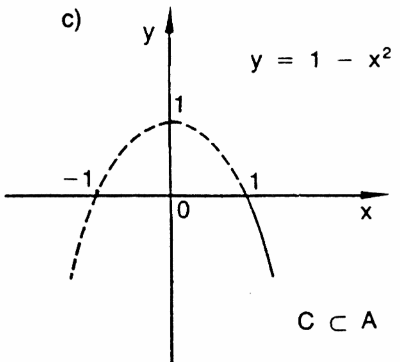


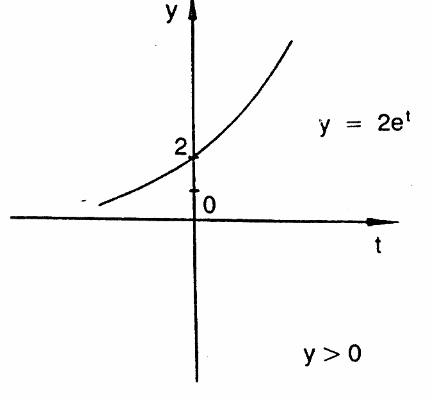


b) $x^2 + y - 1 = 0$

c)

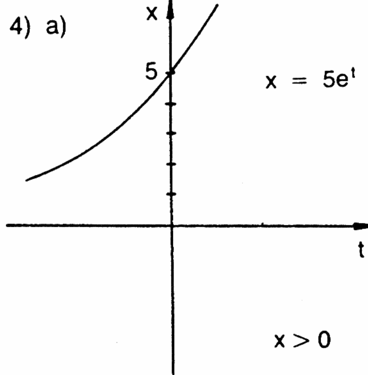






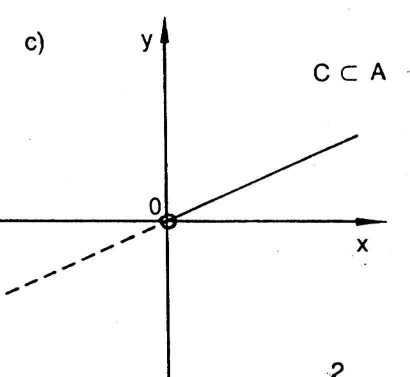
b) $5y - 2x = 0$

4) a)

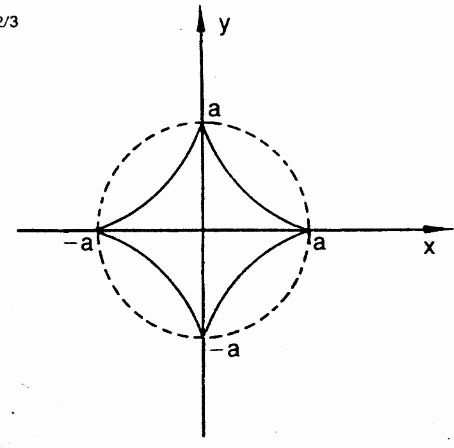


c)





5) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

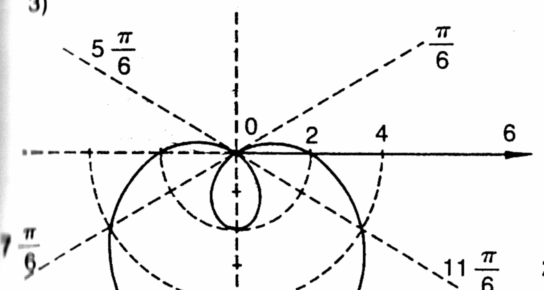


Sección VII

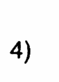
1) $P_1 = (0;2)$ $P_2 = (-3;0)$ $P_3 = \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}; \frac{5}{2}\right)$

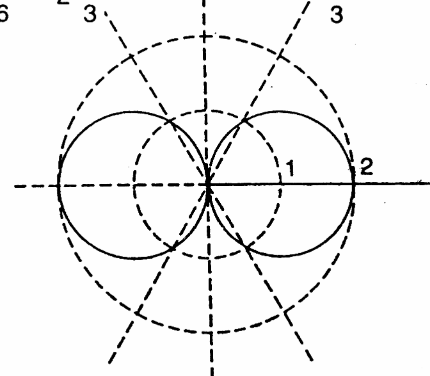
2) $P_1: \begin{cases} \left(2\sqrt{2}\,; \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \\ \left(-2\sqrt{2}\,; \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right) \end{cases}$ $P_2: \begin{cases} \left(1; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) \\ \left(-1; \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right) \end{cases}$

3)

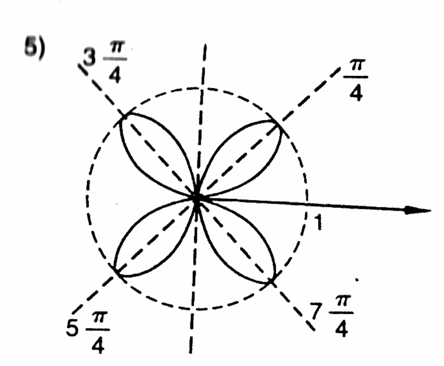


4)

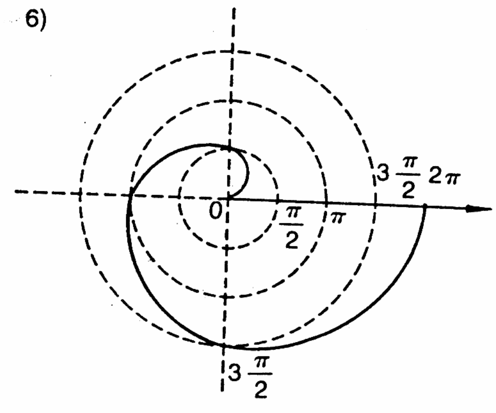




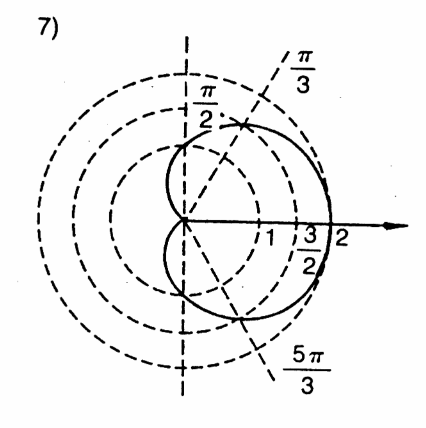
5)



6)



7)



8) $r^2 = 2 \operatorname{cosec} 2t$

9) $r = -4 \operatorname{sen} t$

10) $r^2 = 9 \cos 2t$

11) $r = 4 \operatorname{sen} t \operatorname{tg} t$

4. LÍMITE FUNCIONAL

La idea de límite aparece intuitivamente en muchas situaciones. En geometría elemental se define la longitud de una circunferencia como el "límite" a que tiende una sucesión de perímetros de polígonos inscriptos en ella (o circunscriptos), cuando la longitud de cada lado tiende a cero. La misma idea se utiliza para definir el área de un círculo mediante áreas de polígonos inscriptos o circunscriptos. En física, para definir la velocidad instantánea, se recurre al "límite" de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo considerado se hace cada vez menor.

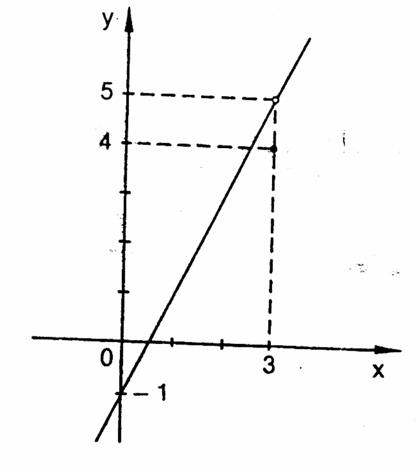
Estas ideas sólo pueden hacerse precisas mediante la definición previa de límite de sucesiones y de límite de funciones, siendo el primero un caso particular del segundo.

En este capítulo nos ocuparemos solamente de límite funcional.

I. Límite finito

Nos interesa ver en qué condiciones los valores de una función escalar se aproximan a un número real determinado cuando los puntos del dominio se acercan a un punto a, que puede o no pertenecer a dicho dominio.

Consideremos la función f definida de la siguiente manera:



$$f: x \to \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x \neq 3 \\ 4 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

El gráfico de f consiste en el punto aislado (3;4) y en una recta de la cual se ha excluido el punto (3;5).

Calcularemos algunos valores de la función en un entorno reducido del punto 3, es decir, sin preocuparnos por lo que sucede en dicho punto.

x	2,8	2,9	2,99	2,999	...	3	...	3,001	3,01	3,1	3,2
f(x)	4,6	4,8	4,98	4,998	...	▨	...	5,002	5,02	5,2	5,4

Los valores de la función f se acercan al número 5 cuando los valores de x se acercan al número 3. Aún más, la función puede alcanzar cualquier valor próximo a 5 con tal de considerar x suficientemente próximo a 3.

Si se desea, por ejemplo, que el valor absoluto de la diferencia entre 5 y f(x) sea menor que un diezmilésimo, podemos considerar las siguientes proposiciones:

$$|f(x)-5| < 0{,}0001$$
$$\Leftrightarrow |(2x-1)-5| < 0{,}0001$$
$$\Leftrightarrow |2x-6| < 0{,}0001$$
$$\Leftrightarrow |2(x-3)| < 0{,}0001$$
$$\Leftrightarrow |2|\,|x-3| < 0{,}0001$$
$$\Leftrightarrow |x-3| < \frac{0{,}0001}{2}$$
$$\Leftrightarrow |x-3| < 0{,}00005$$

Por lo tanto, $0 < |x-3| < 0{,}00005 \Rightarrow |f(x)-5| < 0{,}0001$.
En efecto,

x	2,99995	....	3	....	3,00005
f(x)	4,9999	....	▨	....	5,0001

y para valores de x en el entorno reducido de 3 de radio 0,00005, los valores correspondientes de f se encuentran en el entorno de 5 de radio 0,0001.

Obsérvese que se eligió *primero* el número 0,0001 y, a partir de ese número, se obtuvo el número 0,00005.

En general, para cualquier número $\epsilon > 0$ basta considerar $\delta = \frac{\epsilon}{2}$, pues

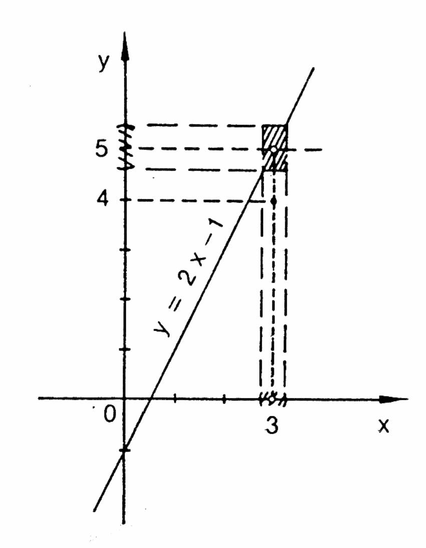
$$0 < |x-3| < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow 2|x-3| < \epsilon \Rightarrow |2x-6| < \epsilon \Rightarrow |(2x-1)-5| < \epsilon.$$

Para indicar que los valores de la función f se aproximan al número 5 cuando x se aproxima a 3, se utiliza el simbolismo: $\lim_3 f(x) = 5$, que se lee "el límite de los valores de f en 3 es 5".

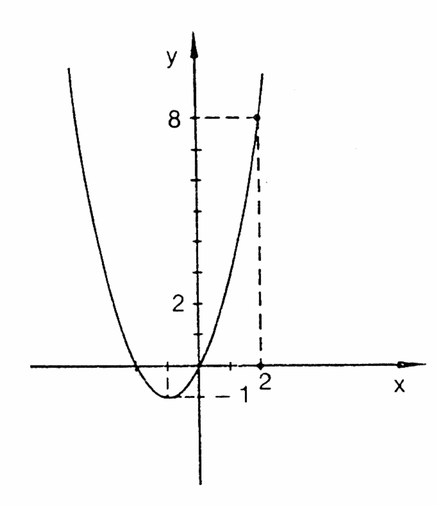
O bien, $f(x) \to 5$ si $x \to 3$, que se lee "f(x) tiende a 5 si x tiende a 3".

Otro símbolo equivalente, menos utilizado, es $\ell_3 f = 5$.

La expresión más utilizada es "la función f tiene límite 5 en el punto 3".



Consideremos ahora la función $h: x \to \frac{x^3-4x}{x-2}$



Esta función no está definida en x = 2, pero sus valores se aproximan al número 8 cuando x se acerca a 2.

Puede probarse que $\lim_2 h(x) = 8$.

Precisaremos los conceptos anteriores mediante la siguiente definición.

Definición

El número ℓ es el límite de los valores de la función f en el punto a si y sólo si:
1) a es punto de acumulación del dominio de f;
2) para cualquier número positivo ϵ existe un número positivo δ, tal que:

$$\forall x: (x \in D_f \wedge 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon).$$

O sea, $\lim f_a(x) = \ell \Leftrightarrow$ 1) a punto de acumulación de D_f;

2) $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 / \forall x: (x \in D_f \wedge 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon)$.

En general, el número δ depende de ϵ. Hallado un número δ que satisfaga la condición, cualquier número positivo $\delta' < \delta$ también la satisface. Además, un número δ que sirve para cierto ϵ, servirá también para cualquier número mayor que ϵ, pero nada se podrá asegurar respecto de uno menor.

En el caso que estamos considerando, donde el límite es finito, interesa especialmente "ϵ tan pequeño como se quiera".

◆ En la definición de límite se exige además que el punto a sea de acumulación del dominio, para evitar que la definición de límite se satisfaga trivialmente en puntos aislados.

En efecto, si a no es punto de acumulación del dominio de f, existe algún entorno reducido de a al cual no pertenece ningún punto de dicho dominio. En ese caso, el antecedente de la definición de límite resulta falso y la implicación verdadera. Pero esto no corresponde a la idea intuitiva de "acercarse al punto a tanto como se quiera".

En cambio, si el punto a es de acumulación del dominio, en todo entorno reducido del mismo existe algún punto que pertenece al dominio de f y la implicación debe ser verdadera con antecedente verdadero, o sea, que existen puntos del dominio distintos de a, pero tan próximos a él como se quiera.

Recordemos las definiciones de entorno y entorno reducido de un punto:

$$|f(x) - \ell| < \epsilon \Leftrightarrow f(x) \in E(\ell, \epsilon)$$

y

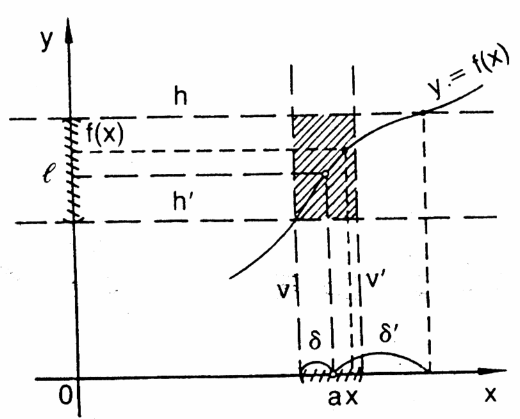
$$0 < |x - a| < \delta \Leftrightarrow x \in E'(a, \delta).$$

Teniendo en cuenta las equivalencias anteriores, la definición de límite finito se puede expresar así:

Los valores de la función f tienen como límite el número real ℓ en el punto a, que es punto de acumulación de su dominio, si y sólo si para todo entorno de centro ℓ existe un entorno reducido de centro a, tal que

$$\forall x: (x \in D_f \cap E'(a) \Rightarrow f(x) \in E(\ell)).$$

Gráficamente, para cualquier par de rectas horizontales h y h', con el punto (a; ℓ) ubicado entre las dos y a igual distancia de cada una de ellas, existen dos rectas verticales v y v' con (a; ℓ) entre ambas y a igual distancia de ambas, tales que todo punto del gráfico de f con abscisa distinta de a y ubicado entre v y v' también está entre h y h'.



Obsérvese que δ es el menor entre los números δ y δ', determinados gráficamente por las dos proyecciones, sobre el eje x, de las intersecciones del gráfico de f con las rectas h y h'.

II. Algunos límites finitos

Probaremos la existencia de los siguientes límites finitos:

1) Límite de la función constante $f: x \to k$

Puede probarse fácilmente que el límite de una función constante, en cualquier punto de su dominio, es dicha constante.

Es decir, $\forall k \in \mathbb{R}: \lim_a f = k$.

Probar que el número k es el límite buscado significa encontrar, para cualquier número positivo ϵ, un número positivo δ que satisfaga la condición exigida por la definición.

En este caso, δ es cualquier número positivo, pues para cualquier ϵ positivo y para cualquier δ positivo, resulta:

$$\forall x: (x \in D_f \wedge 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |k - k| = 0 < \epsilon).$$

O sea, se verifica la definición de límite para $f(x) = k$ y para $\ell = k$.

2) Límite de la función idéntica $f: x \to x$

Puede demostrarse de inmediato $\forall a \in \mathbb{R}: \lim_a x = a$.

En efecto, considerando un número positivo $\delta \le \epsilon$, resulta:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta \le \epsilon / (x \in D_f \wedge 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| = |x - a| < \delta \le \epsilon).$$

3) Límite de la función lineal $f: x \to px + q\ (p \neq 0)$

Probaremos $\forall a \in \mathbb{R}: \lim_a (px + q) = pa + q$.

Con la intención de encontrar el número $\delta > 0$ correspondiente a la definición de límite, podemos hacer el siguiente planteo auxiliar:

$$|f(x) - \ell| < \epsilon \Leftrightarrow |(px + q) - (pa + q)| < \epsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |p(x - a)| < \epsilon \Leftrightarrow |p|\,|x - a| < \epsilon \Leftrightarrow |x - a| < \frac{\epsilon}{|p|}.$$

Luego, para cada $\epsilon > 0$ es posible determinar el número δ tal que $0 < \delta \le \frac{\epsilon}{|p|}$, y se verifica:

$$0 < |x - a| < \frac{\epsilon}{|p|} \Rightarrow |p|\,|x - a| < \epsilon \Rightarrow |px - pa| < \epsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |px + q - pa - q| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - (pa + q)| < \epsilon.$$

4) **Límite de una función cuadrática** $f: x \to (x-a)^2$

Se verifica $\forall a \in \mathbf{R}$: $\lim_a (x-a)^2 = 0$.
Tengamos en cuenta que:
$|(x-a)^2 - 0| < \epsilon \Leftrightarrow |(x-a)^2| < \epsilon \Leftrightarrow |x-a|^2 < \epsilon \Leftrightarrow |x-a| < \sqrt{\epsilon}$.
Luego, en este caso, δ es cualquier número positivo menor o igual que $\sqrt{\epsilon}$.
En efecto,
$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta = \sqrt{\epsilon} \,/\, (0 \leq |x-a| < \sqrt{\epsilon} \Rightarrow |(x-a)^2| < (\sqrt{\epsilon})^2 = \epsilon)$.
Veamos ahora un caso particular.
Consideremos $f: x \to 3x^2 + 4x - 6$ en el intervalo $[1; 3]$.
Demostraremos que $\lim_2 f(x) = 14$.
Debemos encontrar $\delta \,/\, |f(x) - 14| < \epsilon$ si $0 < |x-2| < \delta \wedge 1 \leq x \leq 3$.
Ahora bien, $|f(x) - 14| < \epsilon \Leftrightarrow |(3x^2 + 4x - 6) - 14| < \epsilon \Leftrightarrow |3x^2 + 4x - 20| < \epsilon$.
El polinomio $p(x) = 3x^2 + 4x - 20$ es divisible por $(x-2)$, y resulta

$$p(x) = (x-2)(3x+10).$$

Luego, $|x-2|\,|3x+10| < \epsilon \Leftrightarrow |x-2| < \dfrac{\epsilon}{|3x+10|}$.

Como $x \in [1; 3]$, para $x = 1$ es $\delta' = \dfrac{\epsilon}{13}$ y para $x = 3$ es $\delta = \dfrac{\epsilon}{19}$.

Elegimos el menor δ, o sea, $0 < \delta \leq \dfrac{\epsilon}{19}$.

Invirtiendo el camino que nos permitió hallar el número δ, obtenemos:

$$0 < |x-2| < \frac{\epsilon}{19} \Rightarrow |x-2| < \frac{\epsilon}{|3x+10|} \Rightarrow |3x+10|\,|x-2| < \epsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |3x^2 + 4x - 20| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - 14| < \epsilon.$$

◆ 5) **Otros límites**

a) Sea $f: x \to \dfrac{2x}{x+4}$. Probaremos que su límite en el punto 5, que es de acumulación de su dominio, es $\dfrac{10}{9}$.

Para ello debemos encontrar $\delta(\epsilon) > 0$ tal que $\forall \epsilon > 0$, si $0 < |x-5| < \delta$, entonces $\left|\dfrac{2x}{x+4} - \dfrac{10}{9}\right| < \epsilon$.

Realizamos algunos cálculos auxiliares que facilitan la obtención del número $\delta(\epsilon)$.

$$\left|\frac{2x}{x+4} - \frac{10}{9}\right| < \epsilon \Leftrightarrow \left|\frac{18x - 10x - 40}{9(x+4)}\right| < \epsilon \Leftrightarrow \left|\frac{8x-40}{9(x+4)}\right| < \epsilon \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{8}{9}\,\frac{|x-5|}{|x+4|} < \epsilon \Leftrightarrow |x-5| < \frac{9}{8}\epsilon\,|x+4|$$

Si $x \in (4;6)$, podemos elegir $0 < \delta \leq 9\epsilon$, observando que pedir $4 < x < 6$ equivale a exigir $0 < \delta < 1$.

En efecto, si δ es el menor número entre 1 y 9ϵ, obtenemos:

$$|x-5| < 9\epsilon \Rightarrow |x-5| < 9\epsilon\,\frac{8}{8} \Rightarrow |x-5| < 9\epsilon\,\frac{|x+4|}{8}, \text{ pues}$$

$|x+4| > 8$ si $4 < x < 6$.

Luego, $|x-5| < \dfrac{9}{8}\epsilon\,|x+4| \Rightarrow \dfrac{8}{9}\,\dfrac{|x-5|}{|x+4|} < \epsilon \Rightarrow \left|\dfrac{2x}{x+4} - \dfrac{10}{9}\right| < \epsilon$.

Por lo tanto, $\delta = \text{mínimo}\,(1, 9\epsilon)$.

b) Probaremos que $\lim_{-1} \left(\dfrac{3}{x} + 4\right) = 1$.

$$|f(x) - \ell| = \left|\frac{3+3x}{x}\right| = \frac{3\,|x+1|}{|x|}$$

Por lo tanto, $\dfrac{3\,|x+1|}{|x|} < \epsilon \Leftrightarrow |x+1| < \dfrac{\epsilon}{3}|x|$.

En este caso no conviene elegir $0 < \delta < 1$, pues ello equivale a pedir $-2 < x < 0$ y, al buscar el menor δ, no existe un $\delta(\epsilon)$ positivo para todo el intervalo $(-2; 0)$.

Por ello exigimos $0 < \delta < \dfrac{1}{2}$, o sea, $-\dfrac{3}{2} < x < -\dfrac{1}{2}$.

Por lo tanto, si $\delta = \text{mínimo}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\epsilon}{6}\right)$, resulta:

$$|x+1| < \frac{\epsilon}{6} \Rightarrow 6\,|x+1| < \epsilon \Rightarrow 3 \cdot 2\,|x+1| < \epsilon.$$

Como $x < -\dfrac{1}{2}$, es $|x| > \dfrac{1}{2}$ y también $\dfrac{1}{|x|} < 2$.

Luego, $3 \cdot 2\,|x+1| < \epsilon \Rightarrow 3\,\dfrac{1}{|x|}\,|x+1| < \epsilon \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3\left|\frac{x+1}{x}\right| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - 1| < \epsilon.$$

EJERCICIOS

1) Probar que la función $f: x \to 3x + 2$ tiene límite 14 en el punto 4.
2) Probar que la función $f: x \to \begin{cases} 5x+3 & \text{si } x \neq 2 \\ 6 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ tiene límite 13 en el punto 2.
3) Hallar δ para $\epsilon = 10^{-4}$ si $f: x \to 8x + 1$ y se calcula el límite en $x = 0$.
4) Hallar δ si $f: x \to x^2 - 3x + 5$ para cualquier $x \in [2; 4]$ y demostrar que $\lim_3 f(x) = 5$.
5) Demostrar que $\lim_4 f(x) = 17$, hallando δ válido para cualquier x del intervalo $(2; 6)$ si $f(x) = x^2 - x + 5$.
6) Idem para a) $\lim_2 (x^3 + 5x) = 18$ si $x \in [1;3]$;

b) $\lim_3 (x^3 - 3x^2 + 4x) = 12$ si $x \in (1;5)$;

c) $\lim_1 (x^2 - 2x + 9) = 8$ si $x \in [0;2]$;

d) $\lim_3 (x^2 - 5x - 1) = -7$ si $x \in [2;4]$.

7) Demostrar que $\lim_a (x - a)^3 = 0$.

8) Probar, hallando $\delta(\epsilon)$, que $\lim_{-2} \dfrac{x + 2}{x^2 - 2x + 1} = 0$.

9) Idem para $\lim_3 \dfrac{x^2 - 7}{x^2 + 7} = \dfrac{1}{8}$.

10) Idem para $\lim_0 \dfrac{x^2 + 1}{x - 1} = -1$.

III. No existencia de límite

Recordemos una vez más la definición de límite finito:

$\lim_a f(x) = \ell \iff \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 / \forall x: (x \in D_f \wedge 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon)$.

Veamos ahora cómo puede negarse la expresión anterior.

Para que la función f no tenga límite en el punto a, la definición de límite no debe verificarse para ningún número real ℓ, es decir,

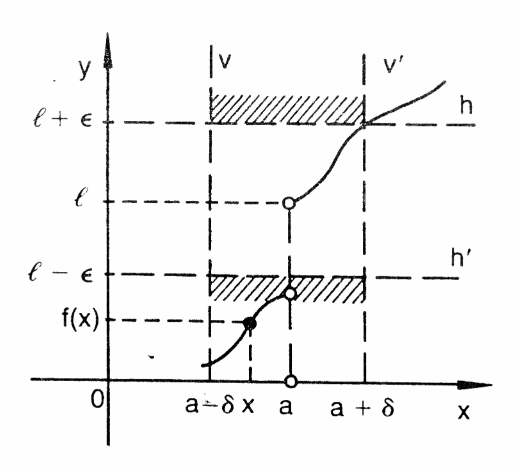
$\forall \ell \in \mathbb{R}: \sim [\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 / \forall x : (x \in D_f \wedge 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon)]$.

Ahora bien, para negar la proposición anterior, hay que negar los cuantificadores y además negar la implicación mediante la conjunción entre el antecedente y la negación del consecuente, según lo demostrado en la página 5.

O sea, f no tiene límite en el punto a si y sólo si

$\forall \ell: \exists \epsilon > 0 / \forall \delta > 0\ \exists x / (x \in D_f \wedge 0 < |x - a| < \delta \wedge |f(x) - \ell| \geq \epsilon)$.

Gráficamente, la expresión anterior significa que, para cualquier número real ℓ que se proponga como posible límite finito de f en el punto a, siempre es posible encontrar un entorno de ℓ tal que, en cualquier entorno reducido del punto a, hay por lo menos un x del dominio para el cual f(x) queda fuera del entorno de ℓ.



O sea, existen dos rectas horizontales h y h' en las condiciones indicadas en la figura, tales que, para cualquier par de verticales v y v', hay un punto del gráfico, con abscisa distinta de a, que está ubicado entre las rectas verticales pero no entre las rectas horizontales.

◆ *Ejemplo*

Consideremos la función $f: x \to \dfrac{|x|}{x}$.

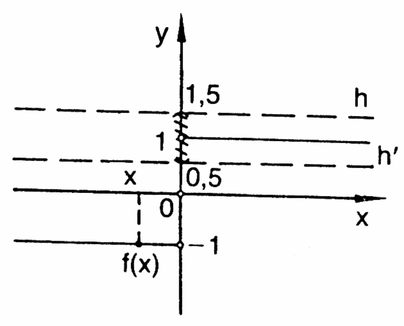
Puede demostrarse que no existe límite para los valores de esta función en el punto cero.

Para ello probaremos en primer lugar que el número 1 no es el límite buscado.

En segundo lugar probaremos que ningún número real $\ell \neq 1$ es dicho límite.

Si se verifican las dos proposiciones anteriores, entonces los valores de f no tienen límite en el punto x = 0.

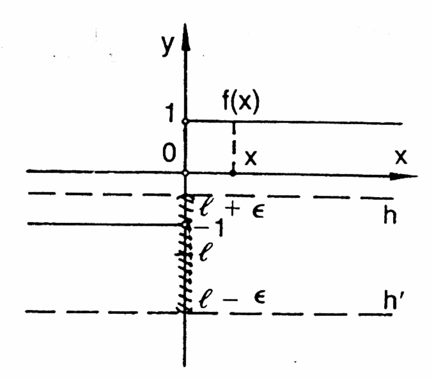
1) Para probar que 1 no es el límite mencionado, consideremos un entorno de 1 de radio $\epsilon = \dfrac{1}{2}$.



En cualquier entorno reducido de centro 0 incluido en el eje de abscisas, hay puntos $x \in D_f$ a la izquierda de 0 para los cuales f(x) = −1.

Es decir, para los cuales f(x) está fuera del entorno $E\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$.

2) Para probar que ningún número real $\ell \neq 1$ es el límite de los valores de f en 0, elegimos $\epsilon = \dfrac{|1-\ell|}{2}$, pues si $\ell \neq 1$, resulta $\epsilon > 0$.



Ahora bien, en cualquier entorno reducido del origen, hay puntos x a la derecha de 0 para los cuales f(x) = 1.

Por lo tanto, para esos x:

$$|f(x) - \ell| = |1 - \ell| > |\frac{1 - \ell|}{2} = \epsilon.$$

Es decir, queda probado que la función f no admite a ningún número real como límite en el punto 0.

De manera similar puede verificarse que las siguientes expresiones no corresponden a números reales:

$$\text{lím}_0 \text{ sen} \frac{\pi}{x}; \quad \text{lím}_a \text{ ent}(x) \text{ si } a \in Z; \quad \text{lím}_2 \frac{1}{x-2} \quad \text{y}$$

$$\text{lím}_a f(x) \text{ si } f: x \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in Q \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbf{R} - Q. \end{cases}$$

EJERCICIOS

1) Verificar que $\text{lím}_0 \text{ sen} \frac{\pi}{x}$ no es cero.
2) Verificar que $\text{lím}_3 [\text{mant}(x)]$ no es uno.
3) Probar que no existe $\text{lím}_0 \frac{|x| - x}{x}$.

IV. Límites laterales

Hasta ahora, al hablar de límite, hemos considerado puntos próximos al punto de acumulación a, a ambos lados de dicho punto. Es decir, números reales en un entorno reducido de centro a, a derecha e izquierda del punto a. Interesa, en algunos casos, el comportamiento de los valores de la función en puntos del dominio a un solo lado de a, esto es, en un semientorno a la derecha o a la izquierda del punto a.

$$\text{Sea } f: x \rightarrow \frac{|x|}{x}.$$

Ya se ha probado que no existe límite finito en el origen.

Ahora bien, el origen es punto de acumulación del conjunto de los números reales positivos, es decir, de los puntos situados a la derecha del origen. Puede pensarse, entonces, en el límite de los valores de la función cuando x tiende a 0 con valores positivos exclusivamente.

A la derecha de 0, para cualquier x próximo a 0, se satisface la definición de límite con el número 1.

Se dice en esta situación que los valores de la función tienen límite 1 a la derecha de 0, y se indica:

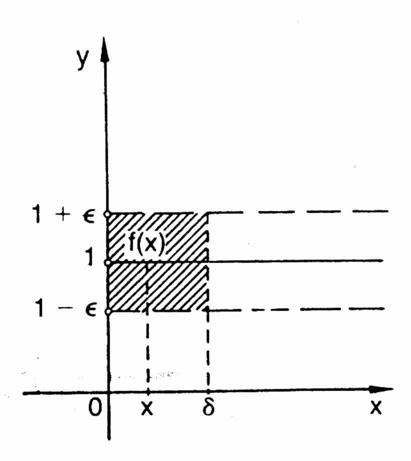
$$\text{lím}_{0^+} f(x) = 1,$$

que se lee "1 es el límite de los valores de f cuando x tiende a 0 por la derecha".

De la misma forma:

$$\text{lím}_{0^-} f(x) = -1,$$

que es el límite por la izquierda.



Definiciones

1) **Límite por la derecha**

ℓ es el límite por la derecha de la función f en el punto a si y sólo si:

1) a es punto de acumulación de $C = \{x / x \in D_f \wedge x > a\}$;
2) $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 / (x \in D_f \wedge a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon)$.

2) **Límite por la izquierda**

ℓ es el límite por la izquierda de la función f en el punto a si y sólo si:

1) a es punto de acumulación de $C = \{x / x \in D_f \wedge x < a\}$;
2) $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 / (x \in D_f \wedge a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon)$.

Considerando en cada caso semientornos a la derecha o a la izquierda del punto a, se pueden interpretar topológicamente las definiciones anteriores.

Se prueba fácilmente que si una función admite al mismo número real como límite por la derecha y por la izquierda de un punto de acumulación a, entonces dicha función tiene límite finito en el punto a.

O sea:

$$\text{lím}_{a^+} f(x) = \ell \wedge \text{lím}_{a^-} f(x) = \ell \Rightarrow \text{lím}_a f(x) = \ell.$$

También puede probarse que si los límites por la derecha y por la izquierda del mismo punto son distintos, entonces la función no tiene límite finito en el punto.

EJERCICIOS

1) Hallar los siguientes límites laterales:
   a) $\text{lím}_{0^+} \text{mant}(x)$ y $\text{lím}_{0^-} \text{mant}(x)$
   b) $\text{lím}_{2^+} \text{ent}(x)$ y $\text{lím}_{2^-} \text{ent}(x)$
   c) $\text{lím}_{0^+} |x|$ y $\text{lím}_{0^-} |x|$

2) Probar que $f: x \to \frac{|x| - x}{x}$ no tiene límite en 0, utilizando límites laterales.

3) Idem para $f: x \to \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x > 1 \\ 2x & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$ en el punto 1.

4) Hallar límites laterales en 2 si $f: x \to \frac{2 - x}{|x - 2|}$.

5) Probar, hallando $\delta(\epsilon)$ en la definición correspondiente, que $\lim_{1^+} \left(\frac{4}{x} - 1 \right) = 3$.

6) Encontrar, para cada función, límites laterales en cada punto x_0 indicado:

$f: x \to \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 3 \\ 2x - 4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ a) $x_0 = 3$ b) $x_0 = 5$ c) $x_0 = -1$

$g: x \to \begin{cases} x^2 + 5 & \text{si } x > 1 \\ 7 - x^2 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ en $x_0 = 1$

$h: x \to \begin{cases} \frac{2}{x} & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$ a) $x_0 = 1$ b) $x_0 = 0$

V. Teoremas sobre límites finitos

De la definición de límite finito se derivan las siguientes propiedades:

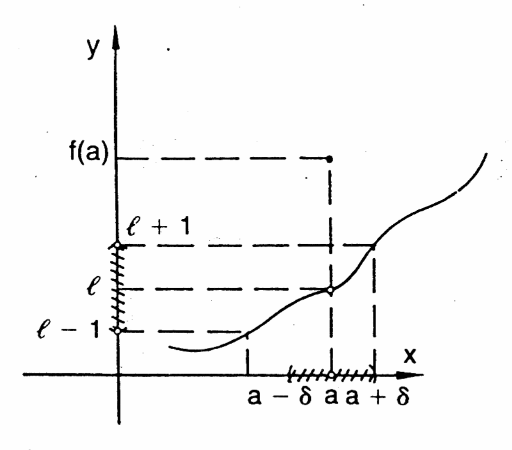
Teorema 1

Si una función tiene límite finito en un punto de acumulación a, entonces existe un entorno reducido del punto a donde la función está acotada.

Antes de presentar una demostración formal haremos algunas aclaraciones.

Si la función f tiene límite ℓ en el punto a, la definición de límite se verifica para cualquier número positivo ϵ. Si elegimos un valor fijo cualquiera de ϵ, por ejemplo, $\epsilon = 1$, obtenemos algún número δ positivo tal que si $x \in E'(a, \delta)$, entonces $\ell - 1 < f(x) < \ell + 1$.

Luego, $\ell - 1$ es una cota inferior para el recorrido de f en dicho entorno reducido, y $\ell + 1$ una cota superior para dicho conjunto.



La propiedad también se verifica en E (a,δ). Pero si la función está definida en a, pueden cambiar las cotas mencionadas. En el caso de la figura, por ejemplo, una cota superior es el máximo entre f(a) y $\ell + 1$, o sea, f(a). En otra situación, una cota inferior puede ser el mínimo entre f(a) y $\ell - 1$.

En la demostración siguiente probamos que existe $k > 0$ tal que $|f(x)| \leq k$ si $x \in E'(a, \delta)$.

Demostración

Sea $\lim_a f(x) = \ell$ y elijamos $\epsilon = 1$.

Por la definición de límite, para $\epsilon = 1$,

$$\exists \delta > 0 \, / \, |f(x) - \ell| < 1 \quad \text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta.$$

Además, por la propiedad 9 del valor absoluto (pág. 17), es:

$$|f(x)| - |\ell| \leq |f(x) - \ell|.$$

Pero $|f(x)| - |\ell| \leq |f(x) - \ell| \wedge |f(x) - \ell| < 1 \Rightarrow |f(x)| - |\ell| < 1$, por transitividad de la relación de menor.

Luego, $|f(x)| < |\ell| + 1 = k$ si $0 < |x - a| < \delta$.

Por lo tanto, k es una cota de la función f en el entorno reducido de a de radio δ.

Obsérvese que utilizamos, por razones de economía de lenguaje, la expresión "función acotada", que significa "el conjunto de los valores de la función está acotado" o "el recorrido de f está acotado", según la definición de conjunto acotado dada en el capítulo 1.

Teorema 2

Si una función tiene límite finito ℓ en un punto de acumulación a, y se considera el número $k > \ell$, entonces existe un entorno reducido del punto a donde, para cualquier x de ese entorno, es $f(x) < k$.

Demostración

Sea $\lim_a f(x) = \ell$.

Como por hipótesis es $k > \ell$, resulta $k - \ell > 0$.

Vamos a elegir un número ϵ positivo y menor o igual que $k - \ell$.

Es decir, sea $0 < \epsilon \leq k - \ell$.

Por la definición de límite,

$$\exists \delta > 0 \, / \, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < k - \ell.$$

Por la propiedad 3 del valor absoluto (pág. 17), es:

$$f(x) - \ell \leq |f(x) - \ell|.$$

Por lo tanto,

$$f(x) - \ell < k - \ell \quad \text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta,$$

y también

$$f(x) < k \quad \text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta.$$

Gráficamente, si elegimos, por ejemplo, $\epsilon = \frac{k - \ell}{2} > 0$, puede determinarse

2) Probar que $f: x \to \frac{|x| - x}{x}$ no tiene límite en 0, utilizando límites laterales.

3) Idem para $f: x \to \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x > 1 \\ 2x & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$ en el punto 1.

4) Hallar límites laterales en 2 si $f: x \to \frac{2 - x}{|x - 2|}$.

5) Probar, hallando $\delta(\epsilon)$ en la definición correspondiente, que $\lim_{1^+} \left(\frac{4}{x} - 1\right) = 3$.

6) Encontrar, para cada función, límites laterales en cada punto x_0 indicado:

$f: x \to \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 3 \\ 2x - 4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ a) $x_0 = 3$ b) $x_0 = 5$ c) $x_0 = -1$

$g: x \to \begin{cases} x^2 + 5 & \text{si } x > 1 \\ 7 - x^2 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ en $x_0 = 1$

$h: x \to \begin{cases} \frac{2}{x} & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$ a) $x_0 = 1$ b) $x_0 = 0$

V. Teoremas sobre límites finitos

De la definición de límite finito se derivan las siguientes propiedades:

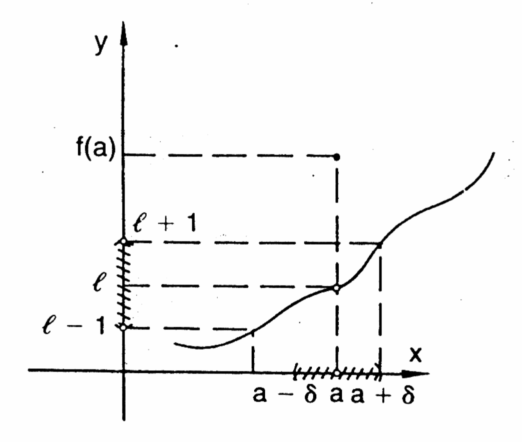
Teorema 1

Si una función tiene límite finito en un punto de acumulación a, entonces existe un entorno reducido del punto a donde la función está acotada.

Antes de presentar una demostración formal haremos algunas aclaraciones.

Si la función f tiene límite ℓ en el punto a, la definición de límite se verifica para cualquier número positivo ϵ. Si elegimos un valor fijo cualquiera de ϵ, por ejemplo, $\epsilon = 1$, obtenemos algún número δ positivo tal que si $x \in E'(a, \delta)$, entonces $\ell - 1 < f(x) < \ell + 1$.

Luego, $\ell - 1$ es una cota inferior para el recorrido de f en dicho entorno reducido, y $\ell + 1$ una cota superior para dicho conjunto.



La propiedad también se verifica en E (a,δ). Pero si la función está definida en a, pueden cambiar las cotas mencionadas. En el caso de la figura, por ejemplo, una cota superior es el máximo entre f(a) y $\ell + 1$, o sea, f(a). En otra situación, una cota inferior puede ser el mínimo entre f(a) y $\ell - 1$.

En la demostración siguiente probamos que existe $k > 0$ tal que $|f(x)| \leq k$ si $x \in E'(a, \delta)$.

Demostración

Sea $\lim_a f(x) = \ell$ y elijamos $\epsilon = 1$.

Por la definición de límite, para $\epsilon = 1$,

$$\exists \delta > 0 \, / \, |f(x) - \ell| < 1 \quad \text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta.$$

Además, por la propiedad 9 del valor absoluto (pág. 17), es:

$$|f(x)| - |\ell| \leq |f(x) - \ell|.$$

Pero $|f(x)| - |\ell| \leq |f(x) - \ell| \wedge |f(x) - \ell| < 1 \Rightarrow |f(x)| - |\ell| < 1$, por transitividad de la relación de menor.

Luego, $|f(x)| < |\ell| + 1 = k$ si $0 < |x - a| < \delta$.

Por lo tanto, k es una cota de la función f en el entorno reducido de a de radio δ.

Obsérvese que utilizamos, por razones de economía de lenguaje, la expresión "función acotada", que significa "el conjunto de los valores de la función está acotado" o "el recorrido de f está acotado", según la definición de conjunto acotado dada en el capítulo 1.

Teorema 2

Si una función tiene límite finito ℓ en un punto de acumulación a, y se considera el número $k > \ell$, entonces existe un entorno reducido del punto a donde, para cualquier x de ese entorno, es $f(x) < k$.

Demostración

Sea $\lim_a f(x) = \ell$.

Como por hipótesis es $k > \ell$, resulta $k - \ell > 0$.

Vamos a elegir un número ϵ positivo y menor o igual que $k - \ell$.

Es decir, sea $0 < \epsilon \leq k - \ell$.

Por la definición de límite,

$$\exists \delta > 0 \, / \, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < k - \ell.$$

Por la propiedad 3 del valor absoluto (pág. 17), es:

$$f(x) - \ell \leq |f(x) - \ell|.$$

Por lo tanto,

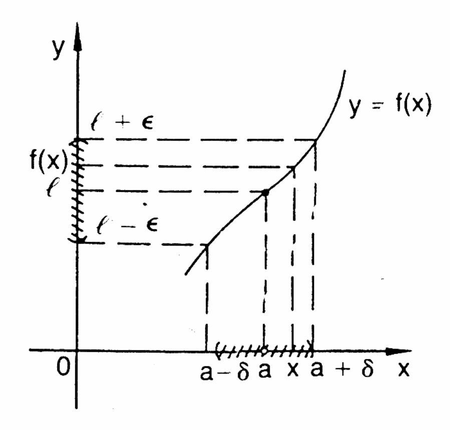
$$f(x) - \ell < k - \ell \quad \text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta,$$

y también

$$f(x) < k \quad \text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta.$$

Gráficamente, si elegimos, por ejemplo, $\epsilon = \frac{k - \ell}{2} > 0$, puede determinarse

$E'(a, \delta) / \forall x: (x \in D_f \cap E'(a, \delta) \Rightarrow f(x) < k)$.



Análogamente, si una función tiene límite ℓ en el punto a, y k es un número real menor que ℓ, entonces existe un entorno reducido de a donde $f(x) > k$.

En particular, si una función tiene límite positivo en el punto a, es decir, si $\ell > 0$, considerando, en el teorema anterior, $k = 0$, puede asegurarse la existencia de un entorno reducido del punto a donde la función toma valores positivos.

O sea, $\ell > 0 \Rightarrow (\exists E'(a) / x \in E'(a) \cap D_f \Rightarrow f(x) > 0)$.

Por las mismas consideraciones:

$\ell < 0 \Rightarrow (\exists E'(a) / x \in E'(a) \cap D_f \Rightarrow f(x) < 0)$.

Es decir, en un entorno reducido del punto a, la función tiene el mismo signo que su límite en dicho punto.

◆ Esta propiedad no se cumple, en general, si se considera un entorno de a en lugar de un entorno reducido. Basta para ello, por ejemplo, si $\ell > 0$, que f(a) exista y sea un número negativo o cero.

Teorema 3

Si dos funciones f y g están definidas en el mismo conjunto D con límites ℓ y ℓ' respectivamente en el punto de acumulación a, y $\ell < \ell'$, entonces existe un entorno reducido del punto a donde $\forall x: f(x) < g(x)$.

Demostración

Sea: $\lim_a f(x) = \ell$, $\lim_a g(x) = \ell'$ y $\ell < \ell'$.

Por propiedad del conjunto de los números reales, $\exists c \in \mathbf{R} / \ell < c < \ell'$.

Por el teorema anterior:

$\ell < c \Rightarrow \exists \delta > 0 / \forall x: (x \in E'(a, \delta) \cap D \Rightarrow f(x) < c)$,

y $\ell' > c \Rightarrow \exists \delta' > 0 / \forall x: (x \in E'(a, \delta') \cap D \Rightarrow g(x) > c)$.

En la intersección de ambos entornos se verifican simultáneamente las dos condiciones.

Si, por ejemplo, $\delta < \delta'$, resulta:

$f(x) < c < g(x)$ si $0 < |x - a| < \delta$,

o sea,

$f(x) < g(x)$ si $0 < |x - a| < \delta$.

Una propiedad análoga se demuestra si $\ell > \ell'$.

Unicidad del límite

Una consecuencia inmediata del teorema 3 es la unicidad del límite.

En efecto, si $\lim_a f(x) = \ell \wedge \lim_a f(x) = \ell' \wedge \ell \neq \ell'$, entonces, en un entorno reducido del punto a, $\forall x: f(x) \neq f(x)$, que es una contradicción.

Teorema 4

Si dos funciones f y g, definidas en un mismo conjunto D, tienen límites finitos ℓ y ℓ' en un punto de acumulación a, y existe un entorno reducido del punto a donde $\forall x: f(x) \geq g(x)$, entonces $\ell \geq \ell'$.

Este teorema es contrarrecíproco del teorema 3 e indica que las desigualdades no cambian su sentido con el paso al límite.

Es importante observar que $\forall x: f(x) > g(x)$ no excluye la posibilidad $\lim_a f(x) = \lim_a g(x)$.

Ejemplo

Consideremos las funciones $f: x \to x^2 + 3$ y $g: x \to x + 3$.

Elijamos $D_f = D_g = \{x / x \in \mathbf{R} \wedge x > 1\}$.

$\forall x \in D_f: f(x) > g(x) \wedge \lim_1 f(x) = \lim_1 g(x) = 4$.

Teorema 5

Si f, g y h son tres funciones definidas en el mismo conjunto D, y además:

1) $\lim_a f(x) = \ell \wedge \lim_a h(x) = \ell$,

y 2) $\forall x: (x \in D \wedge x \neq a \Rightarrow f(x) \leq g(x) \leq h(x))$,

entonces $\lim_a g(x) = \ell$.

Demostración

Prefijado $\epsilon > 0$:

$\exists \delta > 0 / |f(x) - \ell| < \epsilon$ si $0 < |x - a| < \delta$

o $\ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon$ si $0 < |x - a| < \delta$ (1),

y $\exists \delta' > 0 / |h(x) - \ell| < \epsilon$ si $0 < |x - a| < \delta'$

o $\ell - \epsilon < h(x) < \ell + \epsilon$ si $0 < |x - a| < \delta'$ (2).

Si $\delta < \delta'$, entonces, por (1) y (2), $\forall x \in D$:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \ell - \epsilon < f(x) \wedge h(x) < \ell + \epsilon$$
$$\Rightarrow \ell - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \ell + \epsilon$$
$$\Rightarrow \ell - \epsilon < g(x) < \ell + \epsilon$$
$$\Rightarrow |g(x) - \ell| < \epsilon.$$

Es decir, $\text{lím}_a g(x) = \ell$.

Podemos aplicar este teorema a la relación trigonométrica siguiente:

$$\forall x: (0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{sen } x < x < \text{tg } x).$$

Dividiendo por sen x ≠ 0: $1 < \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{\text{tg } x}{\text{sen } x}$

$$\text{y} \quad 1 > \frac{\text{sen } x}{x} > \cos x$$

Ahora bien, $\text{lím}_0\, 1 = 1$, y puede probarse que:

$$\text{lím}_0 \cos x = 1.$$

Luego, resulta $\text{lím}_0 \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

EJERCICIOS

1) Calcular $\text{lím}_0 \frac{x^2}{1 - \cos x}$

2) $\text{lím}_0 \frac{x \text{ sen } x}{\cos x - 1}$

3) $\text{lím}_0 \frac{x}{\text{sen } (2x)}$

4) $\text{lím}_0 \frac{\text{sen}^2 x}{3x}$

5) $\text{lím}_0 \frac{\text{tg}^2 (7x)}{5x}$

6) $\text{lím}_0 \frac{\text{sen } (3x)}{\text{sen } (4x)}$

7) $\text{lím}_0 \frac{\text{tg } (3x)}{2x}$

8) $\text{lím}_0 \frac{\text{sen } (kx)}{x}$

9) $\text{lím}_0 \frac{\text{sen } (mx)}{\text{sen } (nx)}$

10) $\text{lím}_1 \frac{\text{sen } (5\pi x)}{\text{sen } (\pi x)}$

VI. Algebra de límites

Suma de límites

Si las funciones f y g, definidas en un mismo conjunto D, tienen límite finito en el punto de acumulación a, entonces la función f + g tiene como límite en dicho punto la suma de los límites.

O sea, si $\text{lím}_a f(x) = \ell$ y $\text{lím}_a g(x) = \ell'$, entonces

$$\text{lím}_a (f + g)(x) = \ell + \ell'.$$

Demostración

Si aplicamos la definición de límite a la función f y a la función g,

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 / \forall x: \left(x \in D \wedge 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \frac{\epsilon}{2}\right)$$

$$\text{y}\ \exists \delta' > 0 / \forall x: \left(x \in D \wedge 0 < |x - a| < \delta' \Rightarrow |g(x) - \ell'| < \frac{\epsilon}{2}\right).$$

En la intersección de ambos entornos se verifican simultáneamente las dos relaciones anteriores, es decir:

$$\forall x: \left(x \in E'(a, \delta) \cap E'(a, \delta') \Rightarrow |f(x) - \ell| < \frac{\epsilon}{2} \wedge |g(x) - \ell'| < \frac{\epsilon}{2}\right).$$

Sumando las dos últimas expresiones, resulta:

$$|f(x) - \ell| + |g(x) - \ell'| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Por la desigualdad triangular:

$$|f(x) - \ell + g(x) - \ell'| \leq |f(x) - \ell| + |g(x) - \ell'|.$$

Luego, por transitividad, es:

$$|f(x) - \ell + g(x) - \ell'| < \epsilon.$$

Ordenando, y aplicando la definición de suma de funciones:

$$|(f + g)(x) - (\ell + \ell')| < \epsilon.$$

Finalmente, por definición de límite, es:

$$\text{lim}_a (f + g)(x) = \ell + \ell'.$$

El teorema se generaliza fácilmente por inducción completa para la suma de n funciones con límite finito.

Resta de límites

Si $\text{lím}_a f(x) = \ell$ y $\text{lím}_a g(x) = \ell'$, entonces $\text{lím}_a (f-g)(x) = \ell - \ell'$.

Esta propiedad puede obtenerse como consecuencia de la anterior, viendo, previamente, $\text{lím}_a[-g(x)] = -\ell'$.

Infinitésimo

f es infinitésimo en el punto a si y sólo si $\text{lím}_a f(x) = 0$.

Por ejemplo,

$f: x \to x$ es infinitésimo en 0;
$g: x \to x - a$ es infinitésimo en a;
$h: x \to \text{sen } x$ es infinitésimo en 0.

Aplicando la definición de límite, se observa de inmediato que

$$\text{lím}_a f(x) = \ell \Leftrightarrow \text{lím}_a [f(x) - \ell] = 0.$$

O sea,

$$\text{lím}_a f(x) = \ell \Leftrightarrow f - \ell \text{ es infinitésimo en a.}$$

Teorema

El producto de un infinitésimo en el punto a por un número real, o por una función acotada en un entorno del punto a, es un infinitésimo en el punto a.

Sea $\text{lím}_a f(x) = 0$.

Demostración

1) Probaremos, en primer lugar, que el producto de un infinitésimo en el punto a por un número real cualquiera k es un infinitésimo en el mismo punto a.

O sea, queremos demostrar $\text{lím}_a[k \cdot f(x)] = 0$.

Si $k = 0$, el teorema queda probado de inmediato.

Si $k \neq 0$, para cualquier número positivo ϵ, $\frac{\epsilon}{|k|}$ también es positivo.

Luego, utilizando la definición de límite para la función f, resulta:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ / \ \forall x: \left(x \in D \cap E'(a,\delta) \Rightarrow |f(x) - 0| < \frac{\epsilon}{|k|} \right).$$

Pero, $|f(x)| < \frac{\epsilon}{|k|} \Leftrightarrow |k| \cdot |f(x)| < \epsilon \Leftrightarrow |k \cdot f(x)| < \epsilon$.

Por lo tanto,

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ / \ \forall x: (x \in D \cap E'(a,\delta) \Rightarrow |k \cdot f(x) - 0| < \epsilon).$$

Luego, es $\text{lím}_a[k\, f(x)] = 0$.

2) Probaremos también que si g es una función acotada en un entorno del punto a, entonces $\text{lím}_a[f(x) \cdot g(x)] = 0$.

Si g está acotada en un entorno del punto a, existe un número positivo k tal que:

$\forall x: (x \in D \cap E(a,\delta) \Rightarrow |g(x)| \leq k)$.

Además, aplicando la definición de límite a la función f, resulta:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta' > 0 \ / \ \forall x: (x \in D \cap E'(a,\delta') \Rightarrow |f(x)| < \frac{\epsilon}{k}).$$

Si $\delta < \delta'$, en $E'(a,\delta)$ se cumplen simultáneamente:

$$|g(x)| \leq k \ \wedge \ |f(x)| < \frac{\epsilon}{k}.$$

O sea, $|f(x) \cdot g(x)| < k \cdot \frac{\epsilon}{k} = \epsilon$.

Por lo tanto, es:

$$\text{lím}_a[f(x) \cdot g(x)] = 0.$$

Producto de límites

Si las funciones f y g definidas en un mismo conjunto D tienen límite finito en el punto de acumulación a, entonces fg tiene como límite en dicho punto el producto de los límites.

Demostración

Sea $\text{lím}_a f(x) = \ell$ y $\text{lím}_a g(x) = \ell'$.

$$(fg)(x) - \ell \cdot \ell' = f(x) \cdot g(x) - \ell \cdot \ell' = f(x)g(x) - f(x)\ell' + f(x)\ell' - \ell \cdot \ell' =$$

$$= f(x)\,[g(x) - \ell'] + \ell'\,[f(x) - \ell] (1).$$

Observemos esta última expresión. Por el teorema 1 (pág. 132), f está acotada en un entorno del punto a, y por la consecuencia demostrada en la página 137, $g - \ell'$ es infinitésimo en a. Luego, el producto $f(x) \cdot [g(x) - \ell']$ tiene límite cero en el punto a.

Por razones similares, también $\ell' \cdot [f(x) - \ell]$ es infinitésimo en el punto a.

Es decir, por (1):

$$\text{lím}_a\left[(fg)(x) - \ell \cdot \ell'\right] = \text{lím}_a\left[f(x) \cdot (g(x) - \ell')\right] + \text{lím}_a\left[\ell' \cdot (f(x) - \ell)\right] = 0.$$

Luego, es

$$\text{lím}_a (fg)(x) = \ell \cdot \ell'.$$

El teorema se extiende fácilmente, por inducción completa, al producto de n funciones.

Si las n funciones son iguales, queda:

$\forall n \in N$: $\text{lím}_a[f(x)]^n = [\text{lím}_a f(x)]^n$.

Además, si $n \geq 2$ y $\forall x : f(x) \geq 0$, es:

$$\text{lím}_a \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\text{lím}_a f(x)}.$$

En efecto, $\forall x \in D \ \forall n \in N - \{1\}$:

$\sqrt[n]{f(x)} = t(x) \Leftrightarrow f(x) = [t(x)]^n$, según la definición de raíz enésima.

Del segundo miembro de esta equivalencia se deduce:

$$\text{lím}_a f(x) = \text{lím}_a[t(x)]^n.$$

Aplicando la propiedad anterior,

$$\text{lím}_a[t(x)]^n = [\text{lím}_a t(x)]^n.$$

Luego,

$\text{lím}_a f(x) = [\text{lím}_a t(x)]^n$, lo cual es equivalente a:

$$\sqrt[n]{\text{lím}_a f(x)} = \text{lím}_a t(x).$$

Y reemplazando t(x) en la última expresión, queda:

$$\sqrt[n]{\text{lím}_a f(x)} = \text{lím}_a \sqrt[n]{f(x)}.$$

Cociente de límites

Si dos funciones f y g, definidas en el mismo conjunto D, tienen límites finitos en el punto de acumulación a y el límite de g no es nulo, entonces el límite de $\frac{f}{g}$ es el cociente de ambos límites.

Demostración

Sea $\text{lím}_a f(x) = \ell$, $\text{lím}_a g(x) = \ell'$ y $\ell' \neq 0$.

◆ 1) Demostraremos primero el caso particular $\text{lím}_a \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{\ell'}$.

Tiene sentido hablar de la función $\dfrac{1}{g}$ en un entorno del punto a, pues, por la propiedad de límite finito demostrada en la página 134,

$$\ell \neq 0 \Rightarrow \exists E'(a) / \forall x: (x \in E'(a) \cap D \Rightarrow g(x) \neq 0).$$

Por otra parte, $\text{lím}_a \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{\ell'} \Leftrightarrow \text{lím}_a \left[\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{\ell'}\right] = 0.$

Ahora bien, $\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{\ell'} = \dfrac{\ell' - g(x)}{g(x)\,\ell'} = [\ell' - g(x)] \cdot \dfrac{1}{\ell'} \cdot \dfrac{1}{g(x)}$ (1).

Para probar que la última expresión es infinitésimo en el punto a, bastará probar que existe un entorno de a donde la función $\dfrac{1}{g}$ está acotada, pues el primer factor es infinitésimo en a y $\dfrac{1}{\ell'}$ es un número real.

Como ℓ' es el límite de los valores de g en el punto a, si elegimos

$$\epsilon = \frac{|\ell'|}{2} > 0 \; \exists \delta > 0 / \forall x: \left(x \in D \wedge 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - \ell'| < \frac{|\ell'|}{2}\right)$$

Ahora bien, por propiedad 10 del valor absoluto (pág. 17), es:

$$\big||g(x)| - |\ell'|\big| \leq |g(x) - \ell'|.$$

Como $|g(x) - \ell'| < \dfrac{|\ell'|}{2}$, por transitividad resulta:

$$\big||g(x)| - |\ell'|\big| < \frac{|\ell'|}{2}.$$

Aplicando la propiedad 5 del valor absoluto a la última expresión, queda:

$$-\frac{|\ell'|}{2} < |g(x)| - |\ell'| < \frac{|\ell'|}{2}.$$

Luego, $$\frac{|\ell'|}{2} < |g(x)| < \frac{3|\ell'|}{2}.$$

O sea, $$|g(x)| > \frac{|\ell'|}{2} \text{ si } 0 < |x-a| < \delta.$$

Finalmente, resulta: $\forall x: \left(x \in E'(a,\delta) \Rightarrow \left|\dfrac{1}{g(x)}\right| < \dfrac{2}{|\ell'|}\right)$, y la función $\dfrac{1}{g}$ está acotada en $E'(a,\delta)$.

Por lo tanto, la expresión (1) es el producto de un infinitésimo por un número real y por una función acotada en un entorno del punto a. Por teoremas anteriores (pág.137), es un infinitésimo en el punto a.

Es decir,

$$\text{lím}_a \left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\ell'}\right] = \text{lím}_a \left[(\ell' - g(x)) \cdot \frac{1}{\ell'} \cdot \frac{1}{g(x)}\right] = 0.$$

Se ha probado entonces:

$$\text{lím}_a \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\ell'}.$$

2) Para demostrar el caso general basta considerar, en un entorno conveniente del punto a, el cociente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ como el producto $f(x) \cdot \dfrac{1}{g(x)}$ y aplicar el teorema del límite de un producto.

Resulta, entonces,

$$\text{lím}_a \frac{f(x)}{g(x)} = \text{lím}_a \left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right] = \text{lím}_a f(x) \cdot \text{lím}_a \frac{1}{g(x)} = \ell \cdot \frac{1}{\ell'} = \frac{\ell}{\ell'}.$$

Funciones trascendentes

Consideraremos ahora el límite de algunas funciones trascendentes, como la función logarítmica y la función exponencial. El concepto de logaritmo puede ser introducido de varias formas y, en cada caso, se demuestran por métodos diferentes las propiedades conocidas en el campo real.

(En un curso más avanzado de análisis, por ejemplo, se puede definir logaritmo natural utilizando integrales, de la siguiente manera:

$$\forall a > 0 : \ln a = \int_1^a \frac{dx}{x},$$

y demostrar, a partir de esta definición, las propiedades usuales en $\mathbb{R}$.)

En cualquier método que se utilice, la función exponencial y la función logarítmica se definen en forma tal que resulta:

$$y = b^x \Leftrightarrow \log_b y = x.$$

Utilizando propiedades de los logaritmos de números reales, puede demostrarse que, si una función f tiene límite finito y positivo en un punto a, entonces "el límite del logaritmo es el logaritmo del límite", es decir:

$$\text{lím}_a[\log_b f(x)] = \log_b[\text{lím}_a f(x)] \; (b>1).$$

◆ *Demostración*

Sea $\text{lím}_a f(x) = \ell > 0$.

Por el teorema del límite de un cociente: $\text{lím}_a \dfrac{f(x)}{\ell} = 1.$

Ahora bien, siendo $b > 1$ y $\epsilon > 0$, resulta $b^\epsilon > 1$, y por lo tanto es

$$\text{lím}_a \frac{f(x)}{\ell} = 1 < b^\epsilon$$

Por una propiedad del límite finito (pág. 133),

$$\exists E'(a,\delta) \,/\, \forall x: \left(x \in D_f \cap E'(a,\delta) \;\Rightarrow\; \frac{f(x)}{\ell} < b^{\epsilon} \right).$$

Por las mismas razones, siendo $b^{-\epsilon} < 1$, resulta:

$$\exists E'(a,\delta') \,/\, \forall x: \left(x \in D_f \cap E'(a,\delta') \;\Rightarrow\; \frac{f(x)}{\ell} > b^{-\epsilon} \right).$$

Luego, si $\delta < \delta'$, $\forall x: \left(x \in D_f \cap E'(a,\delta) \Rightarrow b^{-\epsilon} < \frac{f(x)}{\ell} < b^{\epsilon} \right)$.

Por propiedad del logaritmo de base $b > 1$, es:

$$\log_b b^{-\epsilon} < \log_b \frac{f(x)}{\ell} < \log_b b^{\epsilon}.$$

Además, en el entorno mencionado se verifican las siguientes proposiciones, cada una equivalente a la anterior:

$$-\epsilon < \log_b \frac{f(x)}{\ell} < \epsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\epsilon < \log_b f(x) - \log_b \ell < \epsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad |\log_b f(x) - \log_b \ell| < \epsilon.$$

Aplicando la definición de límite, resulta la tesis, pues es

$$\text{lím}_a [\log_b f(x)] = \log_b \ell.$$

También puede probarse, para la función exponencial, que

$$\text{lím}_a [k^{f(x)}] = k^{\text{lím}_a f(x)} \quad (k>0),$$

y para la función potencial exponencial, que

$$\text{lím}_a \; [f(x)^{g(x)}] = [\text{lím}_a f(x)]^{\text{lím}_a g(x)} \; (\text{lím}_a f(x) > 0).$$

EJERCICIOS

Calcular los siguientes límites:

1) $\text{lím}_2 \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$

2) $\text{lím}_0 \dfrac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^3 - 4x}$

3) $\text{lím}_{-2} \dfrac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{x^2 + 3x + 2}$

4) $\text{lím}_3 \left(\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x + 3} \right)^{\frac{1}{x} + 2}$

5) $\text{lím}_{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\text{sen}^2 x + 3 \,\text{sen}\, x - 4}{\text{sen}^2 x - 3 \,\text{sen}\, x + 2}$

6) $\text{lím}_3 \left(\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} \right)^{2x}$

7) $\text{lím}_0 \dfrac{\cos^2 x + 3 \cos x - 4}{\cos^2 x - 1}$

8) $\text{lím}_{-1} \dfrac{2x^2 - x - 3}{x^2 - x - 2}$

9) $\text{lím}_3 \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 12}$

10) $\text{lím}_2 \dfrac{x^3 + x^2 - 16x + 20}{x^2 - 3x + 2}$

11) $\text{lím}_{-1} \dfrac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 - x - 2}$

12) $\text{lím}_1 \dfrac{2x^2 - 2x}{x - 1}$

13) $\text{lím}_1 \dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 + x - 2}$

14) $\text{lím}_4 \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

15) $\text{lím}_1 \dfrac{\sqrt{x} - 1}{2x - 2}$

16) $\text{lím}_{\sqrt{3}} \dfrac{x - \sqrt{3}}{x^2 - 3}$

17) $\text{lím}_0 \dfrac{\cos(6x) - \cos(2x)}{x^2}$

18) $\text{lím}_0 \dfrac{\text{sen}(3x) + x}{x - \text{sen}(2x)}$

19) $\text{lím}_0 \dfrac{\sqrt{1 - \text{sen}\, x} - \sqrt{1 + \text{sen}\, x}}{x}$

20) $\text{lím}_0 \dfrac{\sqrt{x^2 + x + 4} - 2}{x}$

21) $\text{lím}_0 \dfrac{\text{tg}(3x) - \text{sen}(5x)}{2x}$

22) $\text{lím}_8 \dfrac{2 - \sqrt{x - 4}}{x^2 - 64}$

VII. Límite infinito

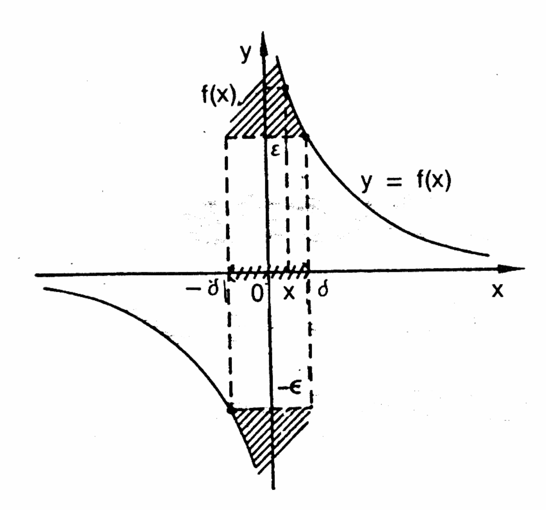
La no existencia de límite finito puede significar, como se ha visto, que existen límites finitos distintos a derecha y a izquierda del punto de acumulación elegido, como sucede en el origen para la función signo (pág. 130). También puede significar que la función oscila, como sucede en el origen con la función sen $\frac{\pi}{x}$ (pág. 60). O bien, que cuando x se aproxima al punto de acumulación, los valores de la función superan, en valor absoluto, a cualquier número positivo prefijado.

Consideremos la función $f: x \to \frac{1}{x}$, que no tiene límite finito en el origen.

Si prefijamos cualquier $\epsilon > 0$, siempre es posible encontrar un entorno reducido del punto de acumulación 0 en el cual los valores correspondientes de la función son mayores, en valor absoluto, que ϵ.

Por ejemplo, si $\epsilon = 10^6$, $\left|\frac{1}{x}\right| > 10^6$, lo cual equivale a: $|x| < \frac{1}{10^6}$.

Es decir, $0 < |x-0| < \frac{1}{10^6} \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right| > 10^6$, y en el entorno reducido de 0, de radio 10^{-6}, cualquier x del dominio tiene una imagen mayor, en valor absoluto, que 10^6.



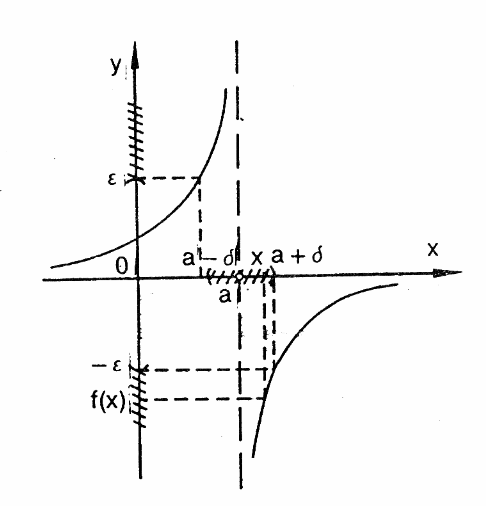
En general basta considerar $\delta = \frac{1}{\epsilon}$ para que se verifique la siguiente proposición:

$$0 < |x-0| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right| > \epsilon \text{, pues } |x| < \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right| > \epsilon.$$

Definición

Una función tiene límite infinito en el punto de acumulación a de su dominio si y sólo si para cualquier número positivo ϵ existe un número positivo δ, tal que:

$$\forall x: (x \in D_f \wedge 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > \epsilon).$$



La recta de ecuación x = a se denomina asíntota vertical al gráfico de la función f. En este caso interesa especialmente ϵ "tan grande como se quiera".

Por convención, para indicar la situación anterior se admite el simbolismo siguiente:

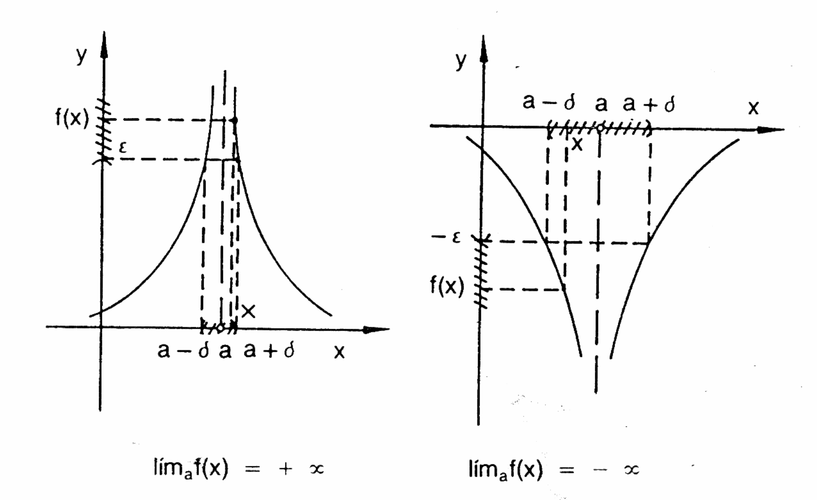
$$\text{lím}_a f(x) = \infty.$$

El concepto de límite infinito se puede diversificar, considerando el signo de los valores de la función:

$\text{lím}_a f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ / \ \forall x: (x \in D_f \wedge 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > \epsilon)$

y

$\text{lím}_a f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ / \ \forall x: (x \in D_f \wedge 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < -\epsilon).$



$\text{lím}_a f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\text{lím}_a f(x) = -\infty$

Ejemplo 1

Utilizando la definición, probaremos que $\text{lím}_3 \frac{1}{x-3} = \infty$. Ello se verifica si y sólo si:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ / \ \forall x: \left(x \in D_f \wedge 0 < |x-3| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x-3}\right| > \epsilon\right).$$

Obsérvese que $0 < |x-3| < \delta \Rightarrow \frac{1}{|x-3|} > \frac{1}{\delta}$

Por lo tanto, si elegimos $\frac{1}{\delta} = \epsilon$, o sea, $\delta = \frac{1}{\epsilon}$, se satisface inmediatamente la definición propuesta.

Ejemplo 2

$$\text{lím}_5 \frac{2x-6}{x-5} = \infty \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \left(0 < |x-5| < \delta \Rightarrow \left|\frac{2x-6}{x-5}\right| > \epsilon\right).$$

Vemos que $\left|\frac{2x-6}{x-5}\right| > \epsilon \Leftrightarrow |x-5| < \frac{2|x-3|}{\epsilon}$

Exigimos: $0 < \delta < 1 \Rightarrow 4 < x < 6 \Rightarrow |x-3| > 1$.

Luego, si $\delta = \text{mínimo}\left(1, \frac{2}{\epsilon}\right)$, resulta:

$$0 < |x-5| < \frac{2}{\epsilon} \Rightarrow \frac{2}{|x-5|} > \epsilon \Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{|x-5|} > \epsilon \Rightarrow 2\frac{|x-3|}{|x-5|} > \epsilon \Rightarrow \left|\frac{2x-6}{x-5}\right| > \epsilon.$$

◆ *Ejemplo 3*

$$\text{lím}_5 \frac{x-3}{x^2-4x-5} = \infty \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0: \left(0 < |x-5| < \delta \Rightarrow \left|\frac{x-3}{x^2-4x-5}\right| > \epsilon\right).$$

Observamos que:

$$\left|\frac{x-3}{x^2-4x-5}\right| > \epsilon \Leftrightarrow \frac{|x-3|}{|x-5|\,|x+1|} > \epsilon \Leftrightarrow |x-5| < \frac{1}{\epsilon}\frac{|x-3|}{|x+1|}.$$

Si exigimos $0 < \delta < 1$, o bien $4 < x < 6$, resulta $|x-3| > 1$ y también $|x+1| < 7$.

Luego, podemos elegir $\delta = \text{mín}\left(1, \frac{1}{7\epsilon}\right)$.

Ahora bien,

$$0 < |x-5| < \delta \Rightarrow |x-5| < \frac{1}{7\epsilon} \Rightarrow \frac{1}{7|x-5|} > \epsilon \Rightarrow \frac{|x-3|}{|x+1|\,|x-5|} > \epsilon.$$

La última implicación mantiene el sentido de la desigualdad, pues se ha reemplazado el numerador 1 por un valor mayor y el denominador 7 por un valor menor, lo que incrementa la fracción.

EJERCICIOS

1) Demostrar que $\text{lím}_0 \frac{1}{x} = \infty$

2) Demostrar que $\text{lím}_4 \frac{1}{x-4} = \infty$

3) Demostrar que $\text{lím}_0 \frac{1}{x^2} = +\infty$

4) Demostrar que $\text{lím}_0 \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$

5) Demostrar que $\text{lím}_7 \frac{3}{x-7} = \infty$

6) Demostrar que $\text{lím}_2 \frac{5x-1}{x-2} = \infty$

7) Demostrar que $\text{lím}_{-1} \frac{x-2}{x^2-2x-3} = \infty$

VIII. Generalización del concepto de límite

Interesa también considerar una definición de límite para cada uno de los casos siguientes:

1) límite finito para $x \rightarrow \pm\infty$;

2) límite infinito para $x \rightarrow \pm\infty$.

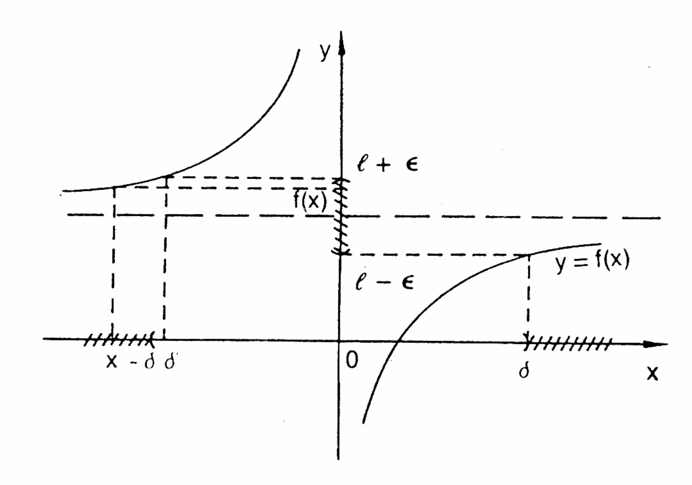
Si f es una función definida en un conjunto no acotado, aceptamos las siguientes definiciones para los casos propuestos:

Primer caso: límite finito en un conjunto no acotado

$$\text{lím}_{\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 / \forall x: (x \in D_f \wedge |x| > \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon)$$

$$\text{lím}_{+\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 / \forall x: (x \in D_f \wedge x > \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon)$$

$$\text{lím}_{-\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 / \forall x: (x \in D_f \wedge x < -\delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon)$$



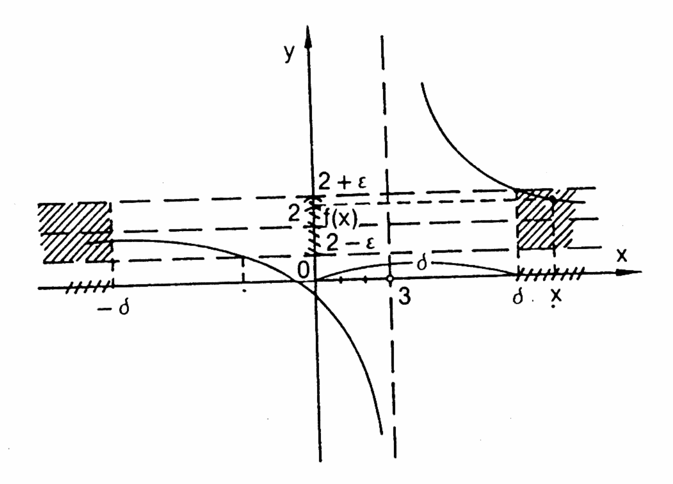
La recta de ecuación $y = \ell$ se denomina asíntota horizontal al gráfico de la función f.

De acuerdo con el gráfico, se verifica $\text{lím}_{+\infty} f(x) = \ell$ y $\text{lím}_{-\infty} f(x) = \ell$. También, $\text{lím}_{\infty} f(x) = \ell$.

Obsérvese que en este caso debe elegirse el mayor entre los números δ y δ'.

Ejemplo 1

Sea $f: x \rightarrow \frac{2x+1}{x-3}$



Para calcular $\lim_{\infty} f(x)$ es conveniente dividir numerador y denominador por x, observando que $\frac{1}{x}$ y $\frac{3}{x}$ son infinitésimos si $x \to \infty$.

Resulta $\lim_{\infty} \dfrac{2x+1}{x-3} = \lim_{\infty} \dfrac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}} = 2.$

Se verifica, además, $\lim_{+\infty} f(x) = 2$ y $\lim_{-\infty} f(x) = 2$.

Probaremos, por ejemplo, que $\lim_{+\infty} f(x) = 2$. Para ello $\forall \epsilon > 0$ debemos encontrar $\delta(\epsilon) > 0$, tal que

$$\forall x: \left(x \in D_f \wedge x > \delta \Rightarrow \left|\frac{2x+1}{x-3} - 2\right| < \epsilon\right).$$

Observemos que $\left|\dfrac{2x+1}{x-3} - 2\right| = \dfrac{7}{|x-3|}$.

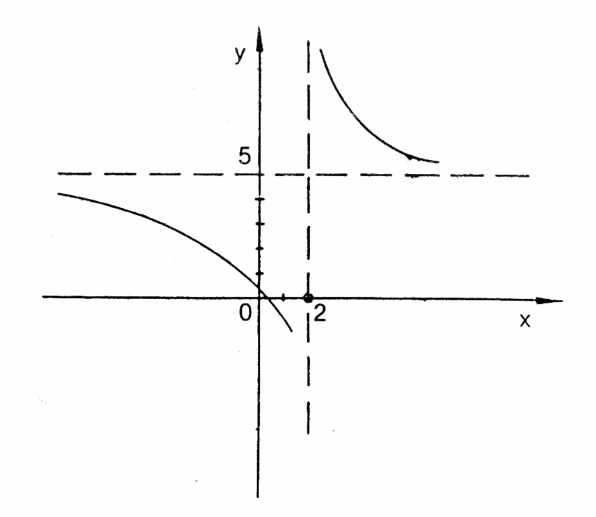
Si hacemos $\delta \geq 3 + \frac{7}{\epsilon}$, resulta:

$$x > \delta \Rightarrow x > 3 + \frac{7}{\epsilon} \Rightarrow x - 3 > \frac{7}{\epsilon} \Rightarrow |x-3| > \frac{7}{\epsilon} \Rightarrow \frac{7}{|x-3|} < \epsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{2x+1}{x-3} - 2\right| < \epsilon.$$

Ejemplo 2

Sea $f: x \to \dfrac{5x+1}{x-2}$



$$\lim_{-\infty} \frac{5x+1}{x-2} = \lim_{-\infty} \frac{5+\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}} = 5$$

Debemos probar que $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta(\epsilon) > 0$, tal que:

$$\forall x: \left(x \in D_f \wedge x < -\delta \to \left|\frac{5x+1}{x-2} - 5\right| < \epsilon\right).$$

Pero $\left|\dfrac{5x+1}{x-2} - 5\right| = \dfrac{11}{|x-2|}$.

Elegimos $\delta \geq \dfrac{11}{\epsilon}$:

$$x < -\delta \Rightarrow x < -\frac{11}{\epsilon} \Rightarrow -x > \frac{11}{\epsilon} \Rightarrow -x + 2 > \frac{11}{\epsilon} \Rightarrow$$

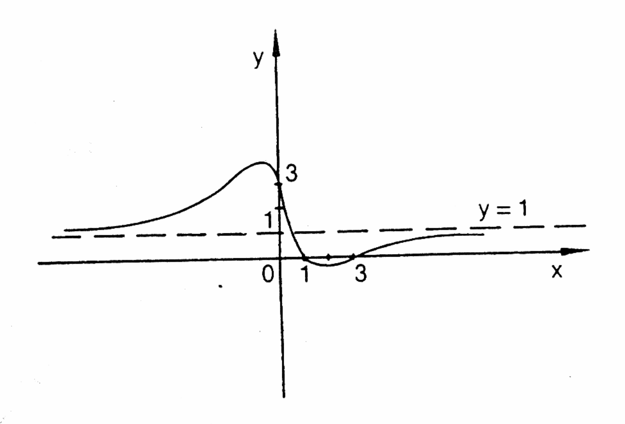
$$\Rightarrow |-x+2| > \frac{11}{\epsilon} \Rightarrow |x-2| > \frac{11}{\epsilon} \Rightarrow \frac{11}{|x-2|} < \epsilon \Rightarrow |f(x) - 5| < \epsilon.$$

Ejemplo 3

Sea $f: x \to \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 1}$.

Para calcular $\lim_{\infty} f(x)$ se puede dividir numerador y denominador por x^2:

$$\lim_{\infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 1} = \lim_{\infty} \frac{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1.$$



Resulta también $\lim_{-\infty} f(x) = 1$ y $\lim_{\infty} f(x) = 1$.

◆ *Ejemplo 4*

Sea $f: x \to \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1} - 1}$

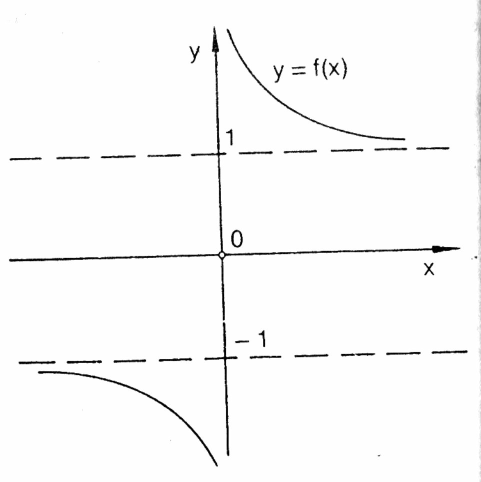
Para calcular $\lim_{\infty} f(x)$ podemos dividir numerador y denominador por $\sqrt{x^2} = |x|$. Como el valor $|x|$ depende del signo del número x, deben calcularse separadamente $\lim_{+\infty} f(x)$ y $\lim_{-\infty} f(x)$.

Considerando $x > 0$, resulta $\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} \dfrac{\frac{x}{|x|}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{|x|}} =$

$$= \lim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x}} = 1.$$

Si $x < 0$, resulta $\lim_{-\infty} f(x) = \lim_{-\infty} \dfrac{\frac{x}{|x|}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{|x|}} =$

$$= \lim_{-\infty} \frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x}} = -1.$$



Segundo caso: límite infinito en un conjunto no acotado

$\lim_{\infty} f(x) = \infty \iff \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 / \forall x: (x \in D_f \wedge |x| > \delta \Rightarrow |f(x)| > \epsilon)$

$\lim_{+\infty} f(x) = +\infty \iff \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 / \forall x: (x \in D_f \wedge x > \delta \Rightarrow f(x) > \epsilon)$

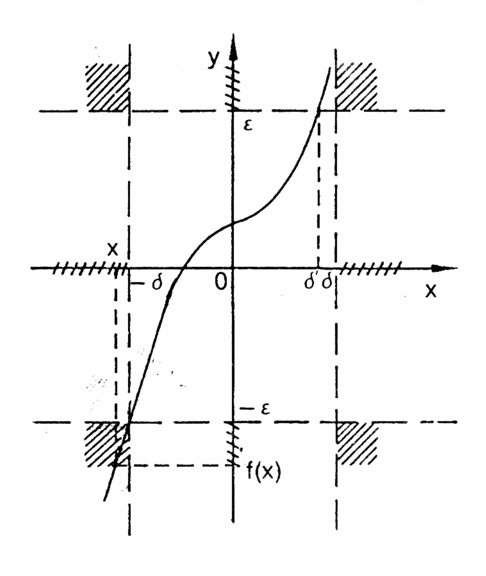
$\lim_{+\infty} f(x) = -\infty \iff \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 / \forall x: (x \in D_f \wedge x > \delta \Rightarrow f(x) < -\epsilon)$

$\lim_{-\infty} f(x) = +\infty \iff \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 / \forall x: (x \in D_f \wedge x < -\delta \Rightarrow f(x) > \epsilon)$

$\lim_{-\infty} f(x) = -\infty \iff \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 / \forall x: (x \in D_f \wedge x < -\delta \Rightarrow f(x) < -\epsilon)$

Ejemplo

Sea $f: x \to x^3 + 1$.



$\lim_{+\infty} (x^3 + 1) = +\infty$

$\lim_{-\infty} (x^3 + 1) = -\infty$

También: $\lim_{\infty} (x^3 + 1) = \infty$

EJERCICIOS

1) Demostrar que $\lim_{\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

2) Demostrar que $\lim_{\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

3) Demostrar que $\lim_{+\infty} \dfrac{2x+5}{x+1} = 2$

4) Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{\infty} \dfrac{3x-5}{2x+3}$ (dividir numerador y denominador por x)

b) $\lim_{-\infty} \dfrac{3x-5}{2x+3}$ c) $\lim_{+\infty} \dfrac{3x-5}{2x+3}$

d) $\lim_{\infty} \dfrac{2x+1}{x^2-3x+5}$ e) $\lim_{\infty} \dfrac{x^3-2x+3}{3x^2-5x+1}$

f) $\lim_{\infty} \dfrac{3x^2+5x-1}{x^2-2}$ g) $\lim_{\infty} \dfrac{8x-3x^2+1}{9x^2-2x+4}$

5) a) $\lim_{+\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{x^2+1}+x}$ b) $\lim_{-\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{x^2+1}+x}$

(dividir numerador y denominador por $\sqrt{x^2} = |x|$)

6) a) $\lim_{+\infty} \dfrac{2x-1}{\sqrt{4x^2+x}-x}$ b) $\lim_{-\infty} \dfrac{2x-1}{\sqrt{4x^2+x}-x}$

7) a) $\lim_{+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$ b) $\lim_{-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$

8) a) $\lim_{+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$ b) $\lim_{-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$

9) a) $\lim_{+\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{9x^2+x+2}+3x}$ b) $\lim_{-\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{9x^2+x+2}+3x}$

10) a) $\lim_{+\infty} e^x$ b) $\lim_{-\infty} e^x$

c) $\lim_{+\infty} e^{-x}$ d) $\lim_{-\infty} e^{-x}$

e) $\lim_{+\infty} \operatorname{th} x$ f) $\lim_{-\infty} \operatorname{th} x$

11) Calcular los siguientes límites laterales:

a) $\lim_{0^+} \left(3^{\frac{1}{x}}\right)$ b) $\lim_{0^-} \left(3^{\frac{1}{x}}\right)$

c) $\lim_{0^+} \left(e^{-\frac{1}{x}}\right)$ d) $\lim_{0^-} \left(e^{-\frac{1}{x}}\right)$

12) Calcular los siguientes límites laterales:

a) $\lim_{0^+} \dfrac{1-3^{\frac{1}{x}}}{2+3^{\frac{1}{x}}}$ b) $\lim_{0^+} \dfrac{1-3^{\frac{1}{x}}}{2+3^{\frac{1}{x}}}$

(dividir numerador y denominador por $3^{\frac{1}{x}}$)

c) $\lim_{0^+} \dfrac{5^{\frac{1}{x}}-2}{3+5^{\frac{1}{x}}}$ d) $\lim_{0^-} \dfrac{5^{\frac{1}{x}}-2}{3+5^{\frac{1}{x}}}$

IX. Indeterminación del límite

Ya se ha indicado que una función cuyo límite es cero en el punto a se llama infinitésimo. De la misma forma, si una función tiene límite infinito en el punto a, se llama infinito. Ambas denominaciones valen también para el caso de x tendiendo a infinito.

Puede considerarse, en especial, el cálculo de límites y la comparación de infinitésimos e infinitos, pero se trata solamente de casos particulares del límite de una función.

En general, si f y g son infinitésimos en el punto a y $\lim_a \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell \neq 0$, entonces f y g son infinitésimos del mismo orden, y si $\ell = 1$, se llaman, además, infinitésimos equivalentes.

Si $\lim_a \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, entonces f es de orden superior a g,

y si $\lim_a \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$, entonces, f es de orden inferior a g.

Recuérdese que al hablar de $\lim_a \dfrac{f(x)}{g(x)}$ para f y g infinitésimos, como $\lim_a g(x) = 0$, no se puede aplicar el teorema correspondiente al límite de un cociente. Para calcular dicho límite pueden hacerse previamente todas las simplificaciones, operaciones y sustituciones convenientes, recordando que $x - a \neq 0$.

Ejemplos

1) $\lim_0 \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x} = \lim_0 \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_0 (\operatorname{sen} x) = 1 \cdot 0 = 0.$

2) $\lim_1 \dfrac{2x^2-x-1}{x^2+x-2} = \lim_1 \dfrac{(2x+1)(x-1)^*}{(x+2)(x-1)} = \lim_1 \dfrac{2x+1}{x+2} = 1.$

* Considerando el polinomio $p(x) = 2x^2 - x - 1$, como $p(1) = 0$, por el teorema del resto p(x) es divisible por (x − 1). Lo mismo sucede con el denominador.

3) $\lim_2 \dfrac{x^2-x-2}{x^2-4x+4} = \lim_2 \dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x-2)} = \lim_2 \dfrac{x+1}{x-2} = \infty.$

Los ejemplos anteriores indican que el cociente de dos infinitésimos puede tener cualquier límite, finito o infinito, según las funciones elegidas.

Se dice, por ello, que el cociente de dos infinitésimos es un caso de *indeterminación del límite.*

Antes de referirnos a los casos de indeterminación del límite hemos de aclarar una vez más este concepto. Un límite es indeterminado cuando no puede anticiparse o determinarse el resultado y se deben efectuar simplificaciones, reemplazos lícitos, etc., antes de encontrarlo.

Por ejemplo, el producto de un infinitésimo por una función acotada tiene límite nulo (pág. 138). Por lo tanto, está determinado. En cambio, no puede anticiparse el resultado para el límite del producto de un infinitésimo por una función no acotada. Este es un caso de límite indeterminado.

Enunciamos a continuación distintos casos de indeterminación del límite.

Casos de indeterminación del límite

1) Cociente de dos infinitésimos.

De la misma forma, las expresiones siguientes corresponden a límites indeterminados:

2) Cociente de dos infinitos.
3) Producto de un infinitésimo por un infinito.
4) Suma de dos infinitos de distinto signo.
5) $f(x)^{g(x)}$ si $f(x) \to 1$ y $g(x) \to \infty$.
6) $f(x)^{g(x)}$ si $f(x) \to 0$ y $g(x) \to 0$.
7) $f(x)^{g(x)}$ si $f(x) \to \infty$ y $g(x) \to 0$.

Para calcular límites donde se presentan casos de indeterminación, conviene, como ya se ha visto, recurrir a artificios de tipo algebraico.

Por ejemplo, para calcular $\lim_{\infty} \dfrac{5x^2 - 2x + 6}{3x^2 - x + 3}$, que es el cociente de dos infinitos, se puede dividir numerador y denominador por x^2.

Resulta $\lim_{\infty} \dfrac{5 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{6}{x^2}}{3 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2}} = \dfrac{5}{3}$.

En forma análoga, $\lim_{\infty} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 8}{x^4 + x^2 + 9x} = \lim_{\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{8}{x^4}}{1 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{9}{x^3}} = 0$

(dividiendo numerador y denominador por x^4).

Para calcular un límite del tipo 5 se recurre al número e.

$$e = \lim_{\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_0 (1 + x)^{\frac{1}{x}} \quad \text{(véase cap. 9).}$$

Por ejemplo, tratemos de calcular $\lim_{\infty} \left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{3x}$.

Se trata de una función potencial exponencial, cuya base tiende a 1 y cuyo exponente tiende a infinito.

Haremos intervenir al número $e = \lim_{\infty} \left(1 + \dfrac{1}{u}\right)^u$.

$$\lim_{\infty} \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{3x} = \lim_{\infty} \left(\frac{x-2}{x-2} + \frac{5}{x-2}\right)^{3x} = \lim_{\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x-2}{5}}\right)^{3x} =$$

$$= \lim_{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x-2}{5}}\right)^{\frac{x-2}{5}}\right]^{\frac{5 \cdot 3x}{x-2}} = e^{\lim_{\infty} \frac{15x}{x-2}} = e^{15}.$$

Téngase en cuenta que el cálculo de límites indeterminados puede requerir, a esta altura del curso, recursos artificiosos, como cambios de variables o reemplazo de infinitésimos por otros equivalentes. Salvo que se quiera agilizar cierta destreza para descubrir artificios, es preferible dejar la resolución de los casos más complicados para aplicar la regla de L'Hôpital, que utiliza derivadas y facilita notablemente los cálculos.

EJERCICIOS

Calcular los siguientes límites:

1) $\lim_0 \, (1+5x)^{\frac{1}{x}}$

2) $\lim_{\infty} \left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x}$

3) $\lim_{\infty} \left(\dfrac{2x+1}{2x-3}\right)^{x+5}$

4) $\lim_{\infty} \left(\dfrac{1+5x}{3+5x}\right)^{2x-1}$

5) $\lim_0 \, [\cot x - \cot(2x)]$

6) $\lim_{\infty} \dfrac{3x^2 - 5x + 2}{2x^2 + 3x - 1}$

7) $\lim_{\infty} \dfrac{2x^3 - 5x + 1}{3x^2 + 6}$

8) $\lim_{\infty} \dfrac{2x - 3}{3x^4 + 2x^2 - 1}$

9) $\lim_{-1} \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - x^2 + 2x + 4}$

10) $\lim_{-2} \left(\dfrac{x^2+2x-1}{x+3}\right)^{x+1}$

11) $\lim_0 \dfrac{\operatorname{tg}(ax)}{bx}$

12) $\lim_{-2} \dfrac{2x^2 + 7x + 6}{3x^2 + 5x - 2}$

13) $\lim_{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 2}{\operatorname{sen}^2 x - 4 \operatorname{sen} x + 3}$

14) $\lim_{\infty} \left(\dfrac{4x-3}{4x+5}\right)^{3x+1}$

15) $\lim_{\infty} \left(\dfrac{3x+1}{3x-5}\right)^{2x}$

16) $\lim_0 \dfrac{x^4 + x^3 + x}{x^2 - 2x}$

17) $\lim_0 \dfrac{4x^3 + 2x^2 + 6x}{x^2 - 2x}$

18) $\lim_0 \dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x}$

19) Siendo $f: x \to \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 6}$, calcular: a) $\lim_{-3} f(x)$; b) $\lim_2 f(x)$; c) $\lim_{\infty} f(x)$.

20) Siendo $f: x \to \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 + 4x + 3}$, calcular: a) $\lim_{-1} f(x)$; b) $\lim_2 f(x)$; c) $\lim_{-3} f(x)$.

21) $\lim_0 \dfrac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5}}{x}$

22) $\lim_1 \dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{5x+3}-\sqrt{3x+5}}$

23) $\lim_\infty \dfrac{5x+1}{3x+\sqrt[3]{x}}$

24) $\lim_\infty \dfrac{\sqrt[3]{3+x^2}}{2x+3}$

25) $\lim_\infty \dfrac{5x^3}{7+x\sqrt{x}}$

26) $\lim_2 \left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{6x}{8-x^3}\right)$

27) $\lim_0 \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

28) $\lim_0 \ (\cos x)^{\frac{1}{x}}$

X. Asíntotas lineales a curvas planas

Ya se ha considerado, en el capítulo 3, al aproximar el gráfico de funciones racionales, la idea de asíntota.

Volvemos ahora sobre la misma idea, utilizando límite.

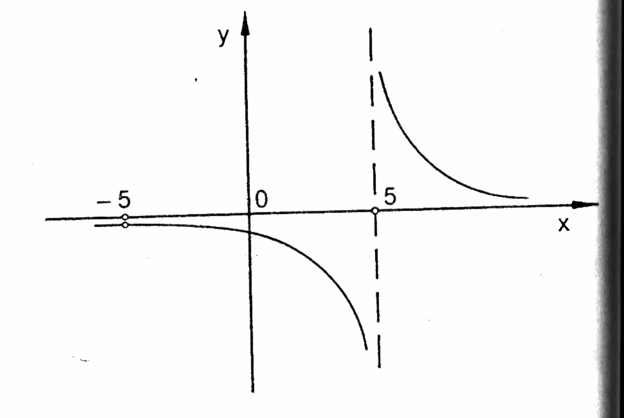
1) Asíntota vertical

Definición

La recta de ecuación $x = a$ es *asíntota vertical* al gráfico de la función f si y sólo si $\lim_a f(x) = \infty$.

Ejemplo 1

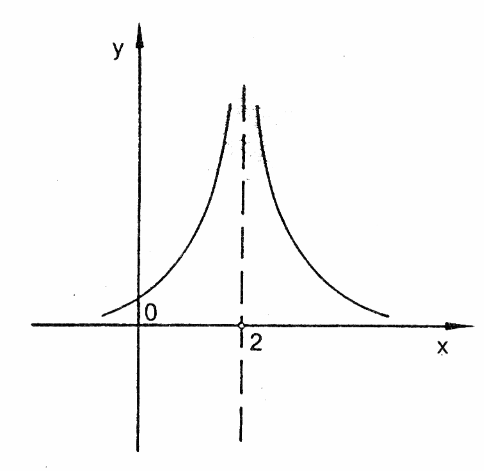
Sea $f: x \rightarrow \dfrac{x+5}{x^2-25}$.



$\lim_5 \dfrac{x+5}{x^2-25} = \infty \Rightarrow$ la recta de ecuación $x = 5$ es asíntota vertical al gráfico de f.

Ejemplo 2

Sea $f: x \rightarrow \dfrac{1}{(x-2)^2}$.



$\lim_2 \dfrac{1}{(x-2)^2} = \infty \Rightarrow$ la recta de ecuación $x = 2$ es asíntota vertical al gráfico de f.

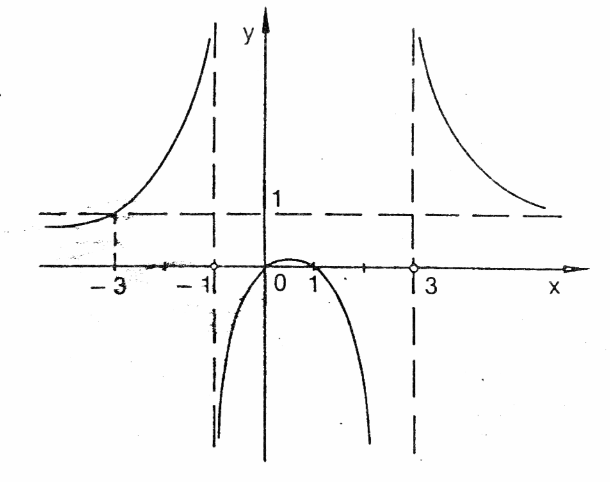
2) Asíntota horizontal

Definición

La recta de ecuación $y = \ell$ es *asíntota horizontal* al gráfico de la función f si y sólo si $\lim_\infty f(x) = \ell$.

Ejemplo

Sea $f: x \rightarrow \dfrac{x^2-x}{x^2-2x-3}$.



$\lim_\infty \dfrac{x^2-x}{x^2-2x-3} = 1 \Rightarrow$ la recta de ecuación $y = 1$ es asíntota horizontal.

Además,

$\lim_{-1} \dfrac{x^2-x}{x^2-2x-3} = \infty \Rightarrow$ la recta de ecuación $x = -1$ es asíntota vertical,

y $\lim_3 \frac{x^2 - x}{x^2 - 2x - 3} = \infty \Rightarrow$ la recta de ecuación $x = 3$ es asíntota vertical.

Obsérvese que el gráfico de f corta a la asíntota horizontal en el punto $(-3;1)$.

El gráfico de una función puede cortar a una asíntota horizontal u oblicua en n puntos. Por ejemplo, la función $f: x \to 2^{-x}$ sen x admite como asíntota horizontal al eje x y lo corta n veces para cualquier número natural n.

3) **Asíntota oblicua**

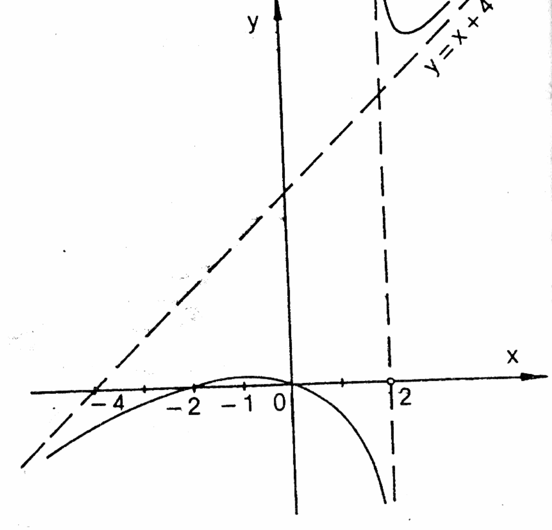
Definición

La recta de ecuación $y = px + q$ $(p \neq 0)$ es *asíntota oblicua* al gráfico de la función f si y sólo si $\lim_\infty [f(x) - (px + q)] = 0$.

En este caso se verifica $\lim_\infty f(x) = \infty$ y $f(x) = px + q + g(x)$, donde g es infinitésimo para $x \to \infty$.

Ejemplo

Sea $f: x \to \frac{x^2 + 2x}{x - 2}$.



Para encontrar la ecuación de la asíntota oblicua es conveniente efectuar la división de polinomios. Resulta $f(x) = (x+4) + \frac{8}{x-2}$. Luego, la recta de ecuación $y = x + 4$ es asíntota oblicua al gráfico de f. En efecto, es $\lim_\infty [f(x) - (x+4)] = \lim_\infty \frac{8}{x-2} = 0$.

Asíntotas de este tipo aparecen en funciones racionales cuando el grado del numerador es mayor en una unidad que el grado del denominador.

En efecto, si la función racional considerada es el cociente de la función polinómica f, de grado $n \geq 2$, sobre la función polinómica h, de grado $n - 1$, al efectuar dicho cociente resulta:

$$\frac{f(x)}{h(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{h(x)},$$

donde s es un polinomio de primer grado y r es un polinomio de grado menor que el de h, según se ha visto en el ejemplo anterior.

Luego, $\frac{r}{h}$ es infinitésimo para $x \to \infty$ y s es una función lineal, cuyo gráfico es asíntota oblicua al gráfico de la función racional $\frac{f}{h}$.

EJERCICIOS

1) Gráfico aproximado, indicando asíntotas, para cada una de las siguientes funciones:

$f: x \to \frac{x - 1}{x + 2}$ $\qquad g: x \to \frac{x + 4}{x^2 - 16}$

$h: x \to \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 + 2x}$ $\qquad t: x \to \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 + x}$

2) Asíntota horizontal al gráfico de $f: x \to \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 3x - 4}$ y su intersección con el mismo. (Resolver la ecuación que se obtiene al igualar valores.)

3) Idem para $f: x \to \frac{2x^2 - x}{x^2 - 2x - 3}$.

4) Indicar dominio y ecuaciones de las asíntotas lineales a los gráficos de las siguientes funciones. Hacer un gráfico aproximado, buscando previamente las intersecciones con ambos ejes.

$f: x \to \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$ $\qquad h: x \to \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 6x + 9}$

$g: x \to \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^2 + x - 6}$ $\qquad r: x \to \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 + 3x}$

$s: x \to \frac{x - 2}{x^3 + x^2 - 6x}$ $\qquad t: x \to \frac{x^2 + 2x}{x^3 + 3x^2 - 4}$

$m: x \to \frac{x^2 - 3x}{x^3 - 16x}$ $\qquad n: x \to \frac{x^3 - 3x + 1}{x^2 + 3}$

$p: x \to \frac{x^3 + 3x^2 - 10x}{x^3 - 4x^2 + 3x}$ $\qquad q: x \to \frac{x^3 + 4x^2 - x - 4}{x^2 - 4}$

5) Indicar en qué puntos el gráfico de f corta a su asíntota oblicua si $f: x \to \frac{x^3 - 1}{3x^2 + 1}$.

6) Idem si $f: x \to \frac{x^3 + 2x - 1}{4x^2 + 10}$.

7) Dar una función cuyo gráfico admita dos asíntotas verticales y una horizontal.

8) Dar una función cuyo gráfico admita una asíntota vertical y una oblicua.

9) Dar una función cuyo gráfico corte a su asíntota oblicua.

10) Hallar dominio, asíntotas, intersecciones con los ejes y recorrido. Hacer el gráfico si $f: x \to \dfrac{3x-6}{x^2-x-2}$.

11) Ídem para $f: x \to \dfrac{x^2+2x-15}{x-1}$.

12) Dominio, asíntotas, intersecciones con los ejes y gráfico si $f{:}x \to \dfrac{3x^3-6x^2}{x^2-4}$.

13) Ídem si $f{:}x \to \dfrac{3}{2x^2-2x-4}$.

14) Hallar el conjunto de todos los números reales que satisfacen la siguiente inecuación: $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| \le 1$.

(Para verificar la solución se sugiere graficar $f \,/\, f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$.)

15) Ídem si $\left|\dfrac{x-7}{x-5}\right| \ge \dfrac{1}{4}$.

16) Ídem si $\left|\dfrac{x-2}{x-1}\right| < 5$.

RESPUESTAS A EJERCICIOS

CAPÍTULO 4

Sección II

1) $0 < \delta \le \dfrac{\epsilon}{3}$

2) $0 < \delta \le \dfrac{\epsilon}{5}$

3) $0 < \delta \le 0{,}0000125$

4) $0 < \delta \le \dfrac{\epsilon}{4}$

5) $0 < \delta \le \dfrac{\epsilon}{9}$

6) a) $0 < \delta \le \dfrac{\epsilon}{24}$

b) $0 < \delta \le \dfrac{\epsilon}{29}$

c) $0 < \delta \le \epsilon$

d) $0 < \delta \le \dfrac{\epsilon}{2}$

7) $0 < \delta \le \sqrt[3]{\epsilon}$

8) $0 < \delta \le \text{mín } (1{,}4\epsilon)$

9) $0 < \delta \le \text{mín } \left(1, \dfrac{8}{7}\epsilon\right)$

10) $0 < \delta \le \text{mín } \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\epsilon}{3}\right)$

Sección IV

1) a) 0;1 b) 2;1 c) 0

2) $\text{lím}_{0^+} f(x) = 0 \quad \text{lím}_{0^-} f(x) = -2$

3) $\text{lím}_{1^+} f(x) = 3 \quad \text{lím}_{1^-} f(x) = 2$

4) $\text{lím}_{2^+} f(x) = -1 \quad \text{lím}_{2^-} f(x) = 1$

5) $0 < \delta \le \text{mín } \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{\epsilon}{8}\right)$.

6) $\text{lím}_{3^+} f(x) = \text{lím}_{3^-} f(x) = 2 \qquad \text{lím}_{5^+} f(x) = \text{lím}_{5^-} f(x) = 6$

$\text{lím}_{-1^+} f(x) = \text{lím}_{-1^-} f(x) = 2 \qquad \text{lím}_{1^+} g(x) = \text{lím}_{1^-} g(x) = 6$

$\text{lím}_{-1^+} h(x) = 2 \ \text{lím}_{-1^-} h(x) = -2 \qquad \text{lím}_{0^+} h(x) = \text{lím}_{0^-} h(x) = 1$

Sección V

1) 2 2) -2 3) $\dfrac{1}{2}$ 4) 0 5) 0 6) $\dfrac{3}{4}$ 7) $\dfrac{3}{2}$ 8) k

9) $\dfrac{m}{n}$ 10) 5

Sección VI

1) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ 2) $\dfrac{3}{4}$ 3) 0 4) $2^{7/3}$ 5) -5 6) 0 7) $\dfrac{5}{2}$ 8) $\dfrac{5}{3}$

9) $\dfrac{5}{7}$ 10) 0 11) 0 12) 2 13) 1 14) $\dfrac{1}{4}$ 15) $\dfrac{1}{4}$ 16) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

17) 16 18) -4 19) -1 20) $\dfrac{1}{4}$ 21) -1 22) $-\dfrac{1}{64}$

Sección VII

1) $0 < \delta \le \dfrac{1}{\epsilon}$ 2) $0 < \delta \le \dfrac{1}{\epsilon}$ 3) $0 < \delta \le \dfrac{1}{\sqrt{\epsilon}}$ 4) $0 < \delta \le \dfrac{1}{\sqrt{\epsilon}}$

5) $0 < \delta \leq \frac{3}{\epsilon}$ 6) $0 < \delta \leq \text{mín}\left(1, \frac{4}{\epsilon}\right)$ 7) $0 < \delta \leq \text{mín}\left(1, \frac{2}{5\epsilon}\right)$

Sección VIII

1) $\delta \geq \frac{1}{\epsilon}$ 2) $\delta \geq \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$ 3) $\delta \geq \frac{3}{\epsilon}$

4) a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{3}{2}$ d) 0 e) ∞ f) 3 g) $-\frac{1}{3}$

5) a) $\frac{3}{2}$ b) $-\infty$

6) a) 2 b) $-\frac{2}{3}$

7) a) 1 b) $+\infty$

8) a) 1 b) $+\infty$

9) a) $\frac{1}{2}$ b) $+\infty$

10) a) $+\infty$ b) 0 c) 0 d) $+\infty$ e) 1 f) -1

11) a) ∞ b) 0 c) 0 d) ∞

12) a) $\frac{1}{2}$ b) -1 c) 1 d) $-\frac{2}{3}$

Sección IX

1) e^5 2) e^2 3) e^2 4) $e^{-4/5}$ 5) ∞

6) $\frac{3}{2}$ 7) ∞ 8) 0 9) $-\frac{2}{7}$ 10) -1

11) $\frac{a}{b}$ 12) $\frac{1}{7}$ 13) $-\frac{3}{2}$ 14) e^{-6} 15) e^4

16) $-\frac{1}{2}$ 17) -3 18) 1 19) a) ∞ b) $\frac{3}{5}$ c) 1 20) a) ∞ b) 0 c) $\frac{5}{2}$

21) $\frac{\sqrt{5}}{10}$ 22) $\sqrt{2}$ 23) $\frac{5}{3}$ 24) 0

25) ∞ 26) 0 27) 1 28) 1

Sección X

1) f: $x = -2$ as. vertical $y = 1$ as. horizontal
g: $x = 4$ as. vertical $y = 0$ as. horizontal
h: $x = -2$ as. vertical $y = x - 6$ as. oblicua
t: $x = 0$ as. vertical $y = x - 4$ as. oblicua

2) $y = 1$ as. horizontal intersección en $(-4;1)$

3) $y = 2$ as. horizontal intersección en $(-2;2)$

4) $D_f = \mathbb{R}-\{2,1,-1\}$ $x = 2$ y $x = -1$ as. vert. $y = 0$ as. hor.
$D_g = \mathbb{R}-\{-3,2\}$ $x = -3$ as. vert. $y = x - 2$ as. obliclua
$D_h = \mathbb{R}-\{3\}$ $x = 3$ as. vert. $y = 1$ as. horizontal
$D_r = \mathbb{R}-\{0,-3\}$ $x = -3$ as. vert. $y = x - 2$ as. oblicua
$D_s = \mathbb{R}-\{2,-3,0\}$ $x = -3$ y $x = 0$ as. vert. $y = 0$ as. hor.
$D_t = \mathbb{R}-\{1,-2\}$ $x = -2$ y $x = 1$ as. vert. $y = 0$ as. hor.
$D_m = \mathbb{R}-\{0,4,-4\}$ $x = 4$ y $x = -4$ as. vert. $y = 0$ as. hor.
$D_n = \mathbb{R}$ $y = x$ as. oblicua
$D_p = \mathbb{R}-\{0,1,3\}$ $x = 1$ y $x = 3$ as. vert. $y = 1$ as. hor.
$D_q = \mathbb{R}-\{2,-2\}$ $x = 2$ y $x = -2$ as. vert. $y = x + 4$ as. oblicua

5) $y = \frac{1}{3}x$ as. oblicua. El gráfico de f la corta en $(-3;-1)$

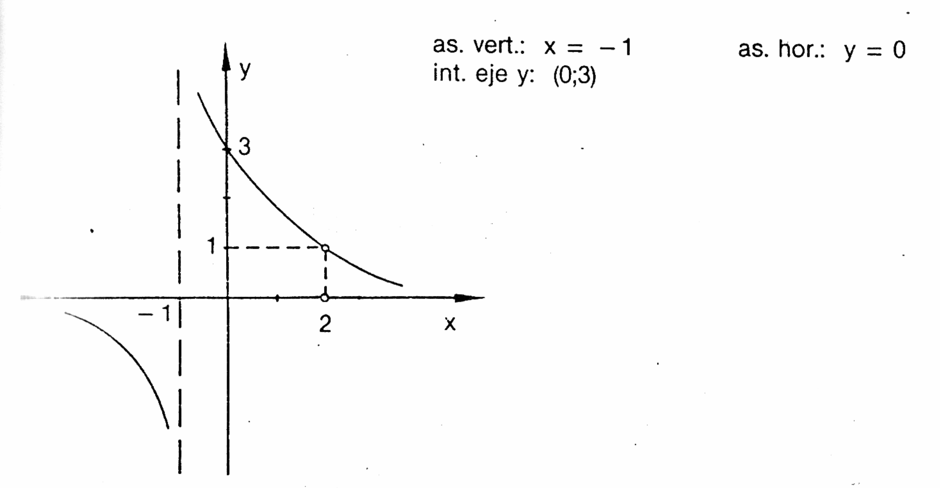
6) $y = \frac{1}{4}x$ as. oblicua. El gráfico de f la corta en $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$

7) Ejemplo: $f(x) = \dfrac{2x + 3}{(x-1)(x+5)}$

8) Ejemplo: $f(x) = \dfrac{x^2 + 5}{x - 2}$

9) Ejemplo: $f(x) = \dfrac{x^4 + 8}{x^3 + x + 2}$

10) $f(x) = \dfrac{3}{x + 1} \wedge x \neq 2$ $D_f = \mathbb{R}-\{2,-1\}$ $Rec_f = \mathbb{R}-\{0,1\}$



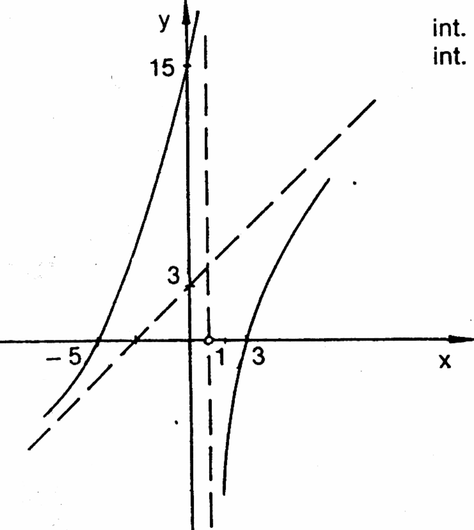
11)

$D_f = \mathbb{R}-\{1\}$ $\quad$ $Rec_f = \mathbb{R}$

as. vert.: $x = 1$ $\quad$ as. oblicua: $y = x+3$

int. eje x: (3;0) y (–5;0)

int. eje y: (0;15)

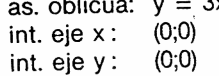


12) $f(x) = \dfrac{3x^2}{x+2} \wedge x \neq 2$

$D_f = \mathbb{R}-\{2,-2\}$

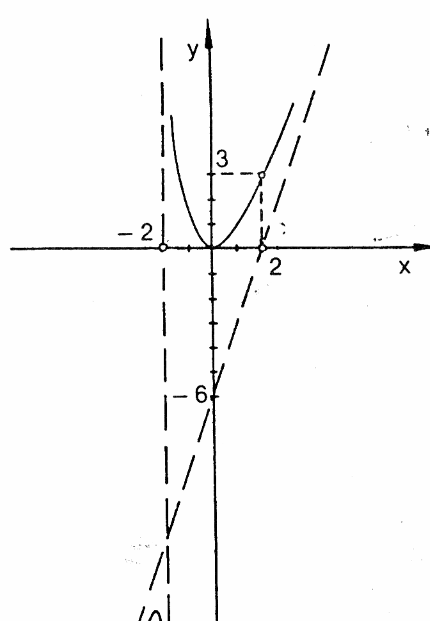
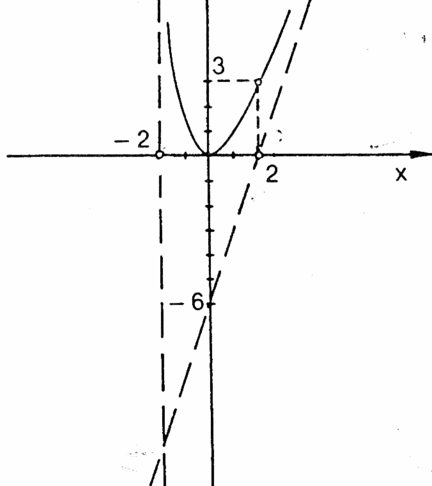
as. vert.: $x = -2$

as. oblicua: $y = 3x-6$



int. eje x: (0;0)

int. eje y: (0;0)

13)

$D_f = \mathbb{R}-\{2,-1\}$

as. vert.: $x = -1$ $x = 2$

as. hor.: $y = 0$

int. eje y: $\left(0; -\frac{3}{4}\right)$

14) $\{x / x \geq 0\}$

15) $\left\{ x / x < 5 \vee 5 < x \leq \frac{33}{5} \vee x \geq \frac{23}{3} \right\}$

16) $\left\{ x / x < \frac{3}{4} \vee x > \frac{7}{6} \right\}$

5. CONTINUIDAD

Sea f una función y a un punto de acumulación de su dominio. Como ya se ha visto, el punto a puede no pertenecer al dominio de f, es decir, el valor f(a) puede existir o no como número real.

Por otra parte, la idea de límite se desvincula de lo que sucede en el punto a, y el símbolo $\lim_a f(x)$ tiene un sentido independiente del valor f(a).

La función f puede estar definida en a y no tener límite finito en dicho punto. Puede existir $\lim_a f(x)$ y no existir f(a). Pueden existir el límite y el valor de la función y ser distintos números reales. O bien pueden existir ambos y coincidir.

I. Función continua en un punto

Si existe límite finito en un punto de acumulación a, si existe el valor f(a) y, además, ambos números son iguales, se dice que la función f es continua en el punto a.

Por lo tanto, la continuidad de una función en un punto de acumulación de su dominio se refiere a tres condiciones: la existencia de límite finito en a, la existencia de f(a) y la coincidencia de ambos valores.

Definición

Sea f una función y a un punto de acumulación de su dominio; f es continua en a si y sólo si:

1) $\exists\, f(a)$;
2) $\exists \lim_a f(x)$ (finito);
3) $\lim_a f(x) = f(a)$.

Si a no es punto de acumulación del dominio se conviene en considerar que f es continua en dicho punto si existe f(a).

Como la continuidad se basa en el concepto de límite, puede darse también la definición utilizando entornos convenientes de a y f(a): f continua en a $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \,/\, \forall x: \left(x \in D_f \ \wedge\ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon\right)$.

Nótese que, respecto de la definición de límite finito, se han introducido dos modificaciones. En primer lugar, se ha reemplazado el número ℓ por el número f(a). En

segundo lugar, no se exige que el entorno de a sea reducido, es decir, no se exige $x \neq a$, pues f está definida en a y en dicho punto se verifica:
$\forall \epsilon > 0: (|f(a) - f(a)| = 0 < \epsilon)$.

Obsérvese también que en el caso de una función continua los símbolos de función y de límite pueden conmutarse: $\lim_a f(x) = f(\lim_a x)$.

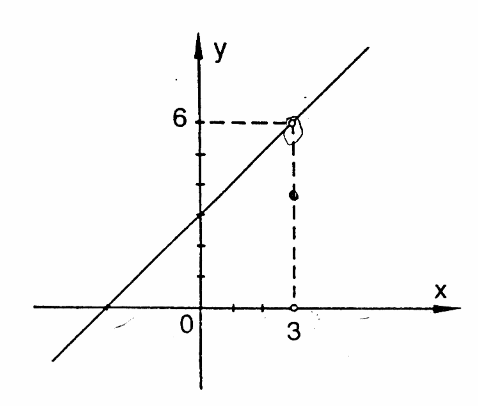
Discontinuidades

Si no se verifica la definición de continuidad en un punto a, la función considerada es discontinua en a.

Esto puede suceder si no se cumple una cualquiera de las tres condiciones que exige la definición. Es decir, una función puede ser discontinua en a porque no existe f(a) o porque no existe $\lim_a f(x)$, o porque ambos existen pero son distintos.

Caso 1

Sea $f: x \to \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$. Estudiemos la continuidad de f en el punto 3, que es punto de acumulación de su dominio.



3 no pertenece al dominio de f, o sea, no existe f(3). Sin embargo, existe $\lim_3 f(x) = 6$.

El gráfico de f es una recta de la cual se ha excluido el punto (3;6).

Puede conseguirse una función f_1, continua en el punto 3, de la siguiente manera:

$$f_1 = f \cup \{(3;6)\}.$$

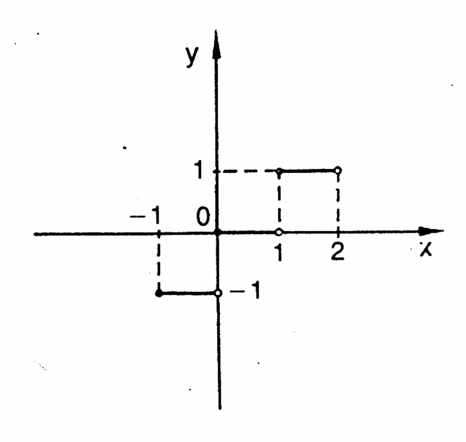
Es decir, la función f_1 tiene como imagen del número 3 el valor del límite considerado, o sea, $f_1(3) = 6$.

Obsérvese que f_1, continua en 3, no es la misma función inicial, pues el par $(3;6) \in f_1$ y, en cambio, $(3;6) \notin f$.

En este caso suele decirse que la función f presenta una discontinuidad "evitable" en el punto 3.

Caso 2

1) Sea f: x ⟶ ent x. Estudiemos la continuidad en el origen.



La función está definida en el origen y f(0) = 0. Como ya se ha visto, f no tiene límite finito en dicho punto. En este caso la discontinuidad suele llamarse "esencial". Utilizando la definición de límite por la derecha, puede decirse que esta función es continua a la derecha de a, pues

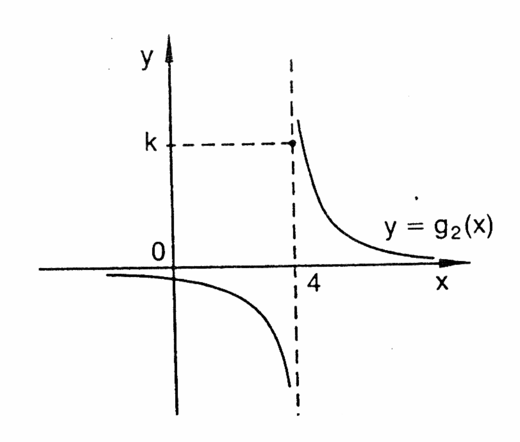
$$\lim_{0^+} \text{ent}(x) = f(0).$$

2) Sea g: $x \longrightarrow \dfrac{1}{x-4}$

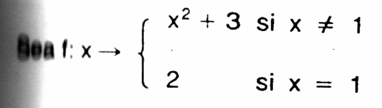
En el punto 4 la función no tiene límite finito. Como la función anterior, la función g presenta una discontinuidad esencial en dicho punto.

Si se considera la función $g_2: x \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x-4} & \text{si } x \neq 4 \\ k & \text{si } x = 4 \end{cases}$

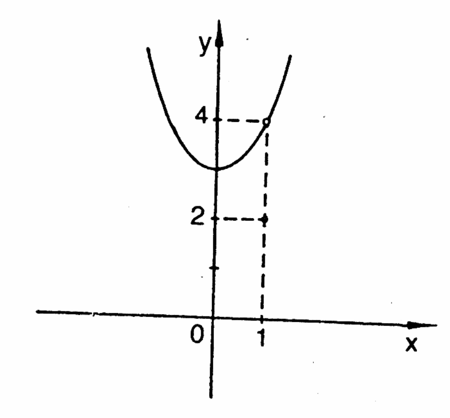
aunque ahora la función está definida en 4, la discontinuidad también es esencial.



Caso 3



Sea f: $x \longrightarrow \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$



El gráfico coincide con el de la parábola $y = x^2 + 3$, con excepción del punto (1; 4), que ha sido reemplazado por el punto aislado (1; 2).

En este caso, $\lim_1 (x^2 + 3) = 4$, $f(1) = 2$ y $\lim_1 f(x) \neq f(1)$.

De la misma forma indicada en el caso 1, la discontinuidad de f es "evitable" en el punto 1.

En resumen:

1) f presenta una discontinuidad ***evitable*** en el punto a si y sólo si f es discontinua en a y existe límite finito de f en a;
2) f presenta una discontinuidad ***esencial*** en el punto a si y sólo si f es discontinua en a y f no tiene límite finito en a.

Ejemplo 1

Sea f: $x \longrightarrow \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^3 - 3x^2 - x + 3}$. Encontrar los puntos de discontinuidad y clasificarlos.

Buscamos en primer lugar el dominio de f.

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)(x-1)(x-3)} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{1, -1, 3\}$$

Luego, f es discontinua en 1, −1 y 3.

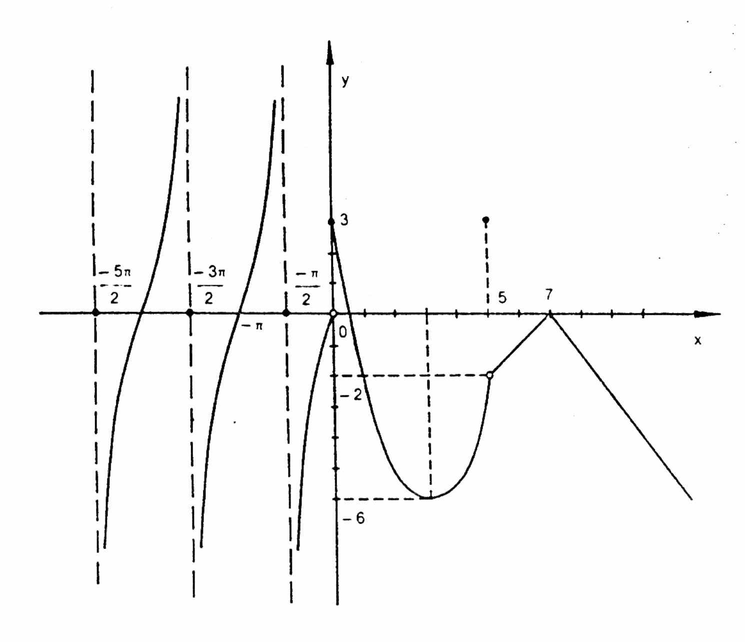
Como $\lim_1 f(x) = \lim_1 \dfrac{x+3}{(x+1)(x-3)} = -1$, la discontinuidad en el punto 1 es evitable.

Como $\lim_{-1} f(x) = \infty$, la discontinuidad en el punto −1 es esencial. Análogamente, la discontinuidad en el punto 3 es esencial porque $\lim_3 f(x) = \infty$.

◆ *Ejemplo 2*

$$f: x \to \begin{cases} -|x-7| & \text{si } x > 5 \\ 3 & \text{si } x = 5 \\ x^2 - 6x + 3 & \text{si } 0 \le x < 5 \\ \operatorname{tg} x & \text{si } x < 0 \wedge x \neq (1-2n)\frac{\pi}{2} \wedge n \in N \\ 0 & \text{si } x = (1-2n)\frac{\pi}{2} \wedge n \in N \end{cases}$$

Hallar los puntos de discontinuidad y clasificarlos. Estudiar continuidad lateral en dichos puntos.



El dominio de f es $\mathbb{R}$. Es discontinua en 5, en 0 y en $(1-2n)\frac{\pi}{2}$ con $n \in N$.

En 5 la discontinuidad es evitable. Las restantes discontinuidades son esenciales. En 0 es continua por derecha.

EJERCICIOS

1) Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados y, cuando corresponda, clasificar el tipo de discontinuidad:

$f: x \to |x|$ en $x = 0$

$g: x \to \frac{1}{x}$ en $x = 0$

$h: x \to \operatorname{sen}\frac{\pi}{x}$ en $x = 0$

$m: x \to x \operatorname{sen}\frac{\pi}{x}$ en $x = 0$

$s: x \to \operatorname{ent} x$ en $x = 3$

$$r: x \to \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x+5} & \text{si } x \neq -5 \\ 6 & \text{si } x = -5 \end{cases} \quad \text{en } x = -5$$

$n: x \to \frac{x^2 - 100}{x - 10}$ en $x = 10$

2) Estudiar continuidad a derecha e izquierda de:

$f: x \to \operatorname{ent} x$ en $x = 1$

$g: x \to 2^{\frac{1}{x}}$ en $x = 0$

$h: x \to \frac{3^{\frac{1}{x}} - 2}{3^{\frac{1}{x}} + 2}$ en $x = 0$

$m: x \to \operatorname{mant} x$ en $x = -1$

3) Encontrar y clasificar los puntos de discontinuidad de:

$f: x \to \frac{x-3}{x^2 - x - 6}$

$m: x \to \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 6}$

$n: x \to \frac{x^3 + x^2 - 16x - 16}{x^3 - 16x}$

$t: x \to \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + 3x^2 + 2x}$

$g: x \to \frac{1}{\operatorname{sen} x}$

$r: x \to \frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 4x + 3}$

$$h: x \to \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$s: x \to \frac{x - 2}{x^3 + x^2 - 6x}$

4) Sea

$$f: x \to \begin{cases} |x+2| & \text{si } x \le 0 \\ \operatorname{ent}(2-x) & \text{si } 0 < x < 2 \\ \frac{1}{x-3} & \text{si } x \ge 2 \wedge x \neq 3 \end{cases}$$

Hallar los puntos de discontinuidad y clasificarlos. Estudiar continuidades laterales en dichos puntos.

5) Idem si

$$f: x \to \begin{cases} \operatorname{sh} x & \text{si } x \le 0 \\ x \operatorname{sen}\frac{\pi}{x} & \text{si } 0 < x \le 1 \\ |x-3| + |1-x| + 2 & \text{si } 1 < x < 3 \\ x^2 - 6x + 13 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

6) Definir en el intervalo $[-3; 3]$ tres funciones h, f y g, tales que:
h sea continua en $[-3;3]$;
f presente una discontinuidad esencial en $x = 1$ y en $x = 2$, y
g presente una discontinuidad evitable en $x = -2$.

7) Definir una función que presente dos discontinuidades evitables y una esencial.

8) Definir una función que presente una discontinuidad esencial con límite infinito y otra esencial sin límite infinito.

II. Algebra de funciones continuas

Recurriendo a los teoremas correspondientes de límite finito puede demostrarse:

Si f y g son dos funciones definidas en el mismo conjunto D y ambas son continuas en el punto a, entonces

1) $f + g$ es continua en a;

2) $f - g$ es continua en a;

3) fg es continua en a;

4) $\dfrac{f}{g}$ es continua en a si $g(a) \neq 0$.

Demostraremos, como ejemplo, la primera parte.

$\text{lím}_a(f + g)(x) = \text{lím}_a f(x) + \text{lím}_a g(x)$, aplicando el teorema de límite de una suma.

$\text{lím}_a f(x) + \text{lím}_a g(x) = f(a) + g(a)$, por ser f y g continuas en a.

$f(a) + g(a) = (f + g)(a)$, por definición de suma de funciones.

Luego, $\text{lím}_a(f + g)(x) = (f + g)(a)$, y la función $f + g$ es continua en a.

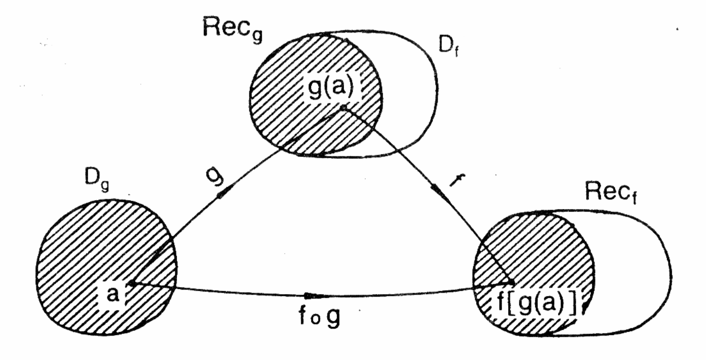
De la misma manera se demuestran las proposiciones restantes.

Continuidad de la función compuesta

Teorema

Sean f y g dos funciones para las cuales $\text{Rec}_g \subseteq D_f$. Si g es continua en a y f es continua en g(a), entonces la función compuesta $f \circ g$ es continua en a.

Debe probarse: $\text{lím}_a (f \circ g)(x) = \text{lím}_a f[g(x)] = f[g(a)]$.



Demostración

Como f es continua en $g(a) = b$, prefijado cualquier número $\epsilon > 0$,
$\exists \delta_1 > 0 \,/\, (y \in D_f \wedge |y - b| < \delta_1 \Rightarrow |f(y) - f(b)| < \epsilon)$,
aplicando la definición de continuidad a la función f en el punto $b = g(a)$.

Si consideramos la parte del dominio de f que incluye al recorrido de g, la expresión anterior es válida para $y = g(x)$.

Es decir,

$\forall \epsilon > 0\, \exists \delta_1 > 0 \,/\, (g(x) \in D_f \wedge |g(x) - g(a)| < \delta_1 \Rightarrow |f[g(x)] - f[g(a)]| < \epsilon)$.

Además, como g es continua en a, puede aplicarse la misma definición anterior a la función g eligiendo $\epsilon_1 = \delta_1 > 0$.

Por lo tanto,

$\exists \delta > 0 \,/\, (x \in D_g \wedge |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \delta_1)$.

Ordenando convenientemente las implicaciones anteriores, resulta:

$\forall \epsilon > 0\, \exists \delta_1 > 0\, \exists \delta > 0 \,/\, [(x \in D_g \wedge |x - a| < \delta) \Rightarrow (g(x) \in D_f \wedge |g(x) - g(a)| < \delta_1) \Rightarrow |f[g(x)] - f[g(a)]| < \epsilon]$.

Finalmente, por transitividad de la implicación:

$\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0 \,/\, (x \in D_g \wedge |x - a| < \delta \Rightarrow |(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)| < \epsilon)$,

y la función compuesta $f \circ g$ es continua en a.

Aplicación

Investigar la continuidad de las dos funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$ en el punto 2, si $f: x \rightarrow \text{ent}(x)$ y $g: x \rightarrow \sqrt{x}$.

Por el teorema anterior, $f \circ g$ es continua en 2 si g es continua en 2 y f es continua en g (2).

La función raíz cuadrada es continua en el punto 2 y resulta $g(2) = \sqrt{2}$.

Además, la función parte entera es continua en el punto $\sqrt{2}$ (véase pág. 57).

Luego, la función $f \circ g: x \rightarrow \text{ent}(\sqrt{x})$ es continua en 2.

Para estudiar la continuidad de $g \circ f$ en el punto 2 debemos investigar primero si f es continua en 2 y luego si g lo es en f(2).

En este caso, la función parte entera no es continua en el punto 2 por carecer de límite en dicho punto. Luego, no puede aplicarse el teorema.

Se demuestra fácilmente que la función $g \circ f: x \rightarrow \sqrt{\text{ent } x}$ no es continua en 2.

Valores de una función continua en un entorno del punto de acumulación

Recordando que si la función f es continua en el punto de acumulación a, es $\text{lím}_a f(x) = f(a)$, se pueden aplicar las propiedades del límite finito a las funciones continuas.

Por ejemplo, si se aplica la propiedad de límite finito demostrada en la página 133, se deduce que si una función es continua en un punto de acumulación a, entonces existe un entorno de a donde la función está acotada.

Es decir,

$$f \text{ continua en } a \Rightarrow \exists E(a)\, \exists k \in R \,/\, \forall x: (x \in E(a) \cap D_f \Rightarrow |f(x)| \leq k).$$

De la misma forma se puede aplicar otra propiedad demostrada en la página 133 y probar de inmediato el teorema siguiente:

Si f es continua en el punto de acumulación a y $f(a) \gtrless k$, existe un entorno de a donde $\forall x \in D_f: f(x) \gtrless k$, respectivamente.

Es decir, para una función f continua en el punto de acumulación a,

si $f(a) > k$, entonces $\exists E(a) / \forall x: (x \in D_f \cap E(a) \Rightarrow f(x) > k)$;

si $f(a) < k$, entonces $\exists E(a) / \forall x: (x \in D_f \cap E(a) \Rightarrow f(x) < k)$.

En especial, si $k = 0$,

$f(a) \gtrless 0 \Rightarrow \exists E(a) / \forall x: (x \in D_f \cap E(a) \Rightarrow f(x) \gtrless 0$, respectivamente$)$.

Si $f(a) = 0$, nada puede asegurarse del signo de f(x) en un entorno de a.

En cambio, si a es punto de acumulación del dominio de una función continua f, y toma valores positivos y negativos en todo entorno de a, entonces $f(a) = 0$.

Esta propiedad puede probarse fácilmente por reducción al absurdo.

En efecto, suponiendo que la tesis es falsa, caben dos posibilidades:

1) $f(a) > 0 \Rightarrow \exists E(a) / \forall x: (x \in D_f \cap E(a) \Rightarrow f(x) > 0)$, que niega la hipótesis
2) $f(a) < 0 \Rightarrow \exists E(a) / \forall x: (x \in D_f \cap E(a) \Rightarrow f(x) < 0)$, que también niega la hipótesis.

Luego, como f es continua en a, f(a) existe y es cero.

EJERCICIOS

Estudiar la continuidad de las siguientes funciones compuestas en los puntos indicados:

1) $f \circ h$ en $x = \frac{\pi}{2}$ si $f: x \to \ln x$ y $h: x \to \operatorname{sen} x$

2) $f \circ h$ en $x = 1$ si $f: x \to \operatorname{ent} x$ y $h: x \to \ln x$

3) $f \circ h$ en $x = 3$ si $f: x \to \frac{1}{x}$ y $h: x \to x - 3$

4) $f \circ h$ en $x = 1$ si $f: x \to \operatorname{mant} x$ y $h: x \to \frac{1}{x}$

III. Continuidad en un conjunto

Una función f es continua en un conjunto de puntos si y sólo si es continua en cada punto de ese conjunto.

f continua en C $\Leftrightarrow \forall x: (x \in C \Rightarrow$ f es continua en x$)$.

La definición de continuidad en un punto asegura que el conjunto C es un subconjunto del dominio de f.

Como la definición de continuidad se ha dado en puntos de acumulación y también en puntos aislados, se puede encarar el estudio de las propiedades de las funciones continuas, y más adelante de las funciones derivables, para funciones definidas sobre conjuntos de tipo muy diverso.

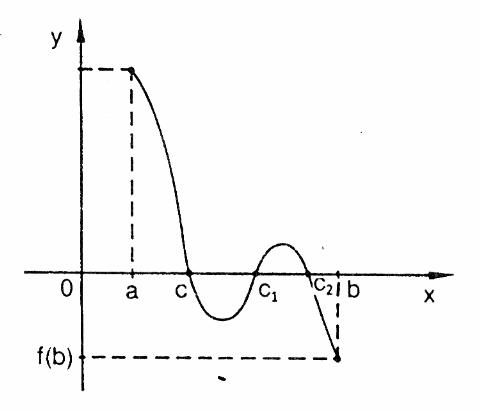
Para evitar dificultades nos ocuparemos solamente de funciones definidas en intervalos o en unión de intervalos (acotados o no) de números reales.

Consideraremos que una función es continua en un intervalo cerrado $[a; b]$ si es continua a derecha de a, a izquierda de b y en cada punto interior al mismo.

Intuitivamente, para una función escalar definida sobre un intervalo incluido en R, la idea de continuidad se refleja en un gráfico sin saltos ni puntos aislados.

Es decir, si una función f continua sobre un intervalo alcanza en el mismo dos valores distintos $f(x_1)$ y $f(x_2)$, entonces alcanza también todos los valores comprendidos entre ambos números reales.

En especial, si una función f es continua en el intervalo $[a; b]$, $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$, entonces existe un punto interior a dicho intervalo donde el valor de la función se anula. Es decir, existe, por lo menos, un punto c entre a y b donde el gráfico de la función atraviesa al eje de abscisas.



En el gráfico anterior hay tres puntos: c, c_1 y c_2, para los cuales se verifica la propiedad mencionada.

Esta propiedad, conocida como teorema de Bolzano* o teorema de los ceros de las funciones continuas, tiene importancia para el cálculo aproximado de raíces de cualquier polinomio de coeficientes reales.

Por ejemplo, tratemos de hallar una raíz real del polinomio

$$p(x) = x^5 - 12x^4 + 49x^3 - 76x^2 + 48x - 64.$$

Calculamos $p(2) = -40$ y $p(5) = 26$. Según el teorema de Bolzano, el polinomio se anula, al menos una vez, entre 2 y 5.

Calculamos $p(3) = -10$. Luego, una raíz está ubicada entre 3 y 5. Efectivamente, es $p(4) = 0$ y 4 es raíz del polinomio.

Si la raíz no es un número entero, aplicaciones reiteradas del teorema de Bolzano permiten acotar los valores de raíces racionales o irracionales.

Sea $p(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 15x - 15$.

Calculamos $p(1) = -32 \wedge p(2) = -21 \wedge p(3) = 192$.

Existe una raíz real r tal que $2 < r < 3$.

Prosiguiendo con los cálculos, resulta:

$$p(2{,}1) < 0 \wedge p(2{,}2) < 0 \wedge p(2{,}3) > 0.$$

* Bernardo Bolzano (1781-1848), sacerdote, filósofo y matemático, profesor de la Universidad de Praga. Su obra principal, *Paradojas del infinito,* fue póstuma.

Luego, $2{,}2 < r < 2{,}3$.
También $p(2{,}22) < 0 \wedge p(2{,}23) < 0 \wedge p(2{,}24) > 0$.
Luego, $2{,}23 < r < 2{,}24$.

Continuando los cálculos puede obtenerse r con tantas cifras decimales exactas como se desee.

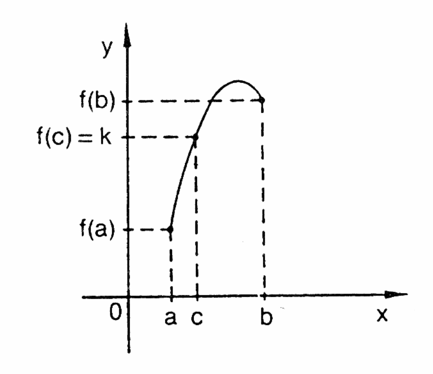
En nuestro caso r es el número irracional $\sqrt{5} = 2{,}23\ldots$

El teorema de Bolzano puede demostrarse directamente, o ser considerado como caso particular del siguiente teorema.

Teorema del valor intermedio

Si f es continua en $[a; b]$ y k es un valor comprendido entre f(a) y f(b), entonces existe un punto c, interior al intervalo $[a; b]$, donde la función alcanza el valor k.

Sea f continua en $[a; b]$ y $f(a) < k < f(b)$. Debe probarse que $\exists c \in (a; b) / f(c) = k$.



Demostración

Consideremos el subconjunto de $[a; b]$ formado por todos los puntos $x / f(x) \leq k$.

Es decir, $S = \{x / x \in [a; b] \wedge f(x) \leq k\}$.

S tiene por lo menos un elemento, pues $a \in S$, ya que $a \in [a; b]$ y $f(a) < k$ por hipótesis. Luego, S no es vacío. Además, $b \notin S$, pues $f(b) > k$ y b es una cota superior del conjunto S.

Por lo tanto, S es un conjunto no vacío y acotado de números reales.

De acuerdo con el axioma de continuidad de $\mathbb{R}$, tiene un extremo superior c y es $a \leq c \leq b$. Demostraremos que $f(c) = k$.

Por el absurdo:

1) Si $f(c) < k$, por un teorema anterior (pág. 174),
$$\exists \delta > 0 / \forall x: (x \in E(c, \delta) \Rightarrow f(x) < k).$$

a $c - \delta$ c   x $c + \delta$ b

Por lo tanto, hay algún $x > c$ para el cual $f(x) < k$. Es decir, $\exists x / x \in S$ y $x > c$. Esto contradice que c es el supremo de S.

2) Si $f(c) > k$, por el mismo teorema anterior (pág. 174),
$$\exists \delta' > 0 / \forall x: (x \in E(c, \delta') \Rightarrow f(x) > k).$$

Esto indica que ningún punto de S está a la derecha de $c - \delta'$, es decir, $\forall x \in S: x \leq c - \delta'$. Por lo tanto, $c - \delta'$ es una cota superior de S menor que el supremo. Absurdo.

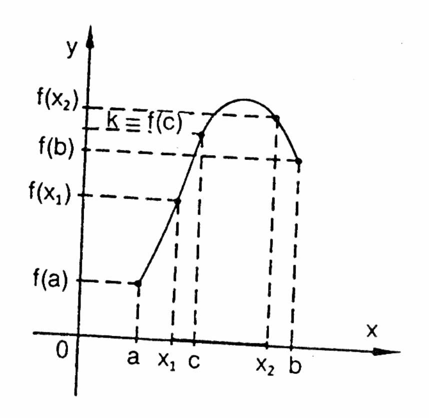
Luego, $f(c) = k$.

Además, $a < c < b$, pues si fuese $a = c$ sería $f(c) = f(a) < k$, y si fuese $b = c$ sería $f(c) = f(b) > k$, y se llegaría a las mismas contradicciones anteriores.

Si existen varios puntos x donde $f(x) = k$, el punto c correspondiente a esta demostración es el que está a la izquierda de todos ellos.

Una demostración análoga vale si $f(a) > k > f(b)$.

El teorema demostrado indica que una función continua en un intervalo $[a; b]$ alcanza en dicho intervalo, por lo menos una vez, todos los valores comprendidos entre f(a) y f(b). También suele darse esta propiedad diciendo que si una función continua alcanza dos valores diferentes en $[a; b]$, alcanza también todos los valores intermedios. Para ello basta considerar el teorema en cualquier subintervalo $[x_1; x_2]$ incluido en $[a; b]$.



Si se considera el teorema del valor intermedio para el caso particular de $k = 0$, resulta el teorema que ya hemos utilizado para acotar raíces de polinomios:

Teorema de Bolzano

Si f es una función continua en el intervalo $[a; b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe un punto c, interior al intervalo, donde $f(c) = 0$.

EJERCICIOS

1) Por el mismo camino utilizado para probar el teorema del valor intermedio, demostrar directamente el teorema de Bolzano.
2) Demostrar el teorema del valor intermedio si $f(a) > k > f(b)$.
3) a) Sea $f: x \to x^3 - 2x^2 + 3$ en $[-1; 2]$; verificar el teorema del valor intermedio para $k = 2$.

b) Idem para g: $x \to x^3 - 2x^2$ en $[-3; 0]$ y $k = -3$.

4) a) Sea f: $x \to x^3 - 3x^2 \cdot 3x - 1$ en $[0; 3]$. Verificar el teorema de Bolzano.

b) Idem para g: $x \to x^4 - 2x^2 - 5$ en $[0; 2]$.

5) Hallar con dos cifras decimales exactas una raíz real de

$$p(x) = x^4 + x^3 - 10x^2 - 11x - 11.$$

6) Idem si $p(x) = x^4 + 2x^3 - 19x^2 - 48x - 120$.

IV. Extremos de funciones

Máximo absoluto

Consideremos una función f definida sobre un conjunto A.

El valor f(c) es el *máximo absoluto de la función f en el conjunto $A \subseteq D_f$* si y sólo si f(c) no es superado por ninguno de los valores f(x) que alcanza la función en dicho conjunto A.

Es decir,

$$f(c) \text{ máximo absoluto de f en A} \iff \forall x: (x \in A \Rightarrow f(x) \leq f(c)).$$

El conjunto A puede ser el dominio de f o puede ser un subconjunto del mismo.

En general, el valor f(c) es el ***máximo absoluto*** de f si se cumple la definición anterior con A = dominio de f.

O sea, f(c) es el máximo absoluto de f si y sólo si f(c) es el máximo del recorrido de f.

Mínimo absoluto

El valor f(c) es el *mínimo absoluto de la función f en el conjunto $A \subseteq D_f$* si y sólo si f(c) no supera a ninguno de los valores f(x) que alcanza la función en dicho conjunto A.

Es decir,

$$f(c) \text{ mínimo absoluto de f en A} \iff \forall x: (x \in A \Rightarrow f(x) \geq f(c)).$$

El valor f(c) es el ***mínimo absoluto*** de f si se cumple la definición anterior con A = dominio de f.

O sea, f(c) es el mínimo absoluto de f si y sólo si f(c) es el mínimo del recorrido de f.

Máximo local o relativo

Consideremos una función f cuyo dominio es el conjunto D, y sea c un punto interior a dicho dominio.

El valor f(c) es un *máximo local o máximo relativo* de f si y sólo si existe un entorno del punto c tal que los valores que toma f en los puntos de dicho entorno no superan el valor f(c).

Es decir,

$$f(c) \text{ máximo local} \iff \exists E(c) \subseteq D \,/\, \forall x: (x \in E(c) \Rightarrow f(x) \leq f(c)).$$

Mínimo local o relativo

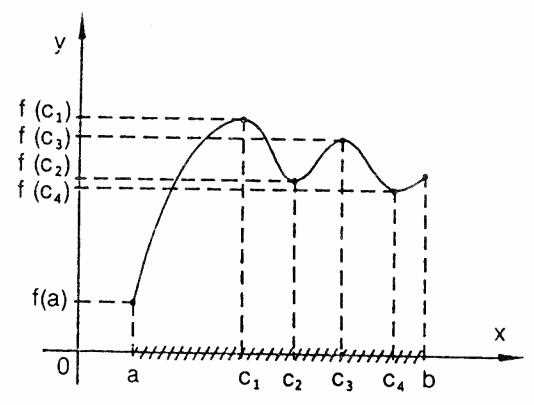
Sea c un punto interior al dominio de una función f.

El valor f(c) es un *mínimo local o mínimo relativo* de f si y sólo si existe un entorno del punto c en el cual se verifica que el valor f(c) no supera a ninguno de los valores f(x) que toma f en los puntos de dicho entorno.

Es decir,

$$f(c) \text{ mínimo local} \iff \exists E(c) \subseteq D \,/\, \forall x: (x \in E(c) \Rightarrow f(x) \geq f(c)).$$

Gráficamente:



$f(c_1)$ máximo absoluto en $[a; b]$ y máximo local.
$f(a)$ mínimo absoluto en $[a; b]$ (no es mínimo local).
$f(c_2)$ mínimo local (no es mínimo absoluto).
$f(c_3)$ máximo local (no es máximo absoluto).
$f(c_4)$ mínimo local (no es mínimo absoluto).

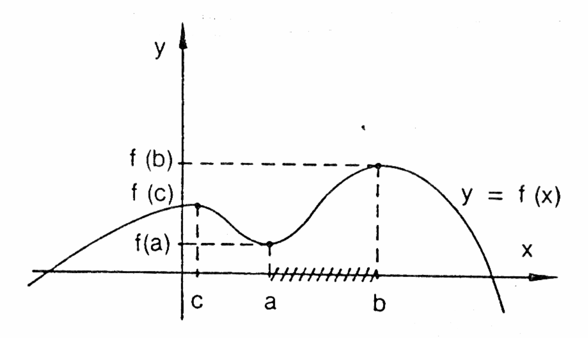
Si una función tiene máximo (o mínimo) absoluto en un conjunto, dicho valor es único.

Puede suceder que la función alcance dicho valor máximo (o mínimo) en más de un punto del conjunto. Por ejemplo, el máximo absoluto de la función seno es el número 1 y la función toma dicho valor en infinitos puntos del dominio.

Daremos a continuación algunos ejemplos para aclarar las definiciones anteriores.

Ejemplo 1

Consideremos la función f, correspondiente al gráfico siguiente, cuyo dominio es R y tal que $\lim_{x} f(x) = -\infty$.



El número f(b) es el máximo absoluto de f y también es máximo local. f(c) es solamente máximo local. f(a) es mínimo local, pero f no tiene mínimo absoluto.

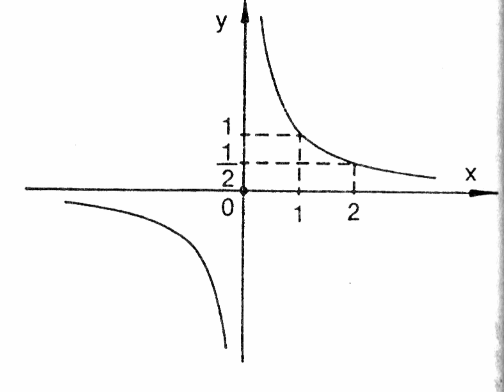
Consideremos ahora un subconjunto del dominio, esto es, el intervalo cerrado [a; b]. f(a) es mínimo absoluto de f en [a; b] y f(b) es máximo absoluto de f en [a; b].

En el intervalo semiabierto a izquierda (a; b], f no tiene mínimo absoluto, y en el intervalo [a; b), f no tiene máximo absoluto. En ninguno de los tres intervalos considerados la función tiene extremos locales.

En el intervalo abierto (a; b), f no tiene extremos absolutos ni locales.

Ejemplo 2

Sea la función $g: x \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$



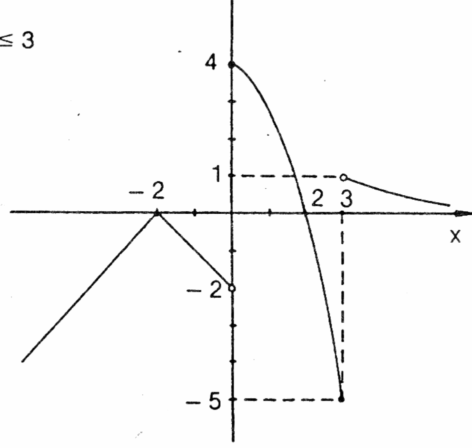
El dominio de g es $\mathbb{R}$ y g no tiene extremos absolutos ni locales en $\mathbb{R}$.

Si se considera el conjunto [0; 2], g(0) = 0 es mínimo absoluto de g en [0; 2] y g no tiene máximo en este conjunto.

En el intervalo [1; 2], en cambio, g tiene máximo y mínimo absolutos.

Ejemplo 3

Sea $f: x \rightarrow \begin{cases} -|x+2| & \text{si } x < 0 \\ 4 - x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{3}{x} & \text{si } x > 3 \end{cases}$



El dominio de f es $\mathbb{R}$.

En el gráfico podemos observar que:

f(−2) = 0 es máximo local;

f(0) = 4 es máximo local y absoluto, y

f(3) = −5 es mínimo local.

No hay mínimo absoluto, pues $\lim_{-\infty} f(x) = -\infty$.

El recorrido de f es $(-\infty; 4]$.

Los ejemplos anteriores muestran que una función puede tener máximo absoluto o mínimo absoluto en algunos conjuntos y no tenerlos en otros, y que existen funciones que no tienen máximo ni mínimo absolutos en su dominio.

Una forma de asegurar la existencia de máximo y mínimo absolutos para una función en un conjunto es exigir que la función considerada sea continua en un intervalo cerrado.

Es decir, si una función f es continua en un intervalo cerrado, entonces f tiene máximo absoluto y mínimo absoluto en dicho intervalo.

Obsérvese que una función tiene máximo absoluto si su recorrido está acotado superiormente y el supremo pertenece al recorrido. De la misma forma, una función tiene mínimo absoluto si su recorrido está acotado inferiormente y el ínfimo del recorrido le pertenece.

Teoremas de Weierstrass[*]

• Primer teorema

Si f es una función continua en un intervalo cerrado [a; b], entonces f está acotada en dicho intervalo.

O sea, f continua en [a, b] $\Rightarrow$ f acotada en [a; b].

Demostración

Consideremos el conjunto S formado por los elementos c del intervalo para los cuales se cumple que la función f está acotada en [a; c].

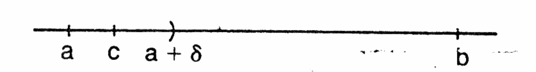
O sea, $S = \{c / c \in [a; b] \wedge f \text{ acotada en } [a; c]\}$.

Para poder aplicar el axioma de continuidad de $\mathbb{R}$ demostraremos que S no es vacío y está acotado superiormente.

En efecto, $a \in S$. Luego, $S \neq \phi$, y como $S \subseteq [a; b]$, b es una cota superior.

Por lo tanto, S tiene supremo, al que designamos c_0, y es $c_0 \leq b$.

Además, $a < c_0$. En efecto, como f es continua a derecha del punto a, por una propiedad anterior (pág. 173), existe un semientorno a derecha de a, de radio δ, en el cual f está acotada.



[*] Karl Weierstrass (1815-1897). Se inició como profesor de enseñanza secundaria. Luego, en sus famosas clases y seminarios en Berlín, insistió siempre en la necesidad absoluta de rigor en las demostraciones matemáticas.

Es posible entonces encontrar un punto c, entre a y $a+\delta$, tal que se cumpla que f está acotada en $[a; c]$. Luego, $c \in S$ y $c > a$. Esto asegura $a < c \leq c_0$.

Es decir, $a < c_0 \leq b$.

Si se prueba que $c_0 = b$ y que $c_0 \in S$, se cumple la tesis.

Por el absurdo, supongamos $c_0 < b$.

c_1 c_2

a $c_0 - \delta$ c_0 $c_0 + \delta$ b

Por hipótesis, f es continua en c_0, ya que

$$a < c_0 < b \Rightarrow c_0 \in [a; b].$$

Por el mismo teorema anterior (pág. 173), existe un entorno de c_0, de radio δ, donde la función está acotada, y puede encontrarse $\delta / E(c_0, \delta) \subseteq [a;b]$.

Luego, existe un número real $k' > 0$, tal que

$$\forall x: (x \in E(c_0, \delta) \Rightarrow |f(x)| \leq k') \quad (1).$$

Podemos elegir c_1 y c_2 en el entorno de c_0, en forma tal que se verifique:

$$c_0 - \delta < c_1 < c_0 < c_2 < c_0 + \delta.$$

Además, c_1 pudo elegirse entre los elementos del conjunto S, pues, si no existiera entre $c_0 - \delta$ y c_0 un elemento del conjunto S, $c_0 - \delta$ sería una cota superior del conjunto S menor que el supremo.

Por lo tanto, $c_1 \in S$ y f está acotada en $[a; c_1]$. Es decir, existe un número real k, tal que

$$\forall x: (x \in [a; c_1] \Rightarrow |f(x)| \leq k).$$

Además, por (1), como c_1 y $c_2 \in (c_0 - \delta; c_0 + \delta)$:

$$\forall x: (x \in [c_1; c_2] \Rightarrow |f(x)| \leq k').$$

Si $k > k'$, k es cota para la función en la unión de ambos intervalos:

$$[a; c_1] \cup [c_1; c_2] = [a; c_2].$$

Entonces, f esta acotada en $[a; c_2]$ Luego, $c_2 \in S$ y $c_2 > c_0$.

Absurdo, pues c_0 es el supremo de S.

Resulta, por lo tanto, $c_0 = b$.

Por ser f continua en b, mediante un razonamiento análogo al anterior puede elegirse c_1 en un semientorno a la izquierda de b y probar que f está acotada en $[a; c_1] \cup [c_1; b] = [a; b]$.

Es decir, f está acotada en $[a; b]$ y el teorema queda demostrado.

Segundo teorema

Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a; b]$, entonces alcanza en dicho intervalo máximo y mínimo absolutos.

Demostración

Por el teorema anterior, la función f está acotada en $[a; b]$. Para probar la existencia de máximo absoluto basta considerar la acotación superior del recorrido. La existencia de mínimo absoluto se demuestra en forma análoga considerando cotas inferiores.

Como el recorrido de la función f está acotado superiormente, por el axioma de continuidad de $\mathbb{R}$ tiene supremo. Sea m dicho supremo.

Se cumple, entonces, $\forall x: (x \in [a; b] \Rightarrow f(x) \leq m)$.

El número real m puede o no pertenecer al recorrido de f. Si pertenece, se trata del máximo absoluto, es decir, debe probarse que

$$\exists c \in [a; b] / f(c) = m.$$

Por el absurdo, supongamos que no existe dicho punto, es decir,

$$\forall x: (x \in [a; b] \Rightarrow f(x) < m).$$

En este caso, $\forall x \in [a; b]$ es $m - f(x) > 0$.

Tiene sentido, entonces, considerar en el intervalo $[a; b]$ la función

$$g / x \mapsto \frac{1}{m - f(x)} > 0.$$

Esta función g es continua en $[a; b]$ por ser el cociente de dos funciones continuas y además $m - f(x) \neq 0$.

Por el primer teorema, la función g está acotada en $[a; b]$.

Sea m' el supremo correspondiente.

Luego,

$$\forall x: \left(x \in [a; b] \Rightarrow g(x) = \frac{1}{m - f(x)} \leq m' \wedge m' > 0\right).$$

Ahora bien,

$$\frac{1}{m - f(x)} \leq m' \Rightarrow \frac{1}{m'} \leq m - f(x) \Rightarrow f(x) \leq m - \frac{1}{m'}.$$

Pero $m - \frac{1}{m'} < m$, pues $\frac{1}{m'} > 0$.

Resulta entonces $\forall x: \left(x \in [a; b] \Rightarrow f(x) \leq m - \frac{1}{m'} < m\right)$.

La expresión anterior indica que el recorrido de la función f admite una cota superior: $m - \frac{1}{m'}$, que es menor que el supremo m. Pero esto es un absurdo, que provino de suponer, para todo x del intervalo, $f(x) < m$.

Por lo tanto, existe al menos un punto c del intervalo $[a; b]$ para el cual se verifica $f(c) = m$, y m es, entonces, el máximo absoluto de la función f en el intervalo cerrado $[a; b]$.

EJERCICIOS

1) Demostrar que una función continua en un intervalo cerrado alcanza mínimo absoluto, utilizando el extremo inferior del recorrido.

2) Hallar supremo e ínfimo, si existen, para cada una de las siguientes funciones:

$$f: x \to |x+5| - 2 \quad g: x \to |x-2| - |4-x| \quad h: x \to \begin{cases} \dfrac{2}{x} & \text{si } x < -1 \\ x^3 & \text{si } -1 < x < 2 \\ \dfrac{16}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

3) Hallar máximo y mínimo absolutos de $f: x \to 3x - 5$ en $[-2; 3]$.
4) Idem para $f: x \to x^2 - 6x + 4$ en $[-2; 5]$.
5) Hacer un gráfico de f y ver si admite extremos absolutos o locales, siendo $f(x) = |x-4| + |x+2|$.
6) Idem si

$$f: x \to \begin{cases} x+5 & \text{si } x \leq -3 \\ x^2 - 7 & \text{si } -3 < x \leq \dfrac{10}{3} \\ -3x + \dfrac{127}{9} & \text{si } x > \dfrac{10}{3} \end{cases}$$

7) Idem si

$$f: x \to \begin{cases} \dfrac{-4}{x} & \text{si } x < -2 \\ -2x - 2 & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ -4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

V. Funciones monótonas

Una función escalar f definida en un conjunto D es *creciente* en D si y sólo si para todo par de puntos $x_1 \in D$ y $x_2 \in D$:

$$(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)).$$

La función f es *estrictamente creciente* en D si y sólo si

$$\forall x_1 \in D \, \forall x_2 \in D: (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)).$$

De manera análoga:

$$f \text{ decreciente en } D \Leftrightarrow \forall x_1 \in D \, \forall x_2 \in D: (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2));$$

$$f \text{ estrictamente decreciente en } D \Leftrightarrow \forall x_1 \in D \, \forall x_2 \in D: (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)).$$

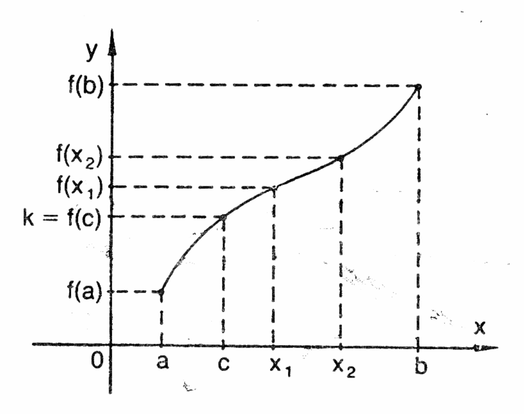
Las funciones crecientes y también las decrecientes se llaman, en general, funciones monótonas.

♦ Existencia de función inversa

Ya se ha visto en el capítulo 3 que una función biyectiva tiene función inversa que es también biyectiva. Puede demostrarse que las funciones estrictamente monótonas son funciones biyectivas y existe, por lo tanto, para cada una, la función inversa. Además, algunas propiedades de la función son válidas también para la función inversa, como por ejemplo la continuidad.

Teorema

Si f es estrictamente creciente en $[a; b]$ y es continua en dicho intervalo, entonces:
1) existe f^{-1} en $[f(a); f(b)]$
2) f^{-1} es estrictamente creciente en $[f(a); f(b)]$
3) f^{-1} es continua en $[f(a); f(b)]$



1) Por el teorema del valor intermedio (pág. 176), si k es cualquier número real comprendido entre f(a) y f(b), entonces:

$$\exists c \in (a; b) \,/\, f(c) = k.$$

Es decir, f es una función sobre $[f(a); f(b)]$.

Además, podemos probar que f es inyectiva, o sea, que c es único para cada número k.

En efecto, por ser f estrictamente creciente en $[a; b]$,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

es decir, elementos distintos tienen imágenes distintas y la función es inyectiva.

Por lo tanto, f es biyectiva y existe su función inversa f^{-1}, biyectiva en $[f(a); f(b)]$.

2) Sean y_1 e y_2 dos puntos cualesquiera del intervalo $[f(a); f(b)]$, que es el dominio de f^{-1}.

Existen x_1 y x_2 en $[a; b] \,/\, y_1 = f(x_1)$ y $f(x_2) = y_2$.

Para probar que f^{-1} es estrictamente creciente en $[f(a); f(b)]$ debemos verificar:

$$\forall y_1 \forall y_2: (y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)),$$

que equivale a demostrar:

$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f^{-1}[f(x_1)] < f^{-1}[f(x_2)].$$

Por definición de función inversa:

$$f^{-1}[f(x_1)] < f^{-1}[f(x_2)] \Leftrightarrow x_1 < x_2.$$

Luego, queremos probar:

$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2.$$

Consideremos la implicación contrarrecíproca:

$$x_1 \geq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

Esta implicación es verdadera por ser f estrictamente creciente en $[a; b]$.

Luego, queda probado que f^{-1} es estrictamente creciente en el conjunto indicado.

3) Demostraremos que f^{-1} es continua en cualquier punto interior al intervalo $[f(a); f(b)]$, y con una pequeña modificación puede demostrarse que también lo es en $f(a)$ y en $f(b)$.

Sea y_0 un punto cualquiera del intervalo $[f(a); f(b)]$. Por las condiciones dadas, $\exists c \in (a; b) / y_0 = f(c)$.

Para probar que f^{-1} es continua en $y_0 = f(c)$, debe verificarse:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 / |y - y_0| < \delta \Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \epsilon .$$

La proposición anterior es equivalente a la siguiente:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 / |f(x) - f(c)| < \delta \Rightarrow |x - c| < \epsilon .$$

Elijamos un entorno cualquiera de c, de radio $\epsilon > 0$, tal que:

$$E(c, \epsilon) \subseteq (a; b).$$

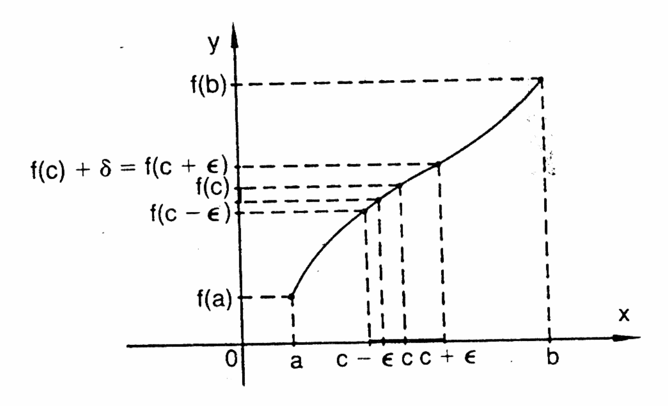
$$\forall x: (x \in E(c, \epsilon) \Rightarrow |x - c| < \epsilon \Rightarrow c - \epsilon < x < c + \epsilon).$$

Como f es estrictamente creciente en $[a; b]$,

$$c - \epsilon < x < c + \epsilon \Rightarrow f(c - \epsilon) < f(x) < f(c + \epsilon).$$

Podemos encontrar un entorno de $y_0 = f(c)$, de radio δ, que esté incluido en el intervalo $(f(c - \epsilon); f(c + \epsilon))$. Para ello basta tomar δ igual al menor entre los dos números positivos

$$h = f(c) - f(c - \epsilon) \quad y \quad h' = f(c + \epsilon) - f(c).$$



Por lo tanto, cualquier punto y que pertenece al intervalo $(f(c) - \delta; f(c) + \delta)$ también pertenece al intervalo $(f(c - \epsilon); f(c + \epsilon))$.

Es decir,

$$f(c) - \delta < y < f(c) + \delta \Rightarrow f(c) - \epsilon) < y < f(c + \epsilon) \quad (1).$$

Además, por f^{-1} estrictamente creciente:

$$f(c - \epsilon) < y < f(c + \epsilon) \Rightarrow f^{-1}[f(c - \epsilon)] < f^{-1}(y) < f^{-1}[f(c + \epsilon)] \quad (2).$$

Finalmente, por definición de función inversa:

$$f^{-1}[f(c - \epsilon)] < f^{-1}(y) < f^{-1}[f(c + \epsilon)] \Rightarrow c - \epsilon < x < c + \epsilon \quad (3).$$

Aplicando transitividad a las implicaciones (1), (2) y (3), resulta:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 / (f(c) - \delta < y < f(c) + \delta \Rightarrow c - \epsilon < x < c + \epsilon).$$

O sea, $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 / (|y - f(c)| < \delta \Rightarrow |x - c| < \epsilon)$.

proposición que, como se ha indicado, es equivalente a la siguiente:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 / (|y - y_0| < \delta \Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \epsilon),$$

que prueba la continuidad de f^{-1} en un punto cualquiera y_0, interior al intervalo $[f(a); f(b)]$.

Por un razonamiento similar, considerando intervalos $[a; a + \epsilon)$ y $(b - \epsilon; b]$, se prueba la continuidad de f^{-1} en los puntos f(a) y f(b) (a la derecha de f(a) y a la izquierda de f(b)).

VI. Continuidad uniforme

Consideremos la función $f: x \rightarrow \frac{1}{x}$ en el intervalo (0; 1). Es sencillo demostrar que esta función es continua en dicho intervalo, pues

$$\forall a \in (0; 1): \lim_a \frac{1}{x} = \frac{1}{a}.$$

Si se trata de escribir la expresión anterior utilizando números positivos ϵ y δ, se puede observar que δ no depende solamente de ϵ sino también del punto elegido a.

En efecto, al buscar δ para un número ϵ prefijado se observa que:

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \epsilon \Leftrightarrow \left|\frac{a - x}{x\,a}\right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{|x - a|}{|x| \cdot |a|} < \epsilon \Leftrightarrow |x - a| < \epsilon \cdot |x| \cdot |a| = \delta,$$

y δ depende de cada punto a donde se investiga la continuidad.

Interesa ver si es posible encontrar en el intervalo (0; 1) un número positivo δ que pueda utilizarse para cualquier punto $a \in (0; 1)$.

Puede demostrarse que ello no es posible, pues a medida que el punto a se aproxima a 0, el δ es cada vez menor y tiende a cero.

Cuando no es posible, como en el caso indicado, encontrar un número δ válido para cualquier punto del conjunto elegido, se dice que la función no es uniformemente continua en dicho conjunto.

Si, en cambio, se considera la función dada por la misma fórmula en cualquier intervalo (a; b), abierto o cerrado, para $a > 0$, siempre es posible hallar, prefijado ϵ, un $\delta > 0$ válido para cualquier punto del intervalo.

En efecto, consideremos por ejemplo la función dada por la misma fórmula, $f: x \mapsto \frac{1}{x}$, en el conjunto $A = \left\{x / x > \frac{1}{2}\right\}$.

Trataremos de encontrar, para cualquier número positivo ϵ, un número positivo δ que dependa exclusivamente de ϵ y para el cual se verifique la definición de continuidad en cualquier punto $a \in A$.

Habíamos obtenido $\delta = \epsilon \cdot |x| \cdot |a|$. Si tomamos x y a en el conjunto A, es $\delta = \epsilon \cdot |x| \cdot |a| < \epsilon \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$, y el número $\delta = \frac{\epsilon}{4}$ será válido para cualquier punto $a \in A$.

Es decir, sea $\epsilon > 0$ y $0 < \delta \leq \frac{\epsilon}{4}$.

$$\forall x \in A \ \forall a \in A: \left(|x - a| < \frac{\epsilon}{4} = \epsilon \cdot \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} \leq \epsilon \cdot |x| \cdot |a|\right), \text{ ya que } |x| > \frac{1}{2} \text{ y } |a| > \frac{1}{2}.$$

Ahora bien,

$$|x-a| < \epsilon \cdot |x| \cdot |a| \Leftrightarrow \frac{|x-a|}{|x|\cdot|a|} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{|a-x|}{|x|\cdot|a|} < \epsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right| < \epsilon.$$

Luego, $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 / \forall x \in A\ \forall a \in A: \left(|x-a| < \delta \leq \frac{\epsilon}{4} \Rightarrow \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right| < \epsilon\right).$

Lo mismo sucede para la función considerada en cualquier conjunto $B = (k; +\infty)$ si $k > 0$. Prefijado cualquier $\epsilon > 0$, basta hacer $0 < \delta \leq \epsilon \cdot k^2$.

En los casos mencionados, la función $f: x \rightarrow \frac{1}{x}$ es *uniformemente continua* en el conjunto A y en el conjunto B.

Obsérvese que el concepto de continuidad uniforme es esencialmente distinto del concepto de continuidad.

La continuidad en un conjunto es una propiedad de carácter *local*, pues depende de que la función sea continua en cada punto del conjunto considerado.

En cambio, la continuidad uniforme en un conjunto es una propiedad *global*, relativa a todo el conjunto y no a cada uno de sus puntos en particular.

Definición

La función f es *uniformemente continua* en el conjunto D si y sólo si $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ / (δ depende sólo de ϵ y D) / $\forall x_1 \in D\ \forall x_2 \in D$: $(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow$ $\Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon)$.

Resulta de inmediato que si una función es uniformemente continua en un conjunto D, entonces es continua en D.

Para ello basta considerar $x_1 = x$ y $x_2 = a$, y la definición anterior indica que f es continua en cualquier punto a del conjunto D.

La propiedad recíproca de la anterior, en cambio, no es válida, como lo prueba el ejemplo ya visto de la función $f: x \rightarrow \frac{1}{x}$ en el intervalo (0;1), que es continua en dicho intervalo abierto pero no es uniformemente continua en él.

Puede probarse, sin embargo, que una función continua en un conjunto compacto es uniformemente continua en él.

Probaremos la propiedad anterior para intervalos cerrados mediante el siguiente teorema.

Teorema de Heine*

Si una función es continua en un intervalo cerrado, entonces es uniformemente continua en él.

Demostración

Sea f una función continua en el intervalo cerrado [a;b]. Por ser f continua en [a;b], es continua en cada punto c que pertenece a dicho intervalo.

* Enrique Heine (1821-1881), analista alemán que publicó en 1872 una memoria donde se expuso por primera vez la teoría del número irracional que lleva el nombre de Cantor.

Luego, elegido cualquier número positivo ϵ, al aplicar la definición de continuidad puede asociarse, a cada punto c del intervalo, un entorno de radio δ, donde δ depende de ϵ y de c, tal que

$$\forall x: \left(x \in E(c, \delta) \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \frac{\epsilon}{2}\right).$$

Además, como $|x - c| < \frac{\delta}{2} \Rightarrow |x - c| < \delta$, es válida también la proposición siguiente:

$$\forall x: \left(x \in E\left(c, \frac{\delta}{2}\right) \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \frac{\epsilon}{2}\right).$$

Consideremos el conjunto formado por los infinitos entornos del tipo anterior, que corresponden, para el número ϵ elegido, a cada punto del intervalo [a; b].

Ese conjunto es un cubrimiento abierto infinito del intervalo cerrado [a; b]. Por el teorema de Borel (pág. 43), existe un subconjunto finito del mismo que también cubre [a; b].

Sea $C = \left\{E\left(c_1, \frac{\delta_1}{2}\right), E\left(c_2, \frac{\delta_2}{2}\right), \ldots\ldots, E\left(c_n, \frac{\delta_n}{2}\right)\right\}$ dicho cubrimiento finito.

Sea δ el menor entre los números positivos $\frac{\delta_1}{2}, \frac{\delta_2}{2}, \ldots\ldots, \frac{\delta_n}{2}$.

Es decir, $\delta = \text{mín}\left(\frac{\delta_1}{2}, \frac{\delta_2}{2}, \ldots, \frac{\delta_n}{2}\right)$.

Probaremos que δ, elegido a través del proceso anterior para cada número $\epsilon > 0$, verifica la definición de continuidad uniforme en [a;b].

Sean x_1 y x_2 dos puntos cualesquiera de [a; b] para los cuales es $|x_1 - x_2| < \delta$. Debemos probar $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$.

Por ser el conjunto C un cubrimiento de [a; b], x_1 pertenece a uno de los entornos de dicha colección.

Sea $E\left(c_r, \frac{\delta_r}{2}\right)$ dicho entorno. Es decir, $x_1 \in E\left(c_r, \frac{\delta_r}{2}\right)$.

Por lo tanto, $|f(x_1) - f(c_r)| < \frac{\epsilon}{2}$ (1).

Ahora bien:

$$|x_2 - c_r| = |(x_2 - x_1) + (x_1 - c_r)| \leq |x_2 - x_1| + |x_1 - c_r| < \delta + \frac{\delta_r}{2} \leq \frac{\delta_r}{2} + \frac{\delta_r}{2} = \delta_r.$$

Luego,

$$|x_2 - c_r| < \delta_r.$$

Pero, según se ha visto al elegir cada número δ_n

$$|x_2 - c_r| < \delta_r \Rightarrow |f(x_2) - f(c_r)| < \frac{\epsilon}{2} \quad (2).$$

De (1) y (2):

$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f(c_r)| + |f(c_r) - f(x_2)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$

Luego, $\forall x_1 \in [a; b] \, \forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0$ (encontrado a través del procedimiento indicado) $/ \, |x_1 - x_2| < \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$, y el teorema queda probado.

RESPUESTAS A EJERCICIOS

CAPÍTULO 5

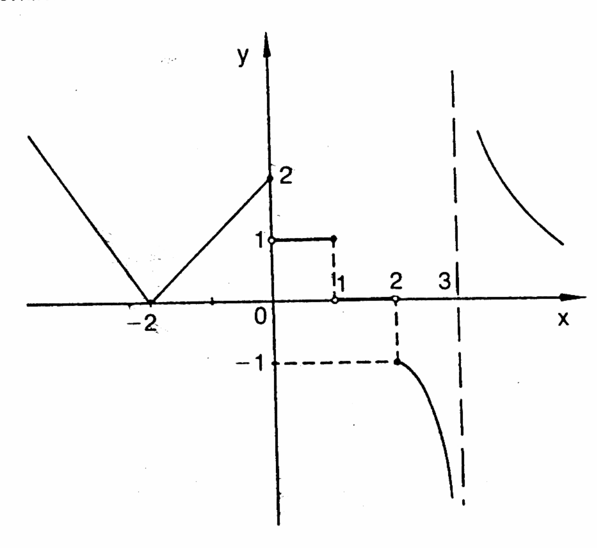
Sección I

1) f: continua en 0
g: discontinuidad esencial; no existe g(0) ni hay límite finito
h: discontinuidad esencial; no existe h(0) ni hay límite finito
m: discontinuidad evitable; $\text{lím}_0 \, m(x) = 0$
s: discontinuidad esencial; s(3) = 3, pero no hay límite
r: discontinuidad evitable; $\text{lím}_{-5} \, r(x) = -10$
n: discontinuidad evitable; $\text{lím}_{10} \, n(x) = 20$

2) f: continua a derecha de 1
g: discontinuidad evitable a izquierda, pues $\text{lím}_{0^-} \, g(x) = 0$
h: discontinuidad evitable a derecha haciendo $h_1(0) = 1$ o evitable a izquierda haciendo $h_2(0) = -1$
m: continua a derecha de -1

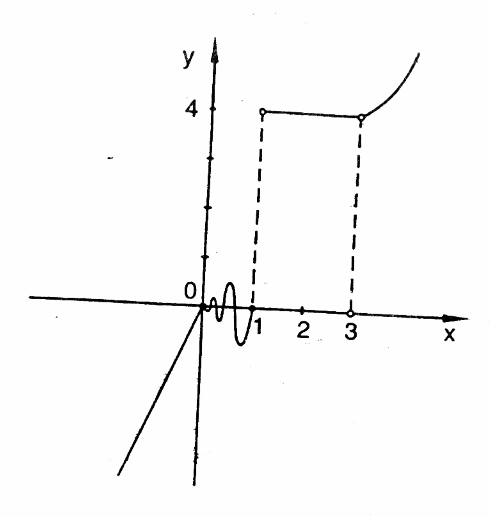
3) f: discontinuidad evitable en x = 3 y esencial en x = −2
m: discontinuidad evitable en x = 2 y esencial en x = −3
n: discontinuidad esencial en x = 0 y evitable en x = 4 y x = −4
t: discontinuidad esencial en x = 0, x = −2 y x = −1
g: discontinuidad esencial en $x = n\pi$ ($n \in Z$)
r: discontinuidad evitable en x = −3 y esencial en x = −1
h: discontinuidad esencial en x = 1, continua a derecha.
s: discontinuidad evitable en x = 2 y esencial en x = 0 y x = −3

4)



$D_f = \mathbb{R}$. Discont. esenciales en 0, 1, 2 y 3.
Continua a izquierda de 0, a izquierda de 1 y a derecha de 2

5)



$D_f = \mathbb{R} - \{3\}$. Discontinuidad esencial en 1 y evitable en 3.
Continua a izquierda de 1

6) Ejemplo: $h: x \to x^2$, $f: x \to \frac{1}{(x-1)(x-2)}$, $g: x \to \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

7) Ejemplo: $f: x \to \frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-1)(x-5)}$ presenta discontinuidad evitable en $x = -2$ y $x = 1$ y discontinuidad esencial en x = 5.

8) Ejemplo:

$$f: x \to \begin{cases} \frac{1}{x-3} & \text{si } x > 0 \\ 5 + 3x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

discontinuidad esencial con límite infinito en x = 3 y discontinuidad esencial sin límite infinito en x = 0

Sección II

1) $f \circ h$ continua en $x = \frac{\pi}{2}$

2) f no es continua en h(1) = 0

3) f no es continua en h(3) = 0

4) f no es continua en h(1) = 1

Sección III

3) a) $c_1 = 1$, pues $f(c_1) = 2$ y $-1 < 1 < 2$ $\left(c_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \; c_3 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)$

b) $c = -1$, pues $f(-1) = -3$ y $-1 \in (-3;0)$

4) a) $c = 1$, pues $f(0) = -1$, $f(3) = 8$, $0 < 1 < 3$ y $f(1) = 0$

b) $c = \sqrt{1 + \sqrt{6}}$, pues $f(\sqrt{1 + \sqrt{6}}) = 0$ y $\sqrt{1 + \sqrt{6}} \in (0;2)$

5) $r_1 \simeq 3{,}31$ $r_2 \simeq -3{,}31$ 6) $r_1 \simeq 4{,}89$ $r_2 \simeq -4{,}89$

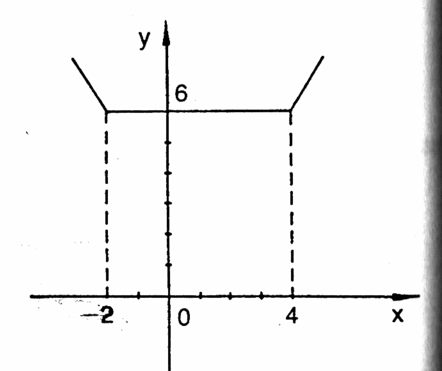
Sección IV

2) f: -2 ínfimo y mínimo absoluto
no existe supremo
g: -2 ínfimo y mínimo absoluto
2 supremo y máximo absoluto
h: 8 supremo (no es máximo)
-2 ínfimo (no es mínimo)

3) $f(3) = 4$ máximo aboluto $f(-2) = -11$ mínimo absoluto

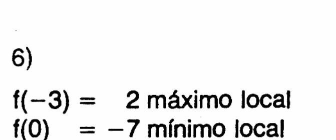
4) $f(-2) = 20$ máximo absoluto $f(3) = -5$ mínimo absoluto

5)

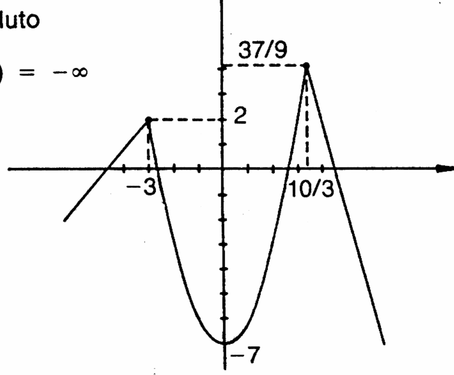


6 mínimo absoluto
6 mínimo local y lo alcanza en los infinitos puntos de $[-2; 4]$

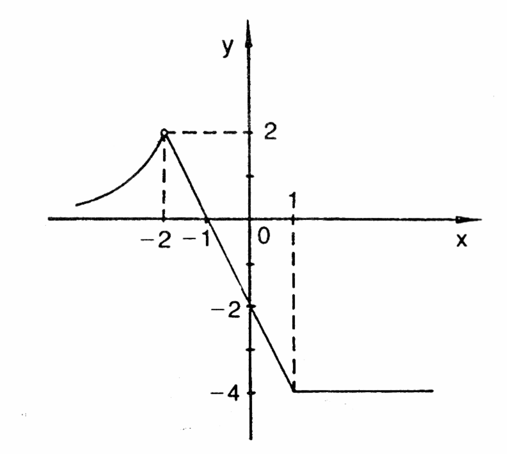
6)



$f(-3) = 2$ máximo local
$f(0) = -7$ mínimo local
$f\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{37}{9}$ máximo local y absoluto
no existe mínimo absoluto pues $\lim_{\infty} f(x) = -\infty$



7)



-4 mínimo absoluto
-4 mínimo local y lo alcanza en los puntos de $[1; +\infty)$
no hay máximo absoluto, pues 2 es supremo del recorrido pero no es máximo ya que no existe $f(-2)$

6. DERIVADA

Una de las ideas básicas en análisis es el concepto de derivada. Para introducir dicho concepto se recurre generalmente a dos problemas, uno físico y el otro geométrico. El primero es el cálculo de la velocidad instantánea de un móvil y el segundo la definición de recta tangente a una curva en un punto de la misma.

Los dos problemas conducen al mismo cálculo: el límite de un cociente de incrementos cuando el denominador tiende a cero.

Prescindiremos inicialmente de los problemas mencionados, que dieron origen al cálculo diferencial, y definiremos derivada de una función en un punto interior a su dominio en forma analítica. La velocidad instantánea y la determinación de la recta tangente serán consideradas, más adelante, como aplicaciones de la definición.

I. Derivada de una función

Si f es una función definida en un intervalo abierto y se consideran dos puntos distintos a y x de dicho intervalo, puede formarse el cociente $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, cuyo numerador es la diferencia entre los dos valores f(x) y f(a) de la función o "variación de la función" y el denominador es la diferencia entre los dos números x y a o "variación de la variable", por lo cual el cociente considerado representa la "variación media" de la función en el intervalo entre a y x, y suele denominarse "cociente incremental".

Si se busca el límite de dicho cociente en el punto a y dicho límite es un número real, se lo llama derivada finita de la función f en el punto a.

Definición

Sea f una función definida en un intervalo abierto y a un punto cualquiera de dicho intervalo. La función f tiene derivada en el punto a si y sólo si existe el límite del cociente $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ en el punto a.

Si el límite es un número real, la derivada es finita y se designa:

$$f'(a) = \lim_a \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Ejemplo 1

Sea $f: x \to x^2 + 3$. Veamos si f es derivable en el punto $a = 4$.

Por definición, $f'(4) = \lim_4 \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_4 \frac{(x^2+3) - 19}{x - 4} =$

$= \lim_4 \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_4 (x+4) = 8.$

Luego, para la función considerada, es $f'(4) = 8$.

Ejemplo 2

Sea $g: x \to x^3$. Hallar $g'(2)$.

$$g'(2) = \lim_2 \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_2 (x^2+2x+4) = 12.$$

Si en algún punto del dominio de la función considerada no existe el límite del cociente incremental indicado, la función no es derivable en ese punto. Si el límite no existe como número real, pero es un límite infinito, se dice que la función tiene derivada infinita en ese punto.

Por ejemplo, sea $f: x \to \sqrt[3]{x}$.

$$f'(0) = \lim_0 \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \lim_0 \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_0 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty.$$

Si el cociente incremental no tiene límite finito en el punto a, pero admite límites finitos distintos a derecha e izquierda de a, dichos valores se llaman derivada a derecha y derivada a izquierda del punto a. Se designan, respectivamente, $f'(a^+)$ y $f'(a^-)$.

Consideremos $f: x \to |x|$.

Esta función no es derivable en el origen, pues

$$f'(0) = \lim_0 \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_0 \frac{|x|}{x}$$

y este límite no existe, según se ha visto en la página 129.

Si buscamos el límite a derecha del origen para el cociente incremental, resulta:

$$\lim_{0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{0^+} \frac{x}{x} = 1 \text{ y, por lo tanto, } f'(0^+) = 1.$$

Análogamente, por la izquierda:

$$\lim_{0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{0^-} \frac{-x}{x} = -1 \Rightarrow f'(0^-) = -1.$$

Notaciones usuales

Indicamos a continuación algunas notaciones que suelen utilizarse para designar la derivada de una función f en un punto x:

$D_x f$; $\frac{df}{dx}$; $\frac{dy}{dx}$ donde $y = f(x)$; etcétera.

La derivada en el punto x suele también definirse mediante las siguientes expresiones:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}\ ;\ f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h};$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x};\text{ etcétera.}$$

EJERCICIOS

1) Aplicando la definición, calcular las siguientes derivadas:

$f'(3)$ si $f: x \to x^2$

$t'(4)$ si $t: x \to \dfrac{x}{x+1}$

$h'(0)$ si $h: x \to x - k$

$m'(3)$ si $m: x \to \dfrac{-4x^2}{x+1}$

$g'(2)$ si $g: x \to \dfrac{1}{x}$

$n'(1)$ si $n: x \to \dfrac{x^2}{2-x^2}$

$r'(4)$ si $r: x \to \ln x$

$\ell'(4)$ si $\ell: x \to \dfrac{3-x^2}{x}$

$s'(3)$ si $s: x \to \sqrt{x}$

$p'(-2)$ si $p: x \to \dfrac{x^2-1}{3x^2-9}$

2) Aplicando la definición, calcular derivada a derecha e izquierda de los puntos indicados:
en $x = 3$ para $f: x \to |x-3|$; en $x = 5$ para $g: x \to -|x-5|$

3) Ver si existe la derivada en 0 para las siguientes funciones:

$$f: x \to \begin{cases} \text{sen}\,\dfrac{\pi}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad g: x \to \begin{cases} x\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$h: x \to \begin{cases} x^2 \cdot \text{sen}\,\dfrac{\pi}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

4) Ver en qué puntos no es derivable f si $f(x) = |x+4| + |5x-10| + 1$.

5) Ídem para f si $f: x \to \begin{cases} -x^2-6x-3 & \text{si } x \leq -1 \\ x+3 & \text{si } -1<x<2 \\ x^2-2x+2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

II. Función derivada

El valor f'(a), considerado como imagen para cada punto a del dominio donde f es derivable, permite definir una nueva función f' que se llama función derivada de f.
Es decir, f' es la función derivada de f si y sólo si:

$$f'(a) = \lim_a \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\ \forall a \in D_f \text{ donde dicho límite existe.}$$

El dominio de f' está formado por los puntos a del dominio de f para los cuales existe f' (a).

Por lo tanto, $D_{f'} \subseteq D_f$.

Como f' es una función, llamada *función derivada de f* o *función derivada de f*, si se aplica el mismo razonamiento anterior puede buscarse su función derivada, que será la derivada primera de f' y la derivada segunda de f.

En general, si existe $f^{(n-1)}$, se llama derivada enésima de la función f a la derivada primera de $f^{(n-1)}$.

O sea, $f^{(n)} = f^{(n-1)\prime}$.

Notaciones usuales son:

$f''(x)$; $\dfrac{d^2f}{dx^2}$; $D_x^2 f$ para la derivada segunda en el punto x;

$f^{(n)}(x)$; $\dfrac{d^nf}{dx^n}$; $D_x^n f$ para la derivada enésima en el punto x; etcétera.

Ejemplo 1

Hallar f' y f'' si $f: x \to 5x^2 + 3x$.

Para encontrar f' basta calcular f'(a) para cualquier número $a \in D_f$ donde la función sea derivable.

$$f'(a) = \lim_a \frac{(5x^2+3x) - (5a^2+3a)}{x-a} = \lim_a \frac{5(x^2-a^2) + 3(x-a)}{x-a} =$$

$$= \lim_a (5x+5a+3) = 10a + 3.$$

Luego, como a es un punto cualquiera del dominio,

$$f'(a) = 10a + 3 \Rightarrow f': x \to 10x + 3.$$

Por el mismo procedimiento respecto de f' calcularemos f'':

$$f''(a) = \lim_a \frac{f'(x) - f'(a)}{x-a} = \lim_a \frac{(10x+3) - (10a+3)}{x-a} =$$

$$= \lim_a \frac{10(x-a)}{x-a} = 10.$$

Luego, $\forall a \in D_f$: $f''(a) = 10$ y $f'': x \to 10$.

Ejemplo 2

Hallar g' y g'' si $g: x \to \sqrt{x}$ $(x>0)$.

$$g'(a) = \lim_a \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \lim_a \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Luego, $g' : x \to \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$g''(a) = \lim_a \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{a}}}{x-a} = \lim_a \frac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{a}(x-a)} =$$

$$= \lim_a \frac{-1}{2\sqrt{x}\sqrt{a}\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)} = -\frac{1}{4a\sqrt{a}}.$$

Por lo tanto, $g'' : x \to \frac{-1}{4x\sqrt{x}}$.

Ejemplo 3

Hallar $g^{(n)}$ si $g: x \to \operatorname{sen} x$.
Aplicando la definición de derivada, es:

$$g'(a) = \lim_a \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x-a}$$

Para calcular el límite anterior puede recurrirse a una fórmula trigonométrica, que transforma en producto la resta (sen x − sen a).

Esta fórmula es : $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a = 2 \operatorname{sen} \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}$.

Resulta entonces:

$$g'(a) = \lim_a \frac{2 \operatorname{sen} \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}}{x-a} =$$

$$= \lim_a \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \right) \cdot \lim_a \left(\cos \frac{x+a}{2} \right) = 1 \cdot \cos a = \cos a.$$

Luego, $\forall x: g'(x) = \cos x = \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Calcularemos ahora la derivada segunda de g.

Por definición, $g''(a) = \lim_a \frac{\cos x - \cos a}{x-a}$.

Podemos utilizar para calcular el límite anterior la fórmula trigonométrica:

$$\cos x - \cos a = -2 \operatorname{sen} \frac{x+a}{2} \operatorname{sen} \frac{x-a}{2}.$$

Queda entonces:

$$g''(a) = \lim_a \frac{-2 \operatorname{sen} \frac{x+a}{2} \operatorname{sen} \frac{x-a}{2}}{x-a} =$$

$$= \lim_a \left(- \frac{\operatorname{sen} \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \right) \cdot \lim_a \left(\operatorname{sen} \frac{x+a}{2} \right) =$$

$$= -1 \cdot \operatorname{sen} a = -\operatorname{sen} a.$$

Luego, $\forall x: g''(x) = -\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$.

Por inducción, puede demostrarse:

$$\forall x \in \mathbb{R} \;\; \forall n \in \mathbb{N}: g^{(n)}(x) = \operatorname{sen} \left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Teorema

Si f es una función constante, entonces f es derivable en todo su dominio y su derivada en cada punto es nula.

Sea $f: x \to k$.

$$\forall a \in \mathbb{R}: f'(a) = \lim_a \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_a \frac{k-k}{x-a} = \lim_a 0 = 0.$$

Teorema

Si f es la función idéntica, entonces f es derivable en todo su dominio y su derivada en cada punto es el número 1.

Sea $f: x \to x$.

$$\forall a \in \mathbb{R}: f'(a) = \lim_a \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_a \frac{x-a}{x-a} = \lim_a 1 = 1.$$

Por el mismo procedimiento se pueden hallar las derivadas de otras funciones usuales.

EJERCICIOS

1) Hallar f'' y g'' aplicando definiciones si $f: x \to x^3 + 2$ y $g: x \to \ln x$.
2) Hallar $f^{(n)}$ si $f: x \to \cos x$.

III. Continuidad de una función derivable

Para una función, la propiedad de ser derivable es más fuerte que la de ser continua. Es decir, la derivabilidad asegura la continuidad, mientras que el recíproco no se cumple, pues existen funciones continuas en un punto que no son derivables en él.

O sea, derivabilidad $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ continuidad.

Teorema

Si una función tiene derivada finita en un punto, entonces es continua en dicho punto

Es decir, el teorema asegura que si existe un número real k, tal que $k = f'(a)$, entonces f es continua en a.

Demostración

Si $x \neq a$: $f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x-a)$.

Calculando el límite en el punto a, es:

$$\text{lím}_a\,[f(x) - f(a)] = \text{lím}_a \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x-a)\right].$$

Aplicando el teorema del límite de un producto, es:

$$\text{lím}_a\,[f(x) - f(a)] = \text{lím}_a \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \text{lím}_a\,(x-a) = f'(a) \cdot 0 = 0.$$

Finalmente:

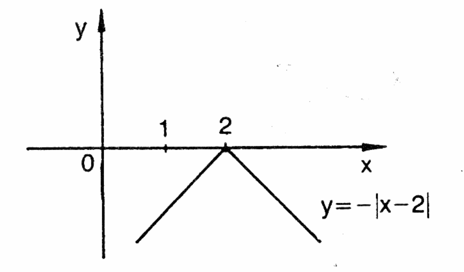
$\text{lím}_a\,[f(x) - f(a)] = 0 \iff \text{lím}_a f(x) = f(a) \Rightarrow$ f continua en a.

Como ya se ha indicado, el recíproco del teorema anterior no es válido, pues una función continua en un punto no es necesariamente derivable en él.

Consideremos, por ejemplo, la función $f: x \to |x|$.

f es continua en el origen, pero, como ya se ha visto (pág. 195), no tiene derivada finita en él, pues la derivada a derecha es 1 y a izquierda -1.

Algo similar sucede con la función $f: x \to -|x-2|$ en el punto $x = 2$.



f es continua en $x = 2$ y no existe $f'(2)$, pues $f'(2^+) = -1$ y $f'(2^-) = 1$.

EJERCICIOS

1) Indicar en qué puntos f es continua pero no derivable si $f: x \to |3x-1| + |x^2-4| + 1$.

2) Ídem si $f: x \to \begin{cases} 2-2x & \text{si } x \leq -4 \\ x^2-6 & \text{si } -4<x<0 \\ 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

3) Dar un ejemplo de una función continua y no derivable en dos puntos de su dominio.

IV. Álgebra de derivadas

Derivada de una suma

Si f y g son derivables en el punto a, entonces f + g es derivable en a y su derivada es la suma de las derivadas.

Es decir, $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

Demostración

Aplicando la definición de derivada a la función (f+g), es:

$$(f+g)'(a) = \text{lím}_a \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x - a}$$

Por definición de suma de funciones:

$$(f+g)'(a) = \text{lím}_a \frac{f(x) + g(x) - f(a) - g(a)}{x - a} = \text{lím}_a \frac{f(x) - f(a) + g(x) - g(a)}{x - a}$$

Aplicando el teorema del límite de una suma, resulta:

$$(f+g)'(a) = \text{lím}_a \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \text{lím}_a \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = f'(a) + g'(a).$$

Derivada de una diferencia

$$(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a).$$

La demostración es análoga a la anterior.

Derivada de un producto

Si f y g son derivables en a, entonces el producto es derivable en a y su derivada es $(fg)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)$.

Demostración

Si aplicamos la definición de derivada a la función (fg), es:

$$(fg)'(a) = \text{lím}_a \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a}$$

Por definición del producto de funciones:

$$(fg)'(a) = \text{lím}_a \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a}$$

Si en el numerador del segundo miembro sumamos y restamos $f(a)g(x)$, resulta:

$$(fg)'(a) = \text{lím}_a \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x - a}$$

Por propiedad distributiva es:

$$(fg)'(a) = \text{lím}_a \frac{[f(x) - f(a)]\,g(x) + f(a)\,[g(x) - g(a)]}{x - a}$$

Aplicando los teoremas de límite de suma y producto, queda:

$$(fg)'(a) = \lim_a \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot \lim_a g(x) + \lim_a f(a)\cdot \lim_a \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

Como la función g es derivable en a, entonces g es continua en a y $\lim_a g(x) = g(a)$.
Además $\lim_a f(a) = f(a)$, por ser f(a) una constante.
Luego, al reemplazar valores, queda la tesis.

Consecuencia

Si $k \in \mathbb{R}$, es $(kf)'(a) = k \cdot f'(a)$.
En efecto, si se aplica el teorema anterior y se tiene en cuenta que la derivada de una constante es cero (pág. 199), resulta:

$$(kf)'(a) = 0 \cdot f(a) + k \cdot f'(a) = k \cdot f'(a).$$

Ejemplos

$$h(x) = x \cdot \operatorname{sen} x \Rightarrow h'(x) = 1 \cdot \operatorname{sen} x + x \cos x$$

$$r(x) = 3\sqrt{x} \Rightarrow r'(x) = 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Derivada de una potencia de exponente natural

Si n es un número natural y $f: x \to x^n$, entonces f es derivable y $f': x \to n\,x^{n-1}$.
Por inducción:
1º) si $n = 1$, es $f(x) = x$ y $f'(x) = 1$ por teorema anterior (pág. 199);
2º) si $n = h$, es $f(x) = x^h$. Suponiendo que $f'(x) = h\,x^{h-1}$, debe probarse que la propiedad se cumple para $n = h + 1$.
Es decir, debe probarse que la derivada de $f(x) = x^{h+1}$ es $f'(x) = (h+1)x^h$.
Sabemos que $f(x) = x^{h+1} = x^h \cdot x$, por definición de potencia de exponente natural.
O sea, $f(x) = x^h \cdot x$.
Si derivamos la expresión anterior utilizando la fórmula para derivar un producto, es:

$$f'(x) = (x^h)' \cdot x + x^h \cdot 1 \qquad (1).$$

Ahora bien, por la hipótesis inductiva: $(x^h)' = h \cdot x^{h-1}$.
Reemplazando el valor anterior en (1), resulta:

$$f'(x) = (h\,x^{h-1}) \cdot x + x^h = h\,x^h + x^h = (h+1)\,x^h.$$

que es la tesis.

Ejemplo

$$f(x) = x^7 \Rightarrow f'(x) = 7x^6$$

Derivada de un cociente

Si f y g son derivables en a y $g(a) \neq 0$, entonces $\frac{f}{g}$ es derivable en a y su derivada es: $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}$.

Demostración

Aplicando la definición de derivada a la función $\frac{f}{g}$, es:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \lim_a \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a}$$

Por la definición de cociente de funciones:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \lim_a \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x-a}.$$

Efectuando operaciones:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \lim_a \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)(x-a)}.$$

Si en el numerador sumamos y restamos f(a)g(a), queda:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \lim_a \frac{f(x)g(a) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)\cdot g(a)\cdot(x-a)} =$$

$$= \lim_a \frac{[f(x) - f(a)]\,g(a) - f(a)\,[g(x) - g(a)]}{g(x)\,g(a)\,(x-a)} =$$

$$= \lim_a \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,g(a) - f(a)\,\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}{g(x)\,g(a)}.$$

Aplicando el álgebra de límites correspondiente y la continuidad de la función g en el punto a, queda la tesis.

Ejemplo

$$h(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} \Rightarrow h'(x) = \frac{\cos x \cdot x^2 - \operatorname{sen} x \cdot 2x}{x^4}$$

Derivada de una función compuesta (Regla de la cadena)

Si el recorrido de la función g está incluido en el dominio de la función f, puede considerarse, como ya hemos visto, la función compuesta $f \circ g$.
Si la función g es derivable en un punto a interior al dominio de g, y la función f es derivable en el punto g(a) interior al recorrido de g, entonces la función compuesta $f \circ g$ es derivable en a y su derivada es:

$$(f \circ g)'(a) = f'[g(a)] \cdot g'(a).$$

Si aplicamos la definición de derivada a la función $f \circ g$ en el punto a, es:

$$(f \circ g)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a}$$

También, por definición de derivada, es:

$$f'[g(a)] = \lim_{g(x) \to g(a)} \frac{f[g(x)] - f[g(a)]}{g(x) - g(a)} \quad y \quad g'(a) = \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

Podemos escribir, pensando en las tres definiciones anteriores:

$$\frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} = \frac{f[g(x)] - f[g(a)]}{g(x) - g(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \quad \text{si } x \neq a \wedge g(x) \neq g(a)$$

Buscando el límite de cada miembro de la expresión anterior para $x \to a$, y recordando, como g es continua, que $x \to a$ implica $g(x) \to g(a)$, obtenemos:

$$\lim_{x \to a} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} = \lim_{g(x) \to g(a)} \frac{f[g(x)] - f[g(a)]}{g(x) - g(a)} \cdot \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

Es decir, $(f \circ g)'(a) = f'[g(a)] \cdot g'(a)$.

Obsérvese ahora que esta demostración sólo es lícita si la función g es inyectiva, pues hemos exigido que $x \neq a$ asegure $g(x) \neq g(a)$.

Si g no es inyectiva, la expresión (1) no tiene sentido si $x \neq a$ pero $g(x) = g(a)$. Por lo tanto, necesitamos una demostración general que abarque el caso en que la función g no es inyectiva. Esa demostración es la siguiente.

◆ *Demostración*

Definamos una función auxiliar h cuyo dominio es el recorrido de g, de la siguiente manera:

$$h: y \to \begin{cases} f'(b) - \dfrac{f(y) - f(b)}{y - b} & \text{si } y \neq b \\ 0 \text{ si } y = b & (b = g(a)) \end{cases}$$

Probaremos, en primer lugar, que la función h es continua en el punto $b = g(a)$.

Para ello debemos probar $\lim_b [h(y)] = h(b) = 0$.

Ahora bien, $\lim_b [h(y)] = \lim_b \left[f'(b) - \dfrac{f(y) - f(b)}{y - b} \right] =$

$$= \lim_b [f'(b)] - \lim_b \left[\frac{f(y) - f(b)}{y - b} \right] =$$

$$= f'(b) - f'(b) = 0.$$

Hemos probado, entonces, que la función h es continua en $b = g(a)$, y como g es continua en a, pues por hipótesis es derivable en a, resulta, aplicando el teorema de continuidad de funciones compuestas (pág. 172), que la función $h \circ g$ es continua en a, es decir,

$$\lim_a (h \circ g)(x) = (h \circ g)(a) = h[g(a)] = h(b) = 0.$$

O sea, $\lim_a h[g(x)] = 0 \quad (1)$.

Consideremos nuevamente el valor de la función h en cualquier punto $y \neq b$:

$$h(y) = f'(b) - \frac{f(y) - f(b)}{y - b}.$$

Luego, podemos escribir:

$$\frac{f(y) - f(b)}{y - b} = f'(b) - h(y),$$

y también:

$$f(y) - f(b) = f'(b)\,(y - b) - h(y)\,(y - b),$$

igualdad que se verifica también si $y = b$, como puede comprobarse mediante la sustitución correspondiente.

Ahora bien, por los requisitos exigidos desde la hipótesis, es $\forall y: y = g(x)$. Luego, si en la última igualdad obtenida reemplazamos b por g(a) e y por g(x), obtenemos:

$$f[g(x)] - f[g(a)] = f'[g(a)]\,[g(x) - g(a)] - h[g(x)]\,[g(x) - g(a)].$$

Podemos dividir ambos miembros por $(x - a)$, considerando $x \neq a$, y resulta:

$$\frac{f[g(x)] - f[g(a)]}{x - a} = f'[g(a)] \frac{g(x) - g(a)}{x - a} - h[g(x)] \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

Calculando el límite en el punto a y utilizando (1), queda:

$$\lim_a \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} = f'[g(a)] \cdot g'(a) - 0 \cdot g'(a).$$

Es decir, $(f \circ g)'(a) = f'[g(a)] \cdot g'(a)$, que es la tesis.

Ejemplo 1

Sean $f: x \to x^6$ y $g: x \to g(x)$.

Es $(f \circ g)(x) = [g(x)]^6$

y $(f \circ g)'(x) = 6\,[g(x)]^5 \cdot g'(x)$.

Ejemplo 2

Sean $f: x \to x^n$ y $g: x \to g(x)$.
Es $(f \circ g)(x) = [g(x)]^n$
y $(f \circ g)'(x) = n\,[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$.

Ejemplo 3

Sean $f: x \to x^3$ y $g: x \to 5x + 1$.
Es $(f \circ g)(x) = (5x+1)^3$
y $(f \circ g)'(x) = 3 \cdot (5x+1)^2 \cdot 5 = 15\,(5x+1)^2$.

En general, si se trata, por ejemplo, de derivar la expresión $y = \operatorname{sen}(3x^5 + 2x)$, se obtiene $y' = \cos(3x^5 + 2x) \cdot (15x^4 + 2)$.

La regla de la cadena se extiende también para derivar funciones compuestas de varias funciones.

Consideremos la expresión $y = \cos^3(5x^2 - 7x) = [\cos(5x^2 - 7x)]^3$.

Se obtiene: $y' = 3\cos^2(5x^2 - 7x) \cdot [-\operatorname{sen}(5x^2 - 7x) \cdot (10x - 7)$.

Análogamente, si $y = \sqrt{\operatorname{sen}(x^2 - 8)}$,

resulta $$y' = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{sen}(x^2-8)}} \cdot \cos(x^2 - 8) \cdot 2x.$$

EJERCICIOS

1) Derivar:

$f(x) = \dfrac{(x+2)^3}{(x-1)^2}$ $\quad g(x) = \dfrac{2-x}{3x-1}$ $\quad h(x) = (2x-1)(3x+5)$

$r(x) = x^2\sqrt{3 + x^2}$ $\quad s(x) = (2x+4)(2-3x)(x^2+1)$ $\quad t(x) = \dfrac{2x^3 - 4x}{5 + x^2}$

2) Hallar derivada primera y segunda:

$f(x) = (3x+5)(1-2x)$ $\quad g(x) = \sqrt{x^2+1}$ $\quad h(x) = \dfrac{1}{2x^2+3}$

3) Derivar:

$f(x) = \operatorname{sen}(5x^2 + 3x)$ $\quad g(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{x})$ $\quad h(x) = \cos(3x^4 - \ln 5)$

$r(x) = [\operatorname{sen} x + \cos(3x)]^5$ $\quad s(x) = \left(\dfrac{x-3}{x^2+1}\right)^3$ $\quad t(x) = \sec^2(3x)$

4) Derivar:

$f(x) = \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}$ $\quad g(x) = \sqrt[3]{|x| + x}$ $\quad h(x) = \dfrac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$

V. Cálculo de algunas derivadas

Derivada del logaritmo natural

Probaremos que si $f: x \to \ln x$, entonces $f': x \to \dfrac{1}{x}$.

Demostración

Si $a > 0$, es:

$$f'(a) = \lim_a \frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \lim_a \frac{\ln \frac{x}{a}}{x - a} = \lim_a \left[\ln\left(\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x-a}}\right)\right]$$

Por teorema de límite (pág. 141), el límite del logaritmo es el logaritmo del límite.

O sea, $f'(a) = \ln\left[\lim_a \left(\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x-a}}\right)\right]$.

Para calcular este límite, que corresponde a un caso de indeterminación, haremos intervenir el número e.

$$\ln\left[\lim_a \left(\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x-a}}\right)\right] = \ln\left[\lim_a \left(\left(1 + \frac{x}{a} - 1\right)^{\frac{1}{x-a}}\right)\right] =$$

$$= \ln\left[\lim_a \left(\left(1 + \frac{x-a}{a}\right)^{\frac{1}{x-a}}\right)\right] = \ln\Bigg(\underbrace{\lim_a \left[\left(1 + \frac{x-a}{a}\right)^{\frac{a}{x-a}}\right]}_{e}^{\frac{1}{a}}\Bigg) =$$

$$= \ln\left(e^{\frac{1}{a}}\right) = \frac{1}{a} \ln e = \frac{1}{a}$$

Derivada logarítmica

La regla de la cadena o regla de derivación de funciones compuestas aplicada a $f \circ g$, donde f es logaritmo natural, es útil en muchas ocasiones para el cálculo de derivadas.

Sean $f: x \to \ln x$ y $g: x \to g(x)$.

En los puntos donde está definida, es:

$$(f \circ g)(x) = \ln[g(x)]$$

$$\text{y} \quad (f \circ g)'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x).$$

Aplicación a la función potencial

Si $f: x \rightarrow x^k$ ($k \in \mathbb{R}$ y $x > 0$), puede considerarse $\ln [f(x)] = k \ln x$.
Derivando los dos miembros de la expresión anterior, resulta:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = k \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = f(x) \cdot k \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = x^k \cdot k \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = k \cdot x^{k-1},$$

fórmula ya obtenida para potencia de exponente natural (pág. 202) y que ahora resulta válida para cualquier exponente real.

Ejemplo

$$f(x) = x^{-\frac{3}{5}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{3}{5}\, x^{-\frac{8}{5}}$$

Aplicación a la función exponencial

Si $f: x \rightarrow k^x$ ($k \in \mathbb{R}$ y $k > 0$), puede considerarse:

$$\ln [f(x)] = x \cdot \ln k.$$

Derivando,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln k$$

$$f'(x) = f(x) \cdot \ln k$$

$$f'(x) = k^x \cdot \ln k$$

Tanto en el caso de la función potencial como en el de la exponencial, si la base o el exponente son a su vez funciones compuestas, se aplica la regla de la cadena.

Ejemplo 1

Calcular f' si $f: x \rightarrow 5^{\ln(x^2+3)}$

$$f(x) = 5^{\ln(x^2+3)}$$

$$\ln [f(x)] = \ln(x^2+3) \cdot \ln 5$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x^2+3} \cdot 2x \cdot \ln 5$$

$$f'(x) = 5^{\ln(x^2+3)} \frac{2x}{x^2+3} \cdot \ln 5$$

Ejemplo 2

Calcular f' si $f: x \rightarrow x^x$.

$$f(x) = x^x$$

$$\ln [f(x)] = x \cdot \ln x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = f(x) (\ln x + 1)$$

$$f'(x) = x^x (\ln x + 1)$$

Derivadas de funciones trigonométricas

Ya se ha calculado en este capítulo (pág. 198) la derivada de la función seno, utilizando la fórmula que transforma en producto la resta ($\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a$).
Se obtuvo $f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = \cos x$.
Por el mismo procedimiento se calculó la derivada de la función coseno:

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} x.$$

Para derivar las demás funciones trigonométricas resulta sencillo aplicar la fórmula que permite derivar un cociente.

Por ejemplo, si $f(x) = \operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$,

entonces $$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (\text{para } \cos x \neq 0).$$

De igual forma se deduce:

$$f(x) = \operatorname{cotg} x \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x} \quad (\text{para } \operatorname{sen} x \neq 0)$$

$$f(x) = \sec x \Rightarrow f'(x) = \operatorname{tg} x \cdot \sec x$$

$$f(x) = \operatorname{cosec} x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cosec} x$$

Derivadas de funciones inversas

Si f es una función biyectiva con derivada finita no nula en el punto a, entonces f^{-1} tiene derivada finita en $f(a)$ y esta derivada es $\dfrac{1}{f'(a)}$.

Demostración

Por definición de función inversa:

$$\forall x: \ f^{-1} [f(x)] = x.$$

Si derivamos la expresión anterior aplicando, para derivar el primer miembro, la regla de la cadena, resulta:

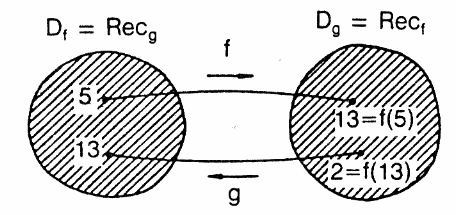
$$(f^{-1})'[f(x)] \cdot f'(x) = 1.$$

Si $f'(x) \neq 0$, $$(f^{-1})'[f(x)] = \frac{1}{f'(x)}.$$

Aplicación

Sean f una función biyectiva y g su función inversa.
Se conocen los valores siguientes: $f(5) = 13$; $f'(5) = 7$;
$f(13) = 2$; $f'(13) = 6$.

Calcular, si es posible, $g'(13)$ y $g'(2)$.



Aplicando el teorema anterior,

$$g'(13) = g'[f(5)] = \frac{1}{f'(5)} \text{ si } f'(5) \neq 0.$$

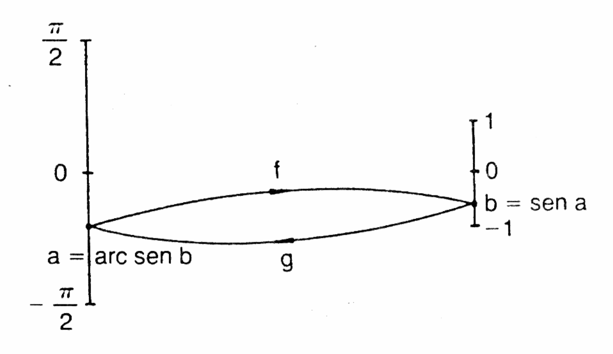
Como $f'(5) = 7$, es $g'(13) = \frac{1}{7}$.

Análogamente, $g'(2) = \frac{1}{f'(13)} = \frac{1}{6}$.

Derivadas de funciones trigonométricas inversas

$f: x \to \text{sen } x \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$

$g: x \to \text{arc sen } x \quad (g = f^{-1})$



Por el teorema anterior: $g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$ si $f'(a) \neq 0$.

Como ya se ha visto, si $f(x) = \text{sen } x$, entonces $f'(x) = \cos x$.
Luego, $f'(a) = \cos a$.

Por lo tanto, $$g'(b) = \frac{1}{\cos a} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 a}} = \frac{1}{\sqrt{1 - b^2}}.$$

O sea, si $g(x) = \text{arc sen } x$, entonces $\forall x \neq 1$: $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

De la misma forma se obtiene:

$g: x \to \text{arc cos } x \Rightarrow g': x \to \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$g: x \to \text{arc tg } x \Rightarrow g': x \to \frac{1}{1 + x^2}$

$g: x \to \text{arc cotg } x \Rightarrow g': x \to \frac{-1}{1 + x^2}$

Ejemplo 1

Calcular f' si $f: x \to \text{arc cos}(ax)$.
Aplicando la fórmula obtenida para derivar la función arco coseno y la regla de la cadena, resulta:

$$f'(x) = \frac{-a}{\sqrt{1 - a^2 x^2}}.$$

Ejemplo 2

Calcular f' si $f: x \to \text{arc tg}(x^3+5)$:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (x^3+5)^2} \cdot 3x^2.$$

Derivada de una función definida implícitamente

Se ha visto en el capítulo 3 (pág. 69) que una función f puede estar definida implícitamente por una expresión del tipo $F(x,y) = 0$ donde $y = f(x)$.
Puede calcularse f' derivando la expresión que define implícitamente a f.

Ejemplo

Sea $F(x,y) = 2x^3 + xy - y^3 x - 1 = 0$.
Si f está definida implícitamente por la expresión anterior, es:

$$2x^3 + xf(x) - [f(x)]^3 \cdot x - 1 = 0.$$

Derivando, y teniendo en cuenta que el primer miembro representa una función constante, cuya derivada es nula, se tiene:

$$6x^2 + f(x) + xf'(x) - 3[f(x)]^2 \cdot f'(x) \cdot x - [f(x)]^3 = 0.$$

Despejando:

$$f'(x) = \frac{6x^2 + f(x) - [f(x)]^3}{3[f(x)]^2 \cdot x - x}$$

si el denominador no es nulo.

En general, en la expresión que resulta, aparece f(x).

EJERCICIOS

1) Calcular f' si:

1) $f: x \rightarrow x^5 + 3x^3 - \operatorname{sen} x$

2) $f: x \rightarrow \cos(6x) + \ln(2x) - \sqrt{x}$

3) $f: x \rightarrow \operatorname{tg}(3x) - 4\cos(6x)$

4) $f: x \rightarrow \ln(\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen}(\ln x)$

5) $f: x \rightarrow (x^5+3x)(x^2-2)$

6) $f: x \rightarrow (x^3+3x^2)(1-\sqrt{x})$

7) $f: x \rightarrow \left(x^{-2}+3x^{3/5}\right)\left(\sqrt[3]{x}-2x^4\right)$

8) $f: x \rightarrow \left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)(3x^2-5)$

9) $f: x \rightarrow (x^2+3x)^4(2-x)^{-3}$

10) $f: x \rightarrow \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

11) $f: x \rightarrow \ln\sqrt{\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}}$

12) $f: x \rightarrow x^{x+1}$

13) $f: x \rightarrow \ln^4(\ln x)$

14) $f: x \rightarrow \sqrt{\operatorname{arc\,sen}(5x^2)}$

15) $f: x \rightarrow \operatorname{arc\,tg}\frac{x^2+1}{x^2-1}$

16) $f: x \rightarrow \cos(\operatorname{arc\,sen} x^2)$

17) $f: x \rightarrow \operatorname{arc\,tg}(\ln x^3)$

18) $f: x \rightarrow e^{\operatorname{tg} x^3}$

19) $f: x \rightarrow \ln(\operatorname{cosec} x + \operatorname{cotg} x)$

20) $f: x \rightarrow \sec\frac{1+x}{x}$

21) $f: x \rightarrow \operatorname{tg}(x^2+1) \cdot \ln x^2$

22) $f: x \rightarrow \operatorname{arc\,sen} x \cdot \operatorname{arc\,tg} x$

23) $f: x \rightarrow \frac{x^3}{\operatorname{arc\,tg}(3x)}$

24) $f: x \rightarrow e^{\operatorname{arc\,cos} x^2}$

25) $f: x \rightarrow x\sqrt{9-x^2}+9\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{3}$

26) $f: x \rightarrow \ln\frac{x^2+x+2}{2x^2+x+1}$

27) $f: x \rightarrow \operatorname{arc\,sen}\frac{1}{x}$

28) $f: x \rightarrow \frac{e^x+e^{-x}}{e^x}$

29) $f: x \rightarrow \operatorname{tg}^4(5x) - \operatorname{tg}(5x) + 1$

30) $f: x \rightarrow \ln x + e^x \operatorname{sen} x^2$

31) $f: x \rightarrow \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{th}^3 x$

32) $f: x \rightarrow 2\operatorname{ch}(x-3) + \operatorname{coth}^2 x$

33) $f: x \rightarrow e^{\cos(3x)} \cdot \operatorname{cotg}(5x)$

34) $f: x \rightarrow 2^{\operatorname{tg} x} \cdot \operatorname{arc\,tg}(2x)$

35) $f: x \rightarrow x^{\ln\sqrt{x}}$

36) $f: x \rightarrow \ln(\sqrt{\operatorname{sen} x}) - e^{x^2+1}$

37) $f: x \rightarrow \sqrt[4]{\frac{1+\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th} x}}$

38) $f: x \rightarrow \frac{1}{2}\operatorname{th}\frac{x}{2} - \frac{1}{6}\operatorname{th}^3\frac{x}{2}$

39) $f: x \rightarrow \ln(x+\sqrt{x^2+9})$

40) $f: x \rightarrow \cos x\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}$

41) $f: x \rightarrow \sqrt{1+\sqrt{6x}}$

42) $f: x \rightarrow \ln\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}} - \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{2}$

43) $f: x \rightarrow \frac{x\operatorname{arc\,tg} x + 1}{\sqrt{x^2+1}}$

44) $f: x \rightarrow 2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \ln\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

2) Demostrar: si $f(x) = \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1-x^2}}$, entonces $xf(x) + 1 - (1-x^2)f'(x) = 0$.

3) a) Demostrar: si f, g, y h son funciones derivables, entonces $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$.

b) Derivar: $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) \cdot (x\operatorname{sen} x + \cos x) \cdot \cos^2 x$.

4) Derivar: a) $f: x \rightarrow \log x$ b) $f: x \rightarrow \log_3 x$

5) Sea f una función biyectiva y h su función inversa. Se conocen los datos siguientes: $f(1) = -4$, $f(0) = 9$, $h(6) = 10$, $h'(-4) = 2$, $h'(6) = 4$ y $f'(0) = 3$. Hallar $f'(1)$, $h'(9)$ y $f'(10)$.

6) Sea f una función biyectiva y g su función inversa. Conocidos los datos: $f(3) = 7$, $f(5) = 3$, $g'(7) = 0$ y $f'(5) = 0$, ver si existen $f'(3)$ y $g'(3)$.

7) Derivar las siguientes funciones definidas implícitamente:

a) $2x^3 - 3xy + y = 5$

b) $x^2 - xy + y^3 = -1$

c) $\sqrt{x} - 4y + y^3x = 6$

d) $x + \frac{x^3}{y} - \frac{y^3}{x} = 2$

e) $x^3 + y = x + y^3 - 2$

f) $3yx^5 - 2y^3x^2 = xy + 2x$

g) $\operatorname{arc\,tg} y - y + x = 0$

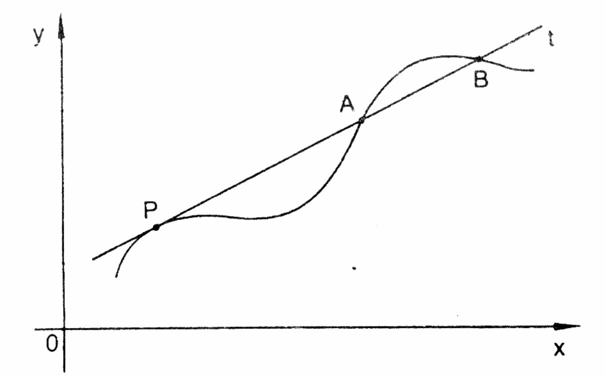
h) $\cos(y+x) - y = 0$

i) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 7 = 0$

VI. Aplicación geométrica de la derivada

En geometría se puede definir la recta tangente a una circunferencia como la perpendicular al radio en su extremo. Esta definición carece de sentido en curvas que no son circunferencias.

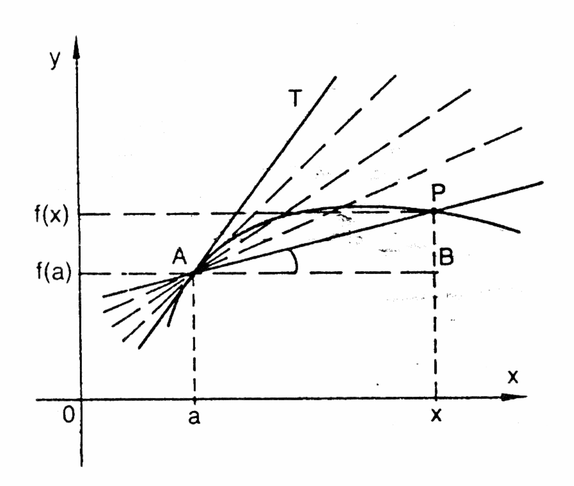
Tampoco puede utilizarse como base de una definición la idea de que la recta tangente tiene un solo punto común con la curva, como puede observarse en el gráfico siguiente:



t es tangente a la curva en P y atraviesa a la misma en A y en B.

Se trata entonces de definir, en forma general, la tangente a una curva en un punto de la misma.

Sea el siguiente el gráfico de una función derivable f:



Consideremos el punto A sobre la curva y otro punto cualquiera P ≠ A. La recta AP es una recta secante a la curva y su pendiente es la tangente trigonométrica del ángulo BAP.

Es decir,

$$\text{pendiente de AP} = \operatorname{tg} \widehat{BAP} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Si el punto P se acerca sobre la curva al punto A, la recta secante AP tiende a una posición límite que corresponde a la recta tangente a la curva en el punto A.

La pendiente de esta recta "límite" es la tangente trigonométrica del ángulo TAB.

O sea,

$$\text{pendiente de AT} = \operatorname{tg} \widehat{TAB} = \lim_a \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Ahora bien, resulta lógico entonces interpretar geométricamente a la derivada en un punto como la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto considerado.

En definitiva, y de acuerdo con las consideraciones intuitivas anteriores, se define la recta tangente al gráfico de una función en un punto del mismo como la recta que pasa por dicho punto y cuya pendiente es la derivada de la función en el punto correspondiente.

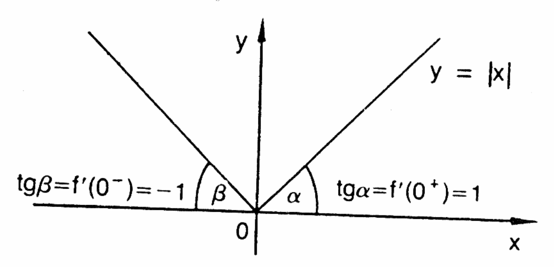
Definición

Recta tangente al gráfico de una función derivable f en el punto $[a;f(a)]$ es la recta a la cual pertenece dicho punto y cuya pendiente es $f'(a)$.

Si la función no tiene derivada finita en el punto considerado, pero tiene derivadas finitas distintas a derecha e izquierda, el punto del gráfico es anguloso, como sucede en el origen para la función $f: x \to |x|$.

En efecto, como ya se ha visto, la función f no es derivable en el origen y, por lo tanto, no hay recta tangente a la curva en el punto (0;0).

Como la función tiene derivadas a derecha e izquierda del origen, pueden considerarse semirrectas tangentes a derecha e izquierda del punto (0;0).



Semirrecta tangente a derecha de (0;0) es la que tiene origen en dicho punto y pendiente igual al número $f'(0^-) = 1$. Semirrecta tangente a izquierda de (0;0) es la que tiene origen en dicho punto y pendiente $f'(0\ ) = -1$.

Si una función es continua y tiene derivada infinita en un punto de su dominio, la recta tangente a la curva en $[a;f(a)]$ es la vertical que pasa por dicho punto.

Es decir, damos la siguiente definición.

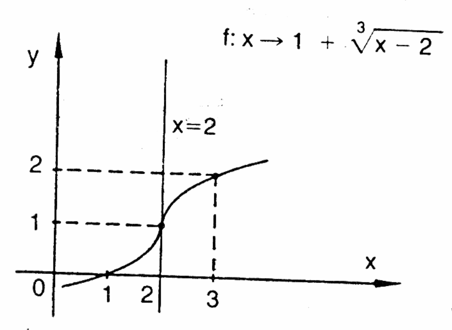
Definición

La recta de ecuación $x = a$ es **tangente vertical** al gráfico de f en el punto $[a;f(a)]$ si y sólo si

$$\lim_a \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$$

Esto sucede, por ejemplo, en el punto (2;1) para la función siguiente:

$$f: x \to 1 + \sqrt[3]{x - 2}$$



$$\lim_2 \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_2 \frac{\sqrt[3]{x-2}}{x - 2} = \lim_2 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} = \infty$$

Luego, la recta de ecuación $x = 2$ es tangente vertical a la curva en (2;1).

◆ *Nota:* Si se quiere dar una definición rigurosa de tangente vertical a una curva en un punto de la misma, debe exigirse, igual que se hizo para las tangentes oblicuas, que las dos semirrectas tangentes a derecha e izquierda del punto considerado sean semirrectas opuestas.

Es decir, se puede dar la siguiente definición de tangente vertical, más fuerte que la anterior: la recta $x = a$ es tangente vertical al gráfico de f en el punto [a;f(a)] si y sólo si:

$$\left(\lim_{a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty \ \wedge \ \lim_{a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty\right)$$
$$\veebar$$
$$\left(\lim_{a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty \ \wedge \ \lim_{a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty\right).$$

En el ejemplo anterior,

$$\lim_{2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{2^-} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} = +\infty.$$

y $$\lim_{2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{2^-} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} = +\infty.$$

Luego, las semirrectas tangentes son opuestas y la recta $x = 2$ es tangente vertical.

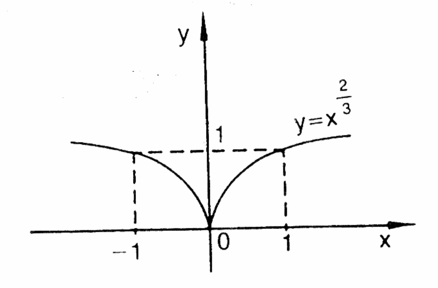
Consideremos, en cambio, la función $f: x \to x^{\frac{2}{3}}$.

En este caso, $\lim_{0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{0^+} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x} = \lim_{0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty$

y $\lim_{0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{0^-} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x} = \lim_{0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty.$

Luego, si se adopta la segunda definición propuesta para tangente vertical, la recta $x = 0$ no cumple los requisitos exigidos y solamente la semirrecta superior es tangente en el origen.

En estas condiciones, el punto (0;0) es un punto *cuspidal* del gráfico.

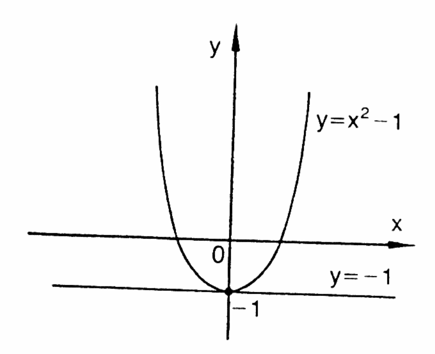


Si la derivada en un punto es nula, la tangente a la curva en el punto correspondiente es una recta horizontal.

O sea, la recta de ecuación $y = f(a)$ es tangente horizontal al gráfico de f en el punto [a;f(a)] si y sólo si $f'(a) = 0$.

Esto sucede, por ejemplo, en el punto (0;−1) para el gráfico de

$$f: x \to x^2 - 1:$$

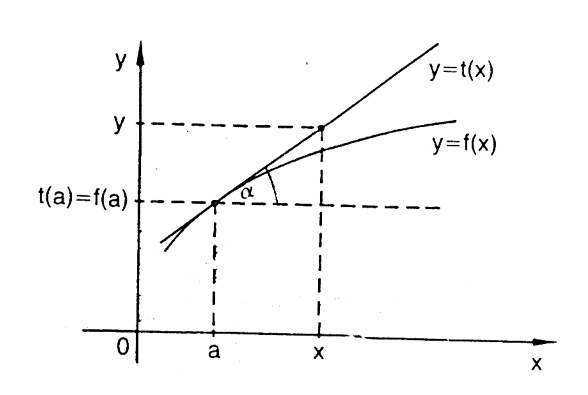


Resulta, $\forall x$: $f'(x) = 2x$ y $f'(0) = 0$

Luego, la recta de ecuación $y = -1$ es tangente horizontal a la curva en el punto (0; −1).

Recta tangente

Si se quiere hallar la ecuación de la recta tangente en el punto [a;f(a)], basta considerar la ecuación de la recta que pasa por dicho punto y tiene pendiente $f'(a)$.



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{t(x) - t(a)}{x - a}$$

Pero $\operatorname{tg} \alpha = f'(a)$, y resulta $f'(a) = \frac{t(x) - f(a)}{x - a}$, ya que $t(a) = f(a)$.

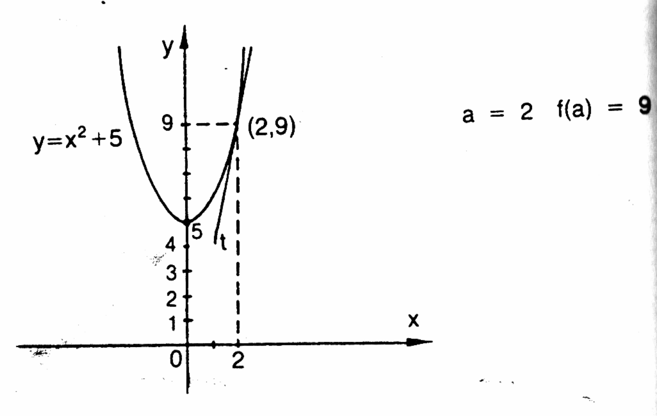
Luego, $t(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$.

La función lineal correspondiente a la recta tangente está dada por la siguiente expresión:

$$t: x \to f'(a)(x-a) + f(a).$$

Ejemplo

Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de $f: x \to x^2 + 5$ en el punto de abscisa $a = 2$.



$a = 2 \quad f(a) = 9$

Además, $\forall a$: $f'(a) = 2a$. Luego, $f'(2) = 4$.

$$t(x) = 4(x-2) + 9 = 4x + 1.$$

Luego, $y = 4x + 1$ es la ecuación de la recta tangente a la curva considerada en el punto (2;9).

Recta normal

Puede definirse la recta normal al gráfico de una función derivable, en un punto del mismo, como la recta perpendicular a la recta tangente en dicho punto.

Es decir **recta normal** al gráfico de la función derivable f en el punto [a;f(a)] es la recta que pasa por dicho punto y tiene pendiente $-\frac{1}{f'(a)}$ si $f'(a) \neq 0$.

Su ecuación es;

$$\frac{n(x) - f(a)}{x - a} = -\frac{1}{f'(a)}.$$

Es decir,

$$n(x) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a) + f(a),$$

y la función lineal correspondiente a la recta normal en [a;f(a)] está dada por la siguiente expresión:

$$n: x \to -\frac{1}{f'(a)}(x-a) + f(a).$$

En el ejemplo anterior, como la tangente en el punto (2;9) tiene pendiente 4, la normal en ese punto tiene pendiente $-\frac{1}{4}$, y su ecuación es:

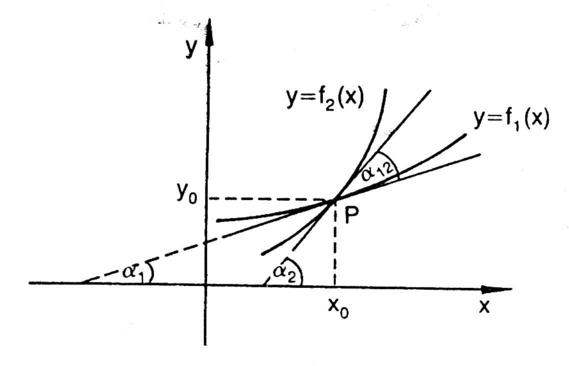
$$y = -\frac{1}{4}(x-2) + 9 \iff y = -\frac{x}{4} + \frac{19}{2}.$$

Si la recta tangente a una curva en el punto [a;f(a)] es la recta horizontal de ecuación $y = f(a)$, la normal en ese punto es la recta vertical de ecuación $x = a$.

Ángulo entre dos curvas

Se define como ángulo entre dos curvas, en un punto que pertenece a ambas, al ángulo formado por las rectas tangentes a cada una en el punto de intersección.

Si las funciones que definen las curvas son derivables, puede hallarse dicho ángulo mediante las respectivas derivadas en el punto.



Llamamos α_{12} al ángulo que forman las curvas C_1 y C_2 en el punto P de coordenadas cartesianas $(x_0; y_0)$.

$$\text{tg}\,\alpha_{12} = \frac{\text{tg}\,\alpha_2 - \text{tg}\,\alpha_1}{1 + \text{tg}\,\alpha_1\,\text{tg}\,\alpha_2} \quad \text{si } \text{tg}\,\alpha_1 \cdot \text{tg}\,\alpha_2 \neq -1.$$

Pero $\text{tg}\,\alpha_1 = f'_1(x_0) \wedge \text{tg}\,\alpha_2 = f'_2(x_0)$.

Luego, $\text{tg}\,\alpha_{12} = \dfrac{f'_2(x_0) - f'_1(x_0)}{1 + f'_1(x_0) f'_2(x_0)}$

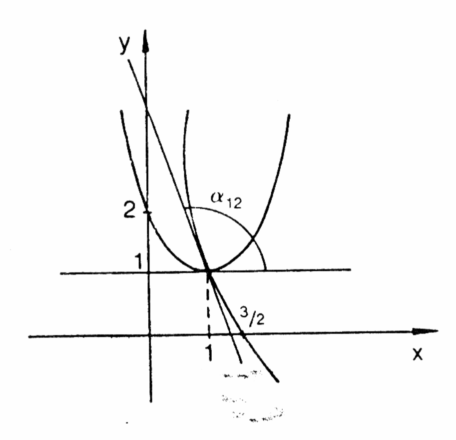
Ejemplo

Sean $f_1: x \to x^2 - 2x + 2$; $f_2: x \to \frac{3}{x} - 2$.

El punto de intersección es (1;1).

$$f'_1(x) = 2x - 2 \Rightarrow f'_1(1) = 0 \wedge f'_2(x) = \frac{-3}{x^2} \Rightarrow f'_2(1) = -3$$

$$\text{tg}\,\alpha_{12} = -3 \Rightarrow \alpha_{12} = \text{arc tg}(-3) \Rightarrow \alpha_{12} \simeq 108^\circ 26'$$



EJERCICIOS

1) Recta tangente y recta normal al gráfico de cada una de las siguientes funciones en el punto de abscisa indicado:

$f: x \to x^2 - 5x + 3$	$a = 1$	$g: x \to 3 - 7x$	$a = 2$
$h: x \to 2 - \sqrt{x}$	$a = 9$	$s: x \to x^3 - 3x^2 + 2$	$a = -1$
$l: x \to x^3 - 3x^2 - 9x + 3$	$a = 3$	$v: x \to 3x^2 + \dfrac{1}{x}$	$a = -1$
$m: x \to \cos(2x) - \operatorname{cotg} x + 3$	$a = \dfrac{\pi}{2}$	$q: x \to e^{3x} - \operatorname{sen}(2x) + 1$	$a = 0$
$p: x \to e^{\operatorname{tg} x} - \dfrac{1}{\ln(x+e)}$	$a = 0$	$r: x \to \ln(1+x^2) - e^{-2x} + \operatorname{tg}(\pi x)$	$a = 0$

2) Indicar para cada función los puntos del gráfico donde la tangente es horizontal:

$f: x \to x^2 - 3x + 2$	$g: x \to x^3 - 6x + 5$
$h: x \to \dfrac{x}{9 - x}$	$s: x \to \dfrac{x}{4 - x}$

3) Indicar en qué puntos del gráfico la tangente tiene pendiente 9 para la función $f: x \to x^3 - 9x^2 + 36x$.

4) Indicar en qué puntos la tangente al gráfico de f forma con el eje positivo de abscisas un ángulo de 45° si $f: x \to \dfrac{x^4}{4} - 7x + 17$.

5) Indicar si hay algún punto en el gráfico de $f: x \to x^3 - \dfrac{1}{x}$ en el cual la recta tangente forma un ángulo de 60°.

6) La tangente al gráfico de $f: x \to x^3 + 4$ en el punto (1;5) corta al gráfico en otro punto. Hallarlo.

7) Sea $f: x \to 3x^3 - 5x^2 + 17$. ¿En qué puntos la recta tangente forma un ángulo de 135° con el eje positivo de abscisas?

8) Sea $f: x \to \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{7}{2}x^2 + 14x - 7$. ¿En qué puntos la recta tangente tiene pendiente 2?

9) Ver si en algún punto la recta tangente al gráfico de $f: x \to x^3 + x - 2$ es paralela a la recta de ecuación $y = 4x + 5$.

10) f está definida implícitamente por $x^3 + x^2y - 4x + 4y = 0$ con $y = f(x)$. Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el origen.

11) Si $f: x \to x \ln x$, encontrar el punto en que la recta normal al gráfico es paralela a la recta de ecuación $y = x + 1$ y escribir su ecuación.

12) Indicar si en algún punto el gráfico de cada una de las siguientes funciones tiene tangente vertical:

$f: x \to \sqrt[3]{(x-1)^2} + 2$	$g: x \to 2 - \sqrt{x + 2}$
$h: x \to \sqrt{36 - x^2}$	$s: x \to \sqrt{x}$
$t: x \to 1 - \sqrt[3]{x + 1}$	$v: x \to \sqrt{x - 1}$
$w: x \to 1 + \sqrt[3]{x + 1}$	$p: x \to 2 - \sqrt[5]{x - 3}$

13) Hallar el ángulo que forman, al cortarse, las curvas definidas por el siguiente par de funciones:

$$f_1: x \to -x^2 + 4x + 4\ ;\quad f_2: x \to x^2 - 4x + 4.$$

14) Ídem para $f_1: x \to \dfrac{x + 1}{x + 2}$; $f_2: x \to \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2}$.

VII. Aplicación física de la derivada

Consideremos una recta r con un sistema de abscisas de origen O y un punto móvil P.

Sea f la función que describe el movimiento del punto P sobre la recta r tal que para cada instante t, f(t) es la distancia s = OP. Esta función f se llama ley de movimiento y sus valores dan el camino recorrido en el tiempo t.

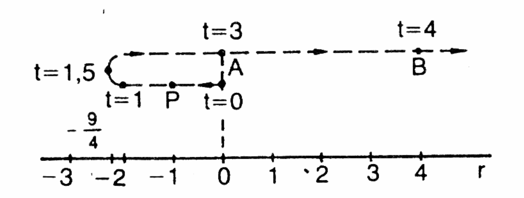
Por ejemplo, sea $f: t \to t^2 - 3t$.

Si $t = 0$ es $f(t) = 0$, y el punto se encuentra en el origen.

Para $t = 1$ es $f(t) = -2$, y el punto se ha desplazado hacia la izquierda del origen.

Para $t = 3$ es $f(t) = 0$, y el punto móvil se encuentra nuevamente en el origen, etcétera.

El movimiento rectilíneo del punto P puede representarse gráficamente de la siguiente manera:



Obsérvese que, aunque el móvil se desplaza sobre una recta, si se quiere hacer el gráfico de la ley de movimiento correspondiente se obtiene una parábola.

Cuando el móvil pasa de la posición A a la posición B, la variación en la posición del punto es $f(4) - f(3)$, correspondiente al intervalo de tiempo $4 - 3 = 1 \neq 0$.

El cociente entre ambos es la *velocidad media* en el intervalo $[3;4]$.

Interesa también conocer la velocidad del móvil en un instante determinado; por ejemplo, para $t = 4$. Para ello se pueden considerar intervalos de tiempo cada vez más pequeños.

Se define como *velocidad instantánea* en el instante $t = 4$ el límite de la velocidad media en intervalos que contienen al punto 4 en su interior.

Es decir,

$$v_4 = \text{lím}_4 \frac{f(t) - f(4)}{t - 4}$$

En nuestro ejemplo, $v_4 = \text{lím}_4 \dfrac{t^2 - 3t - 4}{t - 4} = \text{lím}_4 (t+1) = 5.$

La velocidad en cualquier instante t se obtiene, entonces, derivando la función f. Es decir, $v(t) = f'(t) = 2t - 3$.

La velocidad se anula si $t = \dfrac{3}{2}$. O sea, en el instante $t = 1{,}5$ el cuerpo está en reposo. En el gráfico se observa que en ese instante cambia el sentido del movimiento.

La aceleración en un instante puede definirse, de manera similar, como la derivada segunda de f en el instante t considerado, o como la derivada de la velocidad en ese instante.

Es decir, $a(t) = f''(t) = v'(t)$.

En nuestro ejemplo, $a(t) = f''(t) = v'(t) = 2$.

Es decir, para todo t, la aceleración es constante.

EJERCICIOS

1) Para cada ley de movimiento, indicar en qué instante se anula la velocidad, cuándo es negativa, cuándo es positiva, y representar el movimiento gráficamente sobre una recta:

$$s: t \to t^2 - 5t \qquad 0 \leq t \leq 7$$

$$f: t \to 1 + t - t^2 + 2t^3 \qquad 0 \leq t \leq 2$$

$$g: t \to t^3 - 4t^2 + 3 \qquad 0 \leq t \leq 5$$

$$h: t \to 2t^2 - 6t + 1 \qquad 0 \leq t \leq 4$$

2) Para las leyes del ejercicio anterior indicar en qué instante se anula la aceleración.

3) Indicar la aceleración para el instante en que se anula la velocidad del móvil que responde a esta ley de movimiento:

$$s: t \to t + \frac{9}{t} \qquad t \geq 1.$$

VIII. Diferencial de una función

Al dar la definición de derivada de una función en un punto x, se indicaron distintas notaciones que suelen utilizarse para designar a dicha derivada (pág. 195).

Entre ellas, se indicaron las dos notaciones siguientes:

$$f'(x) \quad , \quad \frac{dy}{dx}$$

La segunda expresión suele leerse "derivada de y respecto de x", y puede justificarse si se define previamente diferencial de una función.

Apliquemos la definición de derivada a la función f en el punto x, llamando h al incremento de x.

$$\text{Es } f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Una propiedad de límite finito, vista en la página 137, indica que la diferencia entre la función considerada y su límite es un infinitésimo en el punto donde se calcula el límite.

Es decir, $f'(x) - \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = g(h)$, y g es un infinitésimo en cero.

Si multiplicamos la expresión anterior por $h \neq 0$, queda:

$$f'(x) \cdot h - [f(x+h) - f(x)] = g(h) \cdot h$$

Es decir, las expresiones $f'(x) \cdot h$ y $[f(x+h) - f(x)]$ son aproximadamente iguales para valores muy pequeños de h.

El número $[f(x+h) - f(x)]$ es el incremento de la función correspondiente a un incremento h para x.

Los incrementos suelen designarse, en general, con el símbolo Δ. Así, es común designar Δx al número h o incremento de x.

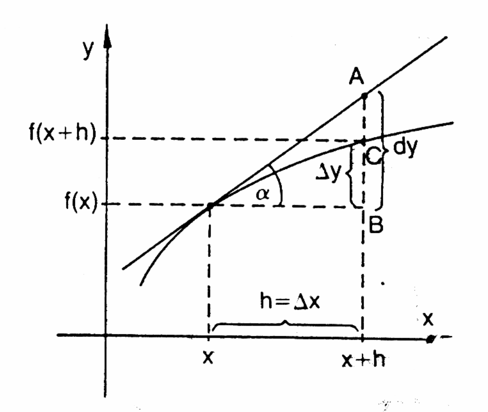
El incremento $[f(x+h) - f(x)]$ puede designarse $\Delta f(x;h)$, que se lee "incremento de f en x respecto de h", o, más simplemente, Δy, aunque esta notación suele utilizarse de manera imprecisa.

La expresión $\underline{f'(x) \cdot h}$ se llama *"diferencial de f en el punto x respecto de h"* y se designa $df(x;h)$ o, más simplemente, dy.

Veamos en un gráfico la interpretación geométrica de los dos números considerados:

$$\Delta y = \Delta f(x;h) = f(x+h) - f(x)$$

$$dy = df(x;h) = f'(x) \cdot h$$



Si designamos AB la longitud del segmento $\overline{AB}$, resulta, observando el gráfico:

$AB = \operatorname{tg} \alpha \cdot h = f'(x) \cdot h =$
$= df(x;h).$

Es decir, la longitud AB corresponde al diferencial de f en x respecto del incremento h.

Por otra parte, la longitud BC corresponde al incremento $\Delta f(x;h)$.

En un entorno de x, cuanto menor es el número h, más se aproximan las longitudes AB y BC. O sea, la resta AB − BC tiende a cero si h tiende a cero.

Por lo tanto, si reemplazamos BC por AB, estamos reemplazando el gráfico de f, entre x y x+h, por la recta tangente en el punto [x;f(x)].

Es decir, se puede aproximar el valor f(x+h) conociendo el valor f(x) y el diferencial de f en x respecto de h. El error que se comete al reemplazar f(x + h) por f(x) + df (x;h) puede hacerse menor que cualquier $\varepsilon > 0$ prefijado, si se toma h convenientemente pequeño.

Trataremos ahora de formalizar las consideraciones anteriores dando la definición de diferencial. Para ello debemos tener en cuenta que el diferencial de una función en un punto x depende del punto x considerado y del incremento h. O sea, el diferencial depende de dos variables: x y h.

Si f es una función escalar, se puede definir entonces, a partir de ella, una función df que depende de dos variables.

La función df se define de la siguiente manera:

df: $(x;h) \longrightarrow f'(x) \cdot h$, para todo número x donde f es derivable y para cualquier número real h.

La nueva función df se llama diferencial de f, y, como hemos dicho, es función de dos variables. Una función de dos variables se llama también función de vector o campo escalar.

El valor df(x;h) es el "diferencial de f en el punto x respecto de h". Nótese que h es un número real cualquiera, mientras que x es un punto interior al dominio de f donde existe derivada finita, es decir, x pertenece al dominio de f'.

En especial, si f es la función idéntica, f: $x \longrightarrow x$,

$\forall x\ \forall h$: $df(x;h) = f'(x) \cdot h = 1 \cdot h = h$.

Es decir, el diferencial de la función idéntica, en cualquier punto y respecto de cualquier incremento h, es igual a dicho incremento. Esta propiedad suele indicarse:

$$dx = \Delta x = h.$$

Por lo tanto, $df(x;h) = f'(x) \cdot h = f'(x) \cdot dx$,

o bien, $dy = f'(x) \cdot dx$.

Si $dx \neq 0$, es $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$. Es decir, la derivada en un punto x puede hallarse como el cociente de los diferenciales indicados. Esta conclusión justifica, entonces, la notación $\dfrac{dy}{dx}$ que se adopta a veces para designar a la derivada.

De la expresión anterior $dy = f'(x) \cdot dx$ se pueden deducir fácilmente las reglas para diferenciar funciones.

Por ejemplo, $y = \operatorname{sen} x \Rightarrow dy = \cos x \cdot dx$

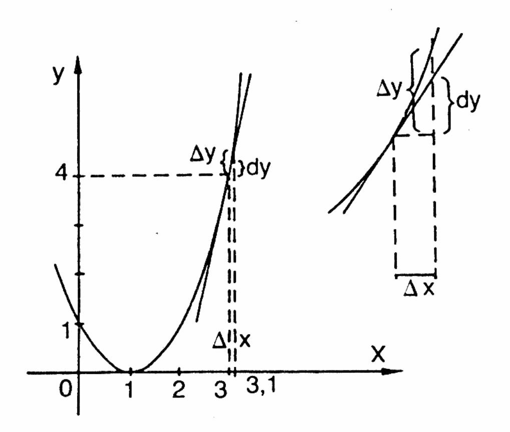
$$y = x^2 \cdot \cos x \Rightarrow dy = (2x \cos x - x^2 \operatorname{sen} x)\, dx =$$
$$= 2x \cdot dx \cdot \cos x + x^2(-\operatorname{sen} x)\, dx =$$
$$= d(x^2) \cdot \cos x + x^2 \cdot d(\cos x).$$

Como la derivada de una función sólo difiere del diferencial en el factor dx, todas las fórmulas para derivación son válidas para diferenciación.

Así, $y = f + g \Rightarrow dy = df + dg$;
$y = f \cdot g \Rightarrow dy = df \cdot g + f \cdot dg$; etcétera

Aplicación

Si $f: x \rightarrow x^2 - 2x + 1$, hallar dy y Δy en el punto $x = 3$ para un incremento $\Delta x = 0{,}1$. Es decir, calcular df(3;0,1) y $\Delta f(3;0,1)$.



$\forall x$: $f'(x) = 2x - 2$. Luego, $f'(3) = 4$.

Aplicando la definición,

$$dy = df(3;0{,}1) = f'(3) \cdot 0{,}1 = 4 \cdot 0{,}1 = 0{,}40;$$
$$\Delta y = \Delta f(3;0{,}1) = f(3{,}1) - f(3) = 4{,}41 - 4 = 0{,}41.$$

Por lo tanto, $\Delta y - dy = 0{,}41 - 0{,}40 = 0{,}01$.

Es decir, si se reemplaza f(3,1) por f(3) + df(3;0,1), el error que se comete es de 0,01.

El cálculo de diferenciales presenta distintas aplicaciones. Una de ellas proporciona otro método para calcular la derivada de una función definida implícitamente, diferenciando la expresión correspondiente.

Sea, por ejemplo, la expresión siguiente:

$$2x^3 + xy - y^3x - 1 = 0,$$

ya considerada en la página 211.

Podemos diferenciar la expresión anterior teniendo en cuenta la definición de diferencial respecto de un incremento dx. El diferencial del primer miembro es nulo, pues dicho miembro representa una función constante.

Resulta:

$$6x^2\,dx + x\,dy + y\,dx - 3y^2x\,dy - y^3dx = 0.$$

Luego,

$$dx(6x^2 + y - y^3) = dy\,(3y^2x - x).$$

Finalmente,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2 + y - y^3}{3y^2x - x},$$

que coincide con la derivada ya obtenida por otro método.

También pueden utilizarse los diferenciales para derivar funciones presentadas en forma paramétrica.

Ya hemos visto que una curva plana puede definirse por dos ecuaciones paramétricas: $x = g(t) \wedge y = f(t)$ x (pág. 96).

Al igual que lo que sucede con las funciones dadas en forma implícita, las ecuaciones paramétricas pueden definir una o más funciones escalares con $y = h(x)$. En ese caso, si f y g son derivables, puede hallarse la derivada de h.

Para ello, como g y f son derivables, también son diferenciables, y resulta $dy = f'(t)\,dt \wedge dx = g'(t)\,dt$.

Por lo tanto, si $g'(t) \neq 0$, es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(t)}{g'(t)}, \text{ siendo } \frac{dy}{dx} = y' = h'(x).$$

Suele indicarse $y' = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$, donde y' indica derivada respecto de x, mientras que $\dot{y}$ y $\dot{x}$ indican derivadas respecto del parámetro t. O sea, $\dot{y} = f'(t) \wedge \dot{x} = g'(t)$.

Puede hallarse, entonces, la recta tangente a la curva en un punto $(x_0;y_0)$ de la misma.

Su ecuación es $\dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \dfrac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0}$, que puede anotarse, utilizando la notación de determinante, de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ \dot{x}_0 & \dot{y}_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Por ejemplo, si $x = 3t^2 - \dfrac{1}{t} \wedge y = t^3 + 2$,

resulta $\dot{x} = 6t + \dfrac{1}{t^2} \wedge \dot{y} = 3t^2$.

Luego, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3t^2}{6t + \dfrac{1}{t^2}}$, o sea, $y' = \dfrac{3t^4}{6t^3 + 1}$.

Si quiere hallarse la ecuación de la recta tangente en el punto correspondiente a $t = 1$, obtenemos:

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y - 3 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Por lo tanto, la recta tangente a la curva en el punto (2;3) tiene ecuación $y = \dfrac{3}{7}x + \dfrac{15}{7}$.

También puede hallarse la derivada segunda de h con $y = h(x)$. Para ello, siendo $y' = \dfrac{f'(t)}{g'(t)}$, es $y'' = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f'(t)}{g'(t)}\right)$.

Recurriendo a la regla de la cadena, resulta:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f'(t)}{g'(t)}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{f'(t)}{g'(t)}\right)\frac{dt}{dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{f''(t)g'(t) - f'(t)g''(t)}{[g'(t)]^2}\,\frac{dt}{dx} \quad \text{con } dx = g'(t)\,dt.$$

Obtenemos entonces $y'' = \dfrac{f''(t)g'(t) - f'(t)g''(t)}{[g'(t)]^3}$.

Suele indicarse $\quad y'' = \dfrac{\ddot{y}\,\dot{x} - \dot{y}\,\ddot{x}}{(\dot{x})^3}$ o bien $y'' = \dfrac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}}{(\dot{x})^3}$.

En nuestro ejemplo es $\ddot{x} = 6 - \dfrac{2}{t^3} \wedge \ddot{y} = 6t$.

$$y'' = \frac{\begin{vmatrix} 6t + \dfrac{1}{t^2} & 3t^2 \\ 6 - \dfrac{2}{t^3} & 6t \end{vmatrix}}{\left(6t + \dfrac{1}{t^2}\right)^3} \Rightarrow y'' = \frac{36t^2 + \dfrac{6}{t} - 18t^2 + \dfrac{6}{t}}{\left(6t + \dfrac{1}{t^2}\right)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{18t^2 + \dfrac{12}{t}}{\left(6t + \dfrac{1}{t^2}\right)^3} \Rightarrow y'' = \frac{18t^8 + 12t^5}{(6t^3 + 1)^3}$$

Otro ejemplo

Hallar las derivadas primera y segunda $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ si $x = t^2 + \operatorname{sen} t \wedge y = 2t^3 - \cos t$.

Para aplicar las fórmulas obtenidas calculamos:

$\dot{x} = 2t + \cos t \qquad \ddot{x} = 2 - \operatorname{sen} t \qquad \dot{y} = 6t^2 + \operatorname{sen} t \qquad \ddot{y} = 12t + \cos t$

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \Rightarrow y' = \frac{6t^2 + \operatorname{sen} t}{2t + \cos t}$$

$$y'' = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x})^3} \Rightarrow y'' = \frac{(12t+\cos t)(2t+\cos t) - (2-\operatorname{sen} t)(6t^2+\operatorname{sen} t)}{(2t+\cos t)^3}$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{12t^2 - 14t\cos t - 2\operatorname{sen} t + 6t^2 \operatorname{sen} t + 1}{(2t+\cos t)^3}$$

También una función escalar, o varias, pueden definirse mediante una ecuación polar (pág.100). En ese caso ya vimos que puede considerarse al argumento t como parámetro.

O sea, $r = f(t)$ con $x = f(t)\cos t \wedge y = f(t)\operatorname{sen} t$.

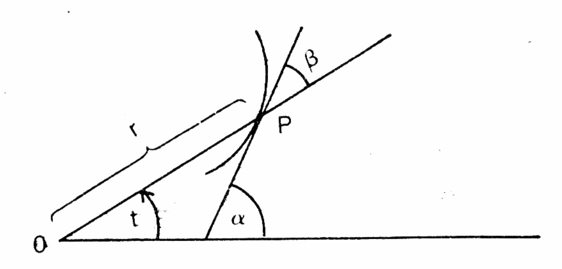
Diferenciando, si existen las derivadas, resulta:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(t)\operatorname{sen} t + f(t)\cos t}{f'(t)\cos t - f(t)\operatorname{sen} t}.$$

Utilizando la notación ya vista para las derivadas respecto del parámetro t, obtenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{r}\operatorname{sen} t + r\cos t}{\dot{r}\cos t - r\operatorname{sen} t}$$

Como ya sabemos, $\frac{dy}{dx}$ indica la pendiente de la recta tangente. En este caso, la recta es tangente a la curva en el punto P de coordenadas polares r y t.



Si dividimos numerador y denominador por $\dot{r}\cos t$, queda:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg} t + \frac{r}{\dot{r}}}{1 - \frac{r}{\dot{r}}\operatorname{tg} t}.$$

Por ejemplo, si la ecuación polar de una curva es $r = 2 + \cos t$, buscamos la pendiente de la recta tangente en un punto cualquiera de la curva, dado por sus coordenadas polares.

Para ello, $r = 2 + \cos t \Rightarrow \dot{r} = -\operatorname{sen} t$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg} t + \frac{2+\cos t}{-\operatorname{sen} t}}{1 - \frac{2+\cos t}{-\operatorname{sen} t}\operatorname{tg} t}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen} t \operatorname{tg} t - 2 - \cos t}{2\operatorname{sen} t + 2\operatorname{tg} t}$$

Si queremos hallar la pendiente de la recta tangente en el punto correspondiente a $t = \frac{\pi}{4}$, vemos que es $r = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$. Además, es $\operatorname{sen} t = \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\operatorname{tg} t = 1$.

$$\text{Por lo tanto,}\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2} + 2} = \frac{-2}{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 2.$$

Interesa también, a veces, encontrar el ángulo β que forma la recta tangente en P con el radio vector OP.

Para ello, observamos que es $\beta = \alpha - t$.

Luego,

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg} t} \quad \text{si} \quad \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg} t \neq -1.$$

Como $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{tg} t + \frac{r}{\dot{r}}}{1 - \frac{r}{\dot{r}}\operatorname{tg} t}$, resulta:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg} t + \frac{r}{\dot{r}} - \operatorname{tg} t + \frac{r}{\dot{r}}\operatorname{tg}^2 t}{1 - \frac{r}{\dot{r}}\operatorname{tg} t + \operatorname{tg}^2 t + \frac{r}{\dot{r}}\operatorname{tg} t}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\frac{r}{\dot{r}}(1+\operatorname{tg}^2 t)}{1 + \operatorname{tg}^2 t}$$

Finalmente, obtenemos $\operatorname{tg}\beta = \frac{r}{\dot{r}}$

Aplicación

Hallar el ángulo β en el punto correspondiente a $t = 0$ si la ecuación polar de la curva es $r = 3(1 - 3\operatorname{sen} t)$.

$r = 3(1 - 3\operatorname{sen} t) \Rightarrow \dot{r} = -9\cos t$

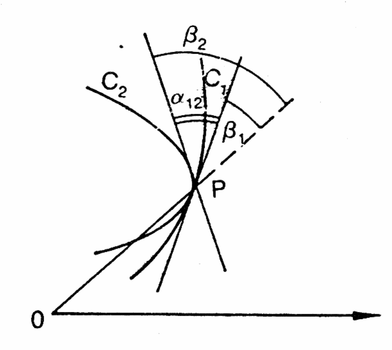
Luego,

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{3(1 - 3\operatorname{sen} t)}{-9\cos t} \Rightarrow \operatorname{tg}\beta = \frac{3\operatorname{sen} t - 1}{3\cos t}$$

$$t = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\beta = -\frac{1}{3} \Rightarrow \beta = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \beta \simeq 161^\circ\, 34'$$

Obsérvese que el ángulo que forman entre sí dos curvas que se cortan puede obtenerse como diferencia de los ángulos que forman las respectivas tangentes con el radio vector del punto de intersección.

Para ello, vemos que $\alpha_{12} = \beta_2 - \beta_1$.



Luego, $\operatorname{tg}\alpha_{12} = \dfrac{\operatorname{tg}\beta_2 - \operatorname{tg}\beta_1}{1 + \operatorname{tg}\beta_1\ \operatorname{tg}\beta_2}$, siendo $\operatorname{tg}\beta_1 = \dfrac{r_1}{\dot r_1} \wedge \operatorname{tg}\beta_2 = \dfrac{r_2}{\dot r_2}$.

Ejemplo

Hallar el ángulo que forman las curvas C_1 y C_2, cuyas respectivas ecuaciones polares son: $r = \cos t$, $r = 1 - \cos t$, en el punto de intersección de coordenadas polares $\left(\frac{1}{2} ; \frac{\pi}{3}\right)$.

Para C_1, $r = \cos t \Rightarrow \dot r = -\operatorname{sen} t$.

Para C_2, $r = 1 - \cos t \Rightarrow \dot r = \operatorname{sen} t$.

En el punto de intersección:

$$r_1 = r_2 = \frac{1}{2}\ ,\quad \dot r_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\quad \dot r_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por lo tanto, $\operatorname{tg}\beta_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \wedge \operatorname{tg}\beta_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Luego, $\operatorname{tg}\alpha_{12} = \dfrac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{1}{3}} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha_{12} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha_{12} = \dfrac{\pi}{3}$.

EJERCICIOS

1) Calcular Δy y dy para:

a) $y = \sqrt{x}$ en $x = 4$ respecto de $\Delta x = 10^{-4}$.

b) $y = x^2 - x$ en $x = 2$ respecto de $\Delta x = 10^{-2}$.

c) $y = x^2 - 3$ en $x = 4$ respecto de $\Delta x = 10^{-2}$.

2) Calcular el error que se comete si se reemplaza $f(5{,}02)$ por $f(5) + df(5;0{,}02)$ para $f: x \to x^3 - 3x$.

3) Calcular las derivadas del ejercicio 7 (pág. 213) diferenciando las expresiones dadas.

4) Hallar derivadas primera y segunda de cada una de las siguientes funciones dadas por ecuaciones paramétricas:

a) $x = t^2 + 5 \qquad y = 1 - t^3$.

b) $x = e^t \qquad y = e^{2t}$.

c) $x = t - \dfrac{1}{t} \qquad y = t + \dfrac{1}{t}$.

5) Ecuaciones de las rectas tangente y normal a cada una de las siguientes curvas en el punto correspondiente al valor indicado para el parámetro:

a) $x = 3\cos t \qquad y = 4\operatorname{sen} t \qquad t = \dfrac{\pi}{4}$.

b) $x = \dfrac{t+1}{t-1} \qquad y = \dfrac{t-1}{t+1} \qquad t = 2$.

6) Hallar la expresión de $y''' = \dfrac{d^3y}{dx^3}$ para una función dada por las ecuaciones paramétricas $x = g(t) \wedge y = f(t)$.

7) Hallar la pendiente de la recta tangente a la curva de ecuación polar $r = \cos t$ para $t = \dfrac{\pi}{3}$.

8) Ídem para $r = 1 + \cos t$ en un punto cualquiera de la curva.

9) Hallar el ángulo que forma la recta tangente con el radio vector si la ecuación polar de la curva es $r = 2 + \operatorname{sen} t$ para $t = 0$.

10) Hallar el ángulo que forman la curva C_1, de ecuación polar $r = 3(1 - \operatorname{sen} t)$, y la curva C_2, de ecuación polar $r = 1 + \operatorname{sen} t$, en el punto correspondiente a $t = \dfrac{\pi}{6}$.

11) Ídem para C_1: $r = 4(1 - \operatorname{sen} t)$ y C_2: $r = 4\operatorname{sen} t$ para $t = \dfrac{\pi}{6}$ y para $t = \dfrac{5\pi}{6}$.

12) Siendo la ecuación polar de C_1: $r = \cos t$ y la de C_2: $r = \operatorname{sen} t$, a) hallar los puntos de intersección, b) el ángulo que forman las curvas en esos puntos.

IX. Tabla de derivadas usuales

f(x)	f′(x)
k	0
x^n	$n\,x^{n-1}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\ln g(x)$	$\frac{g'(x)}{g(x)}$
$g(x) \pm h(x)$	$g'(x) \pm h'(x)$
$g(x) \cdot h(x)$	$g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$
$\frac{g(x)}{h(x)}$	$\frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$
e^x	e^x
k^x	$k^x \cdot \ln k$
$k^{g(x)}$	$k^{g(x)} \cdot \ln k \cdot g'(x)$
$\log_a x$	$\frac{1}{x} \cdot \log_a e$
$\log_a g(x)$	$\frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) \cdot \log_a e$
$[g(x)]^{h(x)}$	$[g(x)]^{h(x)} \left[h'(x) \cdot \ln [g(x)] + h(x) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)}\right]$
$[g(x)]^{g(x)}$	$[g(x)]^{g(x)} [1 + \ln g(x)] \cdot g'(x)$
x^x	$x^x (\ln x + 1)$
sen x	cos x
cos x	− sen x
tg x	$\sec^2 x$
cotg x	$-\operatorname{cosec}^2 x$
sec x	tg x · sec x
cosec x	− cotg x · cosec x

f(x)	f′(x)
arc sen x	$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
arc cos x	$\frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$
arc tg x	$\frac{1}{1 + x^2}$
arc cotg x	$\frac{-1}{1 + x^2}$
arc sec x	$\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
arc cosec x	$-\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
sh x	ch x
ch x	sh x
th x	$\operatorname{sech}^2 x$
coth x	$-\operatorname{cosech}^2 x$
sech x	− sech x · th x
cosech x	− cosech x · coth x
arg sh x	$\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$
arg ch x	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
arg th x	$\frac{1}{1 - x^2}$
arg coth x	$\frac{-1}{x^2 - 1}$
arg sech x	$-\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
arg cosech x	$-\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

RESPUESTAS A EJERCICIOS

CAPÍTULO 6

Sección I

1) $f'(3) = 6$ $\quad h'(0) = 1$ $\quad g'(2) = -\frac{1}{4}$ $\quad (4) = \frac{1}{4}$ $\quad s'(3) = \frac{\sqrt{3}}{6}$

$t'(4) = \frac{1}{25}$ $\quad m'(3) = -\frac{15}{4}$ $\quad l'(4) = -\frac{19}{16}$ $\quad n'(1) = 4$ $\quad p'(-2) = \frac{8}{3}$

2) $f'(3^+) = 1$ $\quad f'(3^-) = -1$ $\quad g'(5^+) = -1$ $\quad g'(5^-) = 1$

3) $f'(0)$ y $g'(0)$ no existen $\quad h'(0) = 0$

4) no $\exists f'$ en -4 ni en 2

5) no $\exists f'$ en -1 ni en 2

Sección II

1) $f'': x \rightarrow 6x \quad g'': x \rightarrow -\frac{1}{x^2}$ $\quad$ 2) $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

Sección III

1) en $\frac{1}{3}$, 2 y -2

2) en -4 (en 0 f no es continua)

3) Ejemplo: $f(x) = |x+5| + |x-1| + 7$ $\quad$ en -5 y en 1

Sección IV

1) $f'(x) = \frac{(x+2)^2\,(x-7)}{(x-1)^3}$ $\quad g'(x) = \frac{-5}{(3x-1)^2}$ $\quad h'(x) = 7 + 12x$

$r'(x) = \frac{3x(2+x^2)}{\sqrt{3+x^2}}$ $\quad s'(x) = -24x^3 - 24x^2 + 4x - 8$

$t'(x) = \frac{34x^2 + 2x^4 - 20}{(x^2+5)^2}$

2) $f'(x) = -12x - 7$ $\quad f''(x) = -12$

$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ $\quad g''(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

$h'(x) = \frac{-4x}{(2x^2+3)^2}$ $\quad h''(x) = \frac{12(2x^2-1)}{(2x^2+3)^3}$

3) $f'(x) = (10x+3)\cos(5x^2+3x)$ $\quad g'(x) = \frac{\sqrt{x}\cos\left(\sqrt{x}\right)}{2x}$

$h'(x) = -12x^3 \operatorname{sen}(3x^4 - \ln 5)$

$r'(x) = 5\,[\operatorname{sen} x + \cos(3x)]^4 \cdot [\cos x - 3\operatorname{sen}(3x)]$

$s'(x) = \frac{3(x-3)^2\,(6x-x^2+1)}{(x^2+1)^4}$

$t'(x) = 6\operatorname{tg}(3x)\cdot \sec^2(3x)$

4) $f'(x) = \frac{-|x|}{x^3\sqrt{1+x^2}}$

$g'(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}(2x)^{-2/3} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x<0 \end{cases}$

$h'(x) = \frac{-2\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}$

Sección V

1) *1)* $5x^4 + 9x^2 - \cos x$ $\qquad$ *2)* $-6\operatorname{sen} 6x + \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3) $\frac{3}{\cos^2 3x} + 24\operatorname{sen} 6x$ $\qquad$ *4)* $\operatorname{cotg} x + \cos(\ln x)\frac{1}{x}$

5) $7x^6 + 9x^2 - 10x^4 - 6$ $\qquad$ *6)* $\frac{\sqrt{x}}{2}(6x\sqrt{x} + 12\sqrt{x} - 7x^2 - 15x)$

7) $-\frac{5}{3}x^{-\frac{8}{3}} - 4x + \frac{14}{5}x^{-\frac{1}{15}} - \frac{138}{5}x^{\frac{18}{5}}$ $\qquad$ *8)* $\frac{15}{2}x^{\frac{3}{2}} - 3 - \frac{5}{2\sqrt{x}} - \frac{5}{x^2}$

9) $\frac{(x^2+3x)^3\,(13x+24-5x^2)}{(2-x)^4}$ $\qquad$ *10)* $\frac{-1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$

11) $\frac{1}{(x-4)\sqrt{x}}$ $\qquad$ *12)* $x^x\,(x\ln x + x + 1)$

13) $\frac{4\ln^3(\ln x)}{x\ln x}$ $\qquad$ *14)* $\frac{5x}{\sqrt{\operatorname{arc\,sen} 5x^2}\sqrt{1-25x^4}}$

15) $\frac{-2x}{x^4+1}$ $\qquad$ *16)* $\frac{-2x^3}{\sqrt{1-x^4}}$

17) $\frac{3}{[1+\ln^2(x^3)]\,x}$ $\qquad$ *18)* $e^{\operatorname{tg} x^3}\cdot\frac{3x^2}{\cos^2(x^3)}$

19) $-\operatorname{cosec} x$

20) $-\frac{1}{x^2}\operatorname{tg}\frac{1+x}{x}\cdot\sec\frac{1+x}{x}$

21) $2x\sec^2(x^2+1)\ln x^2+\frac{2}{x}\operatorname{tg}(x^2+1)$

22) $\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\operatorname{arc\,sen} x}{1+x^2}$

23) $\frac{3x^2}{\operatorname{arc\,tg} 3x}-\frac{3x^3(1+9x^2)^{-1}}{(\operatorname{arc\,tg} 3x)^2}$

24) $\frac{-2x\, e^{\operatorname{arc\,cos} x^2}}{\sqrt{1-x^4}}$

25) $2\sqrt{9-x^2}$

26) $\frac{-6x-x^2-1}{(x^2+x+2)(2x^2+x+1)}$

27) $\frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

28) $\frac{-2}{e^{2x}}$

29) $\frac{5(4\operatorname{tg}^3 5x-1)}{\cos^2 5x}$

30) $\frac{1}{x}+e^x\operatorname{sen} x^2+2x\,e^x\cos x^2$

31) $\operatorname{sh}2x+3\operatorname{th}^2x\operatorname{sech}^2x$

32) $2\operatorname{sh}(x-3)-2\coth x\cdot\operatorname{cosech}$

33) $e^{\cos(3x)}\left[\frac{-3\operatorname{sen}x\cos(5x)}{\operatorname{sen}(5x)}-\frac{5}{\operatorname{sen}^2(5x)}\right]$

34) $2^{\operatorname{tg}x}\left[\frac{\ln 2\operatorname{arc\,tg}(2x)}{\cos^2 x}+\frac{2}{1+4x^2}\right]$

35) $\frac{x^{\ln\sqrt{x}}\left(\ln x+2\ln\sqrt{x}\right)}{2x}$

36) $\frac{1}{2}\operatorname{cotg}x-2x\,e^{x^2+1}$

37) $\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x}}$

38) $\frac{1}{4\operatorname{ch}^4\left(\frac{x}{2}\right)}$

39) $\frac{1}{\sqrt{9+x^2}}$

40) $\frac{-2\operatorname{sen}^3x}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2x}}$

41) $\frac{3}{2\sqrt{6x}\sqrt{1+\sqrt{6x}}}$

42) $\frac{x^2}{1-x^4}$

43) $\operatorname{arc\,tg}x\,(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$

44) $\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

3) a) $(fgh)'=(fg)'h+(fg)h'=(f'g+fg')h+fgh'=f'gh+fg'h+fgh'$

b) $y'=\cos(\operatorname{sen}x)\cos^3x(x\operatorname{sen}x+\cos x)+$
$+\,x\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)\cos^3x-\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)(x\operatorname{sen}x+\cos x)\operatorname{sen}2x$

4) Recordamos la siguiente propiedad: $\log_b x=\log_b e\cdot\log_e x$

a) $\frac{\log e}{x}$ b) $\frac{\log_3 e}{x}$

5) $f'(1)=\frac{1}{2}$ $h'(9)=\frac{1}{3}$ $f'(10)=\frac{1}{4}$

6) no existen

7) a) $\frac{3(y-2x^2)}{1-3x}$ b) $\frac{2x-y}{x-3y^2}$

c) $\frac{1+2y^3\sqrt{x}}{(4-3y^2x)\,2\sqrt{x}}$ d) $\frac{y^5+y^2x^2+3yx^4}{x^5+3y^4x}$

e) $\frac{1-3x^2}{1-3y^2}$. f) $\frac{2-15yx^4+4xy^3+y}{3x^5-6y^2x^2-x}$

g) $\frac{1+y^2}{y^2}$ h) $\frac{-\operatorname{sen}(x+y)}{1+\operatorname{sen}(x+y)}$ i) $-\frac{y^2}{x^2}$

Sección VI

1) f) $t: y=-3x+2$ $n: y=\frac{x}{3}-\frac{4}{3}$

g) $t: y=-7x+3$ $n: y=\frac{x}{7}-\frac{79}{7}$

h) $t: y=-\frac{x}{6}+\frac{1}{2}$ $n: y=6x-55$

s) $t: y=9x+7$ $n: y=-\frac{x}{9}-\frac{19}{9}$

ℓ) $t: y=-24$ $n: x=3$

v) $t: y=-7x-5$ $n: y=\frac{x}{7}+\frac{15}{7}$

m) $t: y=x-\frac{\pi}{2}+2$ $n: y=-x+\frac{\pi}{2}+2$

q) $t: y=x+2$ $n: y=-x+2$

p) $t: y=\frac{e+1}{e}x$ $n: y=-\frac{e}{e+1}x$

r) $t: y=(2+\pi)x-1$ $n: y=\frac{-1}{2+\pi}x-1$

2) f) $\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{4}\right)$ g) $(\sqrt{2};\,5-4\sqrt{2})$ $(-\sqrt{2};\,5+4\sqrt{2})$

h) no existen s) no existen

3) (3;54) 4) (2;7) 5) no existe 6) (−2;−4)

7) (1;15) y $\left(\frac{1}{9};\frac{4117}{243}\right)$ 8) $\left(-4;-\frac{85}{3}\right)$ y $\left(-3;-\frac{53}{2}\right)$

9) $(-1;-4)$ y $(1;0)$ 10) $y = x$ 11) $(e^{-2};-2e^{-2})$ $y = x - 3e^{2}$

12) f) $(1;2)$ g) $(-2;2)$ h) $(6;0)$, $(-6;0)$ s) $(0;0)$ t) $(-1;1)$
v) $(1;0)$ w) $(-1;1)$ p) $(3;2)$

13) en $(0;4)$ y en $(4;4)$ $\alpha_{12} = \operatorname{arc\,tg} \frac{8}{15}$

14) en $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ $\alpha_{12} = 0$ y en $\left(-6;\frac{5}{4}\right)$ $\alpha_{12} = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{-18}{31}\right)$

Sección VII

1) s) $v = 0$ si $t = 2{,}5$; $v < 0$ si $0 \le t < 2{,}5$ y $v > 0$ si $t > 2{,}5$

t=5
t=2,5
t=0
−6,25 0

f) $\forall t$: $v > 0$

t=0 t=2
0 1 15

g) $v = 0$ si $t = 0$ ó $t = \frac{8}{3}$; $v < 0$ si $0 \le t < \frac{8}{3}$ y $v > 0$ si $t > \frac{8}{3}$

t=2,6
t=0
−6,48 0 3

h) $v = 0$ si $t = 1{,}5$; $v < 0$ si $0 \le t < 1{,}5$ y $v > 0$ si $t > 1{,}5$

t=1,5
t=0
−3,5 0 1

2) s) $\forall t$: $a = 2$ f) $a = 0$ si $t = \frac{1}{6}$ g) $a = 0$ si $t = \frac{4}{3}$

h) $\forall t$: $a = 4$

3) $v = 0$ $a = \frac{2}{3}$ si $t = 3$

Sección VIII

1) a) $dy = 0{,}0000250$ b) $dy = 0{,}0300$ c) $dy = 0{,}0800$
$\Delta y = 0{,}0000249$ $\Delta y = 0{,}0301$ $\Delta y = 0{,}0801$

2) $f(5{,}02) = 111{,}446008$ $f(5) + df(5;0{,}02) = 110 + 1{,}44 = 111{,}44$
$\epsilon = 0{,}006008 < 0{,}01$

4) a) $y' = -\frac{3}{2}t$ $y'' = -\frac{3}{4t}$

b) $y' = 2e^{t}$ $y'' = 2$

c) $y' = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$ $y'' = \frac{4t^3}{(t^2+1)^3}$

5) a) $t(x) = -\frac{4}{3}x + 4\sqrt{2}$ $n(x) = \frac{3}{4}x + \frac{7}{8}\sqrt{2}$

b) $t(x) = -\frac{1}{9}x + \frac{2}{3}$ $n(x) = 9x - \frac{80}{3}$

6) $y''' = \frac{(\dot{x})^2\,\dddot{y} - \dot{x}\,\dot{y}\,\dddot{x} - 3\,\dot{x}\,\ddot{x}\,\ddot{y} + 3(\ddot{x})^2\,\dot{y}}{(\dot{x})^5}$

7) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 8) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{-\cos t - \cos 2t}{\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 2t}$ 9) $\beta = \operatorname{arc\,tg} 2$

10) $\alpha_{12} = \frac{\pi}{2}$ 11) $\alpha_{12} = \frac{\pi}{3}$ en $\left(2;\frac{\pi}{6}\right)$ y $\alpha_{12} = \frac{2\pi}{3}$ en $\left(2;5\frac{\pi}{6}\right)$

12) a) se intersectan en el origen y para $t = \frac{\pi}{4}$ (Nótese que el origen tiene para C_1 coordenadas polares $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ y para C_2 $(0{,}0)$.)

b) en los dos puntos de intersección las curvas son ortogonales.

7. MAXIMOS Y MINIMOS

En muchas situaciones interesa conocer en qué puntos del dominio una función alcanza un valor máximo o mínimo o en qué intervalos la función es creciente o decreciente.

En economía, por ejemplo, las funciones correspondientes a una demanda normal son decrecientes y las de oferta normal son crecientes.

Otro problema corriente es el del fabricante que desea conocer las dimensiones del envase de un producto para que el gasto de material sea mínimo, o cuál camino debe elegir para que el rendimiento del transporte sea máximo.

Si bien en la vida cotidiana esos problemas responden a diversos factores de influencia y la solución matemática corresponde a funciones de vector o de varias variables, la introducción al tema debe darse como aplicación del cálculo diferencial para funciones escalares.

Ya se han visto en capítulos anteriores las definiciones de funciones monótonas y de máximos y mínimos absolutos y locales. Se verá ahora de qué manera el cálculo de la derivada permite localizar los intervalos en que una función es monótona y aquellos puntos del dominio en los cuales el gráfico de la función presenta algunas características especiales.

I. Signo de la derivada primera

Teorema 1

Si el punto a es interior al dominio de la función f y f tiene derivada finita y positiva en a, entonces existe un entorno reducido del punto a en el cual se verifica:

$$\forall x: [(x > a \Rightarrow f(x) > f(a)) \wedge (x < a \Rightarrow f(x) < f(a))].$$

Demostración

Por hipótesis, $f'(a) = \lim_a \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$

Por una propiedad de límite finito (pág 134), existe un entorno reducido del punto a donde $\forall x: \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ tiene el mismo signo que su límite.

Es decir, $\exists E'(a) / \forall x \in E'(a): \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$

Para que el cociente indicado sea positivo en el entorno considerado, es necesario y suficiente que el numerador y el denominador tengan el mismo signo.

Es decir, si el denominador $x - a$ es un número positivo, entonces el numerador $f(x) - f(a)$ es también un número positivo.

O sea, $x - a > 0 \Rightarrow f(x) - f(a) > 0$ (1).

La otra posibilidad es que denominador y numerador sean ambos negativos.

O sea, $x - a < 0 \Rightarrow f(x) - f(a) < 0$ (2).

Luego, de (1) y (2) resulta:

$$\forall x: [(x > a \Rightarrow f(x) > f(a) \wedge (x < a \Rightarrow f(x) < f(a))],$$

que es la tesis.

Obsérvese que en este caso, cuando la derivada $f'(a)$ es positiva, $f(a)$ no puede ser máximo ni mínimo local.

En efecto, $f(a)$ no es máximo, pues se ha visto que para $x > a$ resulta $f(x) > f(a)$, lo cual contradice la definición de máximo para $f(a)$.

Análogamente, $f(a)$ no es mínimo, pues para $x < a$ resulta $f(x) < f(a)$, que contradice la definición de mínimo para $f(a)$.

Teorema 2

Si el punto a es interior al dominio de la función f y f tiene derivada finita y negativa en a, entonces existe un entorno reducido del punto a en el cual se verifica:

$$\forall x: [(x > a \Rightarrow f(x) < f(a)) \wedge (x < a \Rightarrow f(x) > f(a))].$$

La demostración es análoga a la del teorema anterior.

Nota: La propiedad demostrada en el teorema 1 suele indicarse diciendo que si una función f tiene derivada positiva en un punto, entonces *f es estrictamente creciente en dicho punto.*

Para ello se define previamente crecimiento estricto en un punto de la siguiente manera:

$$f \text{ estrictamente creciente en el punto } a \Leftrightarrow \exists E(a) / [(x > a \wedge x \in E(a) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x) > f(a)) \wedge (x < a \wedge x \in E(a) \Rightarrow f(x) < f(a))].$$

Es decir, el crecimiento en un punto asegura la existencia de un entorno donde el incremento de x y el incremento de y tienen el mismo signo.

Análogamente, el teorema 2 puede enunciarse: si una función f tiene derivada negativa en un punto, entonces *f es estrictamente decreciente en dicho punto.* Es decir, existe un entorno del punto donde el incremento de x y el incremento de y tienen signos opuestos.

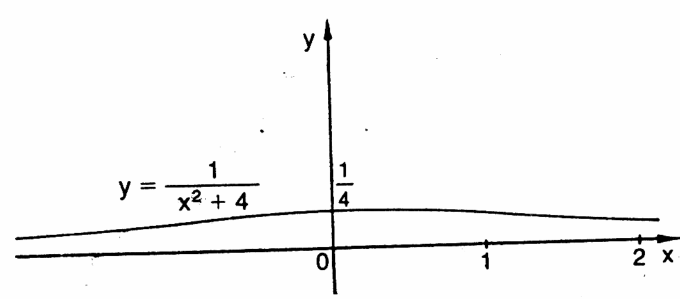
II. Extremos de una función

Se llaman valores extremos de una función los máximos y mínimos locales o absolutos de la misma.

Para encontrar los extremos locales de una función se puede recurrir a su definición, investigando los valores que alcanza la función en distintas partes del dominio.

En algunos casos puede resultar sencillo utilizar ese método, como sucede e
ejemplo siguiente:

Sea f: $x \rightarrow \frac{1}{x^2 + 4}$



Para $x = 0$ es $f(0) = \frac{1}{4}$ y $\forall x \neq 0$ es $f(x) < \frac{1}{4}$

Luego $f(0) = \frac{1}{4}$ es un máximo local de f, que, en este caso, es también máx
absoluto de f en $\mathbb{R}$.

Obsérvese que en este ejemplo $f(0) = \frac{1}{4}$ es máximo absoluto en cualquier su
conjunto del dominio al cual pertenezca el origen.

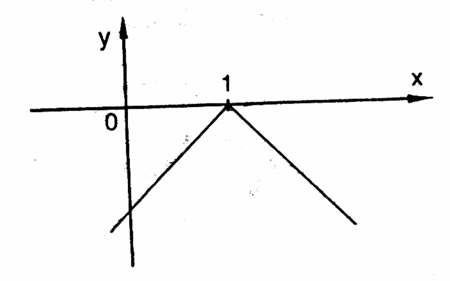
En la mayoría de las funciones, sin embargo, no es simple localizar extremos p
comparación de valores.

En el ejemplo anterior puede observarse que la derivada de la función f se an
en el origen, pues:

$$\forall x: f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+4)^2} \quad y \quad f'(0) = 0.$$

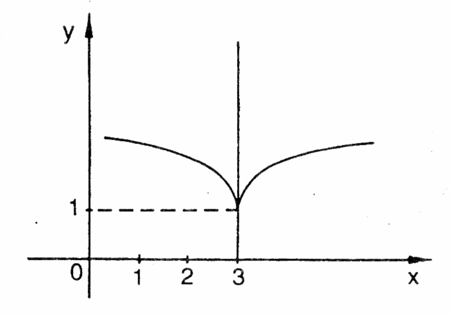
Esta circunstancia parece sugerir la idea de que la función alcanza valores ex
mos en aquellos puntos donde el gráfico admite tangente horizontal.

Esta idea no es correcta, pues una función puede alcanzar máximo o mín
local en puntos donde no hay tangente, es decir, en puntos donde la función n
derivable, como sucede en la función $f: x \rightarrow -|x - 1|$:



f(1) es máximo local y absoluto de f y no existe f'(1).

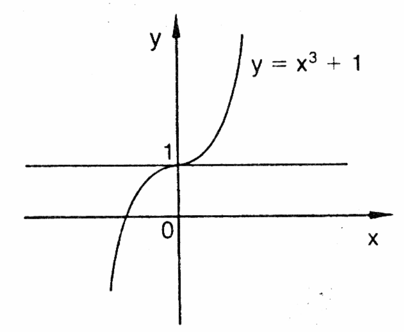
Consideremos también la función $f: x \rightarrow (x - 3)^{2/3} + 1$.



es un mínimo local y en el punto [3; f(3)] el gráfico tiene tangente vertical (semi-
tangente).

Por lo tanto, en este caso, al igual que en el anterior, la función alcanza un extre-
mo local en un punto del dominio donde no tiene derivada finita.

También puede suceder que el gráfico tenga tangente horizontal en un punto del
mismo y que el valor correspondiente de la función no sea ni máximo ni mínimo local,
como sucede en la función $f: x \rightarrow x^3 + 1$.



$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$.

En el punto (0;1) el gráfico tiene tangente horizontal y no hay extremo.

Por lo tanto, la condición de tener derivada nula en un punto no asegura la exis-
tencia de extremo para una función. Pero si una función derivable tiene un extremo
en un punto interior a su dominio, entonces dicha derivada es nula.

Es decir, la anulación de la derivada primera es condición necesaria para la exis-
tencia de máximo o mínimo local si la función es derivable y el punto correspondiente
es interior al dominio de la misma.

Probaremos esta condición en el siguiente teorema.

Teorema

Si f tiene derivada finita en el punto c y alcanza un máximo o mínimo local en el
punto c, interior al dominio de f, entonces $f'(c) = 0$.

O sea, c interior $D_f \wedge \exists f'(c) \wedge f(c)$ máximo local $\Rightarrow f'(c) = 0$.

Demostración

Como por hipótesis existe el número real f'(c), caben tres posibilidades:

$$f'(c) > 0 \veebar f'(c) < 0 \veebar f'(c) = 0.$$

1) Si $f'(c) > 0$, por el teorema 1 (pág. 240) existe un semientorno a derecha de c donde $\forall x$: $f(x) > f(c)$. Esto implica que f(c) no es máximo local. Absurdo.

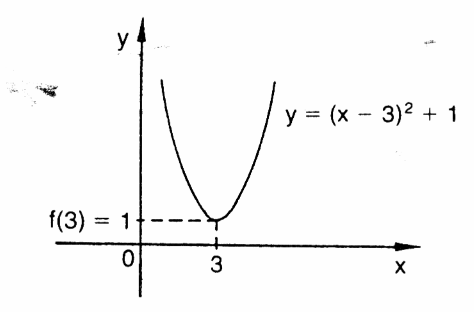
2) Si $f'(c) < 0$, por el teorema 2 (pág. 241) existe un semientorno a izquierda de c donde $\forall x$: $f(x) > f(c)$. Esto implica que f(c) no es máximo local. Absurdo.

Luego, $f'(c) = 0$.

Ejemplo

Sea $f: x \to (x - 3)^2 + 1$.

La curva correspondiente es una parábola con la concavidad dirigida hacia arriba y cuyo vértice es el punto (3; 1).



$f(3) = 1$ es un mínimo local de la función.

De acuerdo con el teorema, como f es derivable, f'(3) debe ser nula.

En efecto, $\forall x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 2(x-3)$ y $f'(3) = 0$.

En este ejemplo, f(3) es también el mínimo absoluto de f.

Como se había visto en el último ejemplo anterior (pág. 243), el recíproco del teorema no es válido, pues la existencia de tangente horizontal no implica la existencia de un extremo.

Por lo tanto, como el problema de localizar extremos es de singular importancia, deben buscarse criterios que permitan asegurar la existencia de los mismos.

Estos criterios, aplicados a funciones derivables en puntos interiores a su dominio, completan la información dada por la condición necesaria demostrada.

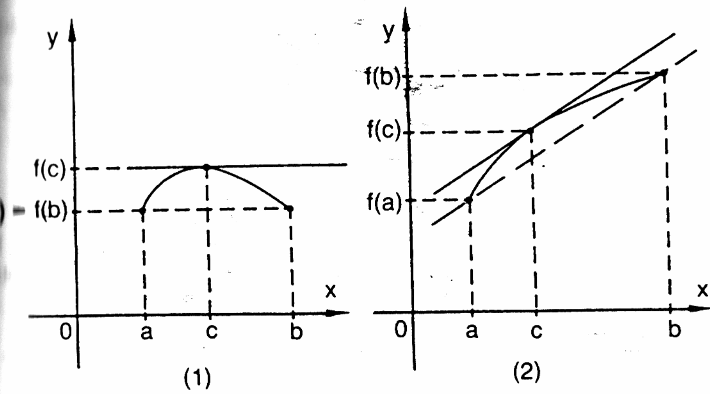
También tiene importancia ubicar los extremos locales cuando éstos aparecen en puntos donde la función no es derivable.

Finalmente, debe dedicarse especial atención a aquellos valores que son máximos o mínimos absolutos pero no son simultáneamente máximos o mínimos locales.

En este capítulo estableceremos varias condiciones que aseguran la existencia de extremos locales. Para poder demostrarlas, probaremos previamente algunas propiedades de las funciones derivables.

Propiedades de funciones derivables

Al dibujar la curva correspondiente a una función derivable en un intervalo cerrado, se verifica esta propiedad geométrica: si se traza la recta que pasa por los extremos de la curva, es posible hallar un punto interior al intervalo donde la tangente al gráfico es paralela a dicha recta.



La figura (1) corresponde al caso particular en que la función alcanza valores iguales en los extremos del intervalo. La figura (2) corresponde al caso general.

La propiedad ilustrada en la primera figura se demuestra en el teorema de Rolle. La propiedad general se prueba mediante el teorema del valor medio.

En ambos teoremas exigiremos que la función sea derivable en el intervalo abierto y continua en los extremos, es decir, no es necesario exigir que la función tenga derivada finita (lateral) en los extremos del intervalo. Por razones de simplicidad puede utilizarse una hipótesis más fuerte que la anterior, exigiendo que la función sea derivable en el intervalo cerrado.

Teorema de Rolle*

Si f es una función continua en el intervalo [a; b], tiene derivada finita en (a; b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe un punto c en el intervalo abierto (a; b) donde $f'(c) = 0$.

Demostración

Al ser f continua en el intervalo cerrado [a; b], por el segundo teorema de Weierstrass (pág. 182), alcanza en dicho intervalo un máximo y un mínimo absolutos.

Sea m el mínimo absoluto y M el máximo absoluto de f en [a; b].

Si $m = M$, entonces f es constante en [a; b]. Por un teorema anterior (pág. 199), la derivada de una constante es cero.

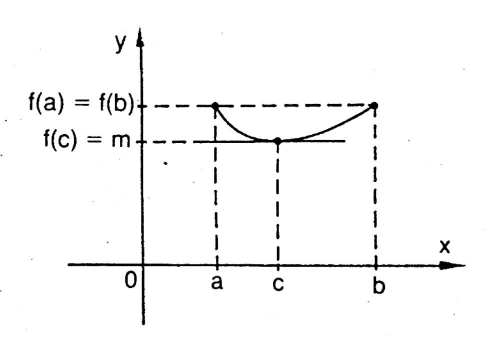
Luego, $\forall x \in [a; b]$: $f'(x) = 0$, y la tesis se verifica para cualquier punto c interior al intervalo.

Si $m \neq M$, entonces uno de los dos valores es distinto de f(a).

* Miguel Rolle (1652-1719), matemático francés a quien la teoría de ecuaciones debe importantes contribuciones.

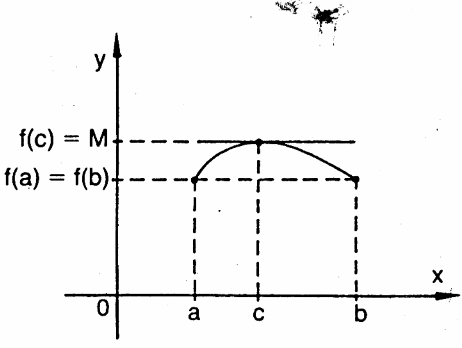
Se presentan los tres casos siguientes.

1) Si es $m \neq f(a)$ y $M = f(a)$, como m es el mínimo absoluto de f en [a; b], es $m < f(a)$.

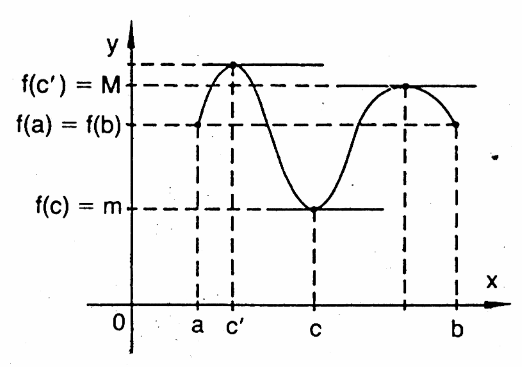


Por lo tanto, f alcanza el mínimo absoluto en un punto c, interior al intervalo. Luego, f(c) es mínimo absoluto y también es mínimo local. Por un teorema anterior (pág. 243), como f es derivable, es $f'(c) = 0$.

2) Si es $M \neq f(a)$ y $m = f(a)$, como M es el máximo absoluto, es $M > f(a)$. Por un razonamiento análogo al anterior, $f(c) = M$ es máximo absoluto y local y $f'(c) = 0$.



3) Si $m \neq f(a)$ y también $M \neq f(a)$, la función f alcanza el mínimo m en un punto c interior al intervalo y el máximo M en un punto c', también interior al intervalo [a; b].

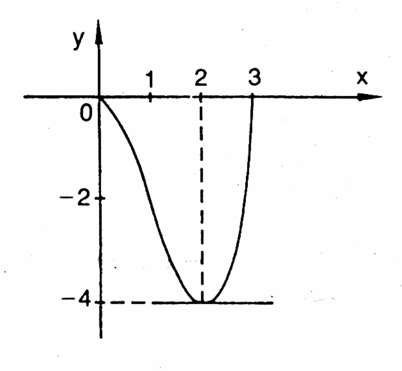


En esta situación ambos extremos absolutos son también locales. Luego, es $f'(c) = 0$ y $f'(c') = 0$.

Nota: Los casos 1, 2 y 3 pueden sintetizarse en uno solo de la siguiente manera: si $m \neq M$, entonces uno de ellos, por lo menos, es distinto de $f(a) = f(b)$. Por lo tanto, f alcanza dicho extremo absoluto en un punto c, interior al intervalo, y f(c) es, al mismo tiempo, extremo absoluto y local. Por un teorema anterior (pág. 243), $f'(c) = 0$.

Ejemplo

Hallar un punto c, correspondiente al teorema de Rolle, para $f: x \to x^3 - 3x^2$ en [0; 3].



$f(0) = 0$ y $f(3) = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$
$f'(x) = 3x(x - 2)$

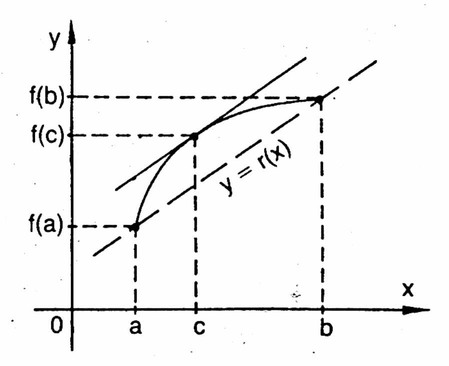
Resulta: $f'(2) = 0$. Luego, en $c = 2$ es $f'(c) = 0$ y además $c \in (0; 3)$.

La derivada también se anula en $c' = 0$, pero c' no es interior al intervalo considerado.

Teorema del valor medio del cálculo diferencial

Si f es una función continua en el intervalo [a: b] y tiene derivada finita en (a; b), entonces existe un punto $c \in (a; b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Demostración

Consideremos la recta r, determinada por los puntos [a; f(a)] y [b; f(b)]. Llamemos también r a la función representada por la recta r.

La ecuación de r es:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{r(x) - f(a)}{x - a}$$

O sea, $\forall x \in \mathbb{R}$: $r(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} a + f(a)$.

Si $k = -\frac{f(b) - f(a)}{b - a} a + f(a)$, entonces la función lineal correspondiente es:

$$r: x \rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x + k.$$

Luego, $\forall x$: $r'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Determinemos una función auxiliar $h = f - r$.

La función h es derivable en (a; b) por ser la resta de dos funciones derivables, y $h'(x) = f'(x) - r'(x)$.

Por razones análogas, h es continua en [a; b] y, además,

$$h(a) = f(a) - r(a) = 0 \quad y \quad h(b) = f(b) - r(b) = 0.$$

Por lo tanto, la función h cumple las condiciones exigidas por la hipótesis del teorema de Rolle, y entonces $\exists c \in (a; b) / h'(c) = 0$.

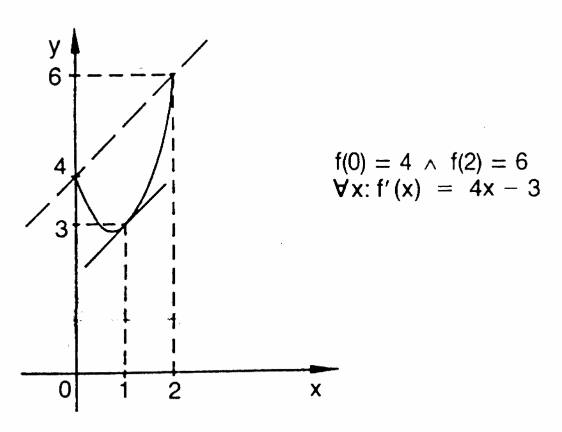
Pero $h'(c) = f'(c) - r'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$.

Luego, $\exists c \in (a; b) / f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Gráficamente puede observarse que la recta que une los puntos [a; f(a)] y [b; f(b)] es paralela a la recta tangente a la curva en [c; f(c)]. En efecto, según el teorema demostrado, ambas tienen igual pendiente.

Ejemplo

Hallar un punto c, correspondiente al teorema del valor medio, para $f: x \rightarrow 2x^2 - 3x + 4$ en el intervalo $[a; b] = [0; 2]$.



$f(0) = 4 \wedge f(2) = 6$

$\forall x$: $f'(x) = 4x - 3$

$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$; $f'(c) = 4c - 3$.

Luego, por el teorema indicado, $\exists c \in (0; 2) / \frac{f(2) - f(0)}{2} = 4c - 3$.

Si reemplazamos valores y efectuamos operaciones:

$$\frac{6 - 4}{2} = 4c - 3 \Rightarrow 4c - 3 = 1 \Rightarrow c = 1.$$

Por lo tanto, la tangente al gráfico en el punto (1; 3) es paralela a la recta que pasa por los puntos (0; 4) y (2; 6).

Consecuencias del teorema del valor medio

1. Si f es una función derivable en un intervalo I, y en todos los puntos del intervalo la derivada de f es nula, entonces f es constante en I.

Demostración

Consideremos un intervalo cualquiera $[x_1; x_2] \subseteq I$.

La función f satisface la hipótesis del teorema del valor medio en $[x_1; x_2]$.

Luego, $\exists c \in (x_1; x_2) / f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Como $f'(c) = 0$, resulta $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$.

Pero $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

Como x_1 y x_2 son dos puntos cualesquiera del intervalo I, $\forall x \in I$: $f(x) = f(x_1) = f(x_2) = k$.

Por lo tanto, se ha probado

$$\forall x \in I: (f'(x) = 0 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{R} / f(x) = k).$$

2. Si dos funciones tienen la misma derivada en cada punto de un intervalo I, entonces dichas funciones difieren en una constante.

Es decir, si f y g son derivables en un intervalo I, y $\forall x \in I$: $f'(x) = g'(x)$, entonces $\exists k \in \mathbb{R} / \forall x \in I$: $f(x) - g(x) = k$.

Demostración

$$\forall x \in I: f'(x) - g'(x) = (f - g)'(x) = 0.$$

Por la consecuencia anterior,

$$\exists k \in \mathbb{R} / \forall x \in I: (f - g)(x) = k.$$

O sea, $\forall x \in I$: $f(x) - g(x) = k$.

Estas dos propiedades, demostradas como aplicación del teorema del valor medio, son de importancia fundamental en el cálculo integral.

Teorema generalizado del valor medio (teorema de Cauchy)*

Si f y g son funciones continuas en el intervalo cerrado [a; b], tienen derivada finita en el intervalo abierto (a; b) y $\forall x \in (a; b): g'(x) \neq 0$, entonces $\exists c \in (a; b)$ /

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Obsérvese que en la hipótesis no es necesario exigir $g(b) - g(a) \neq 0$, aunque esta expresión aparece en la tesis como un denominador. Si fuera $g(b) = g(a)$, el teorema de Rolle indica que en algún punto interior al intervalo se anula la derivada y esto contradice una de las condiciones de la hipótesis.


Demostración

Consideremos la función auxiliar

$$p: x \rightarrow [f(b) - f(a)]\, g(x) - [g(b) - g(a)]\, f(x).$$

Esta función es derivable en (a; b), pues es la resta de dos funciones derivables multiplicadas cada una por una constante. También es continua en [a; b] por el mismo razonamiento.

Además, es p(a) = p(b), pues:

$p(a) = f(b)g(a) - f(a)g(a) - g(b)f(a) + g(a)f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$,

y $p(b) = f(b)g(b) - f(a)g(b) - g(b)f(b) + g(a)f(b) = g(a)f(b) - f(a)g(b)$.

Luego, la función p satisface las condiciones exigidas por el teorema de Rolle. Por lo tanto, $\exists c \in (a; b) / p'(c) = 0$.

Derivando la función p, en el punto c resulta:

$$p'(c) = [f(b) - f(a)]\, g'(c) - [g(b) - g(a)]\, f'(c) = 0.$$

Como $g'(c) \neq 0$ y $g(b) - g(a) \neq 0$, de la expresión anterior se deduce la tesis efectuando pasaje de términos:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

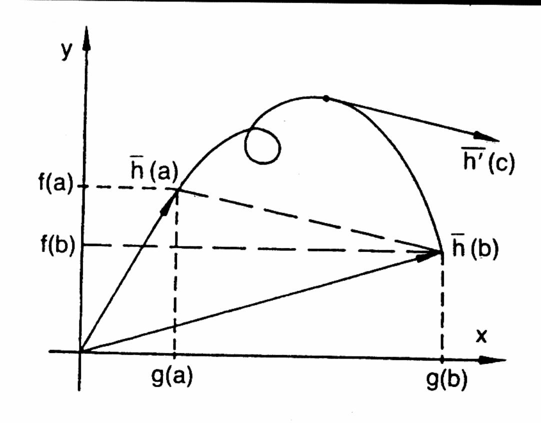
Este teorema incluye el teorema del valor medio como caso particular si g es la función idéntica, es decir, si $\forall x \in [a; b]$ es $g(x) = x$.

◆ El teorema de Cauchy admite una interpretación geométrica similar a la del teorema del valor medio para curvas planas más generales definidas en forma paramétrica por dos ecuaciones $x = g(t)$, $y = f(t)$, donde es $a \leq t \leq b$.

En el gráfico resulta el vector $\overline{h}'(c)$ paralelo al vector $(\overline{h(b)} - \overline{h(a)})$, y c es un punto interior al intervalo paramétrico [a; b].

Para justificar la proposición anterior conviene recurrir a una función vectorial $\overline{h} = (g; f)$ y al vector tangente $\overline{h}'(c)$, pero en este texto no estudiaremos funciones vectoriales (Cálculo 2, pág. 137).

* Agustín Cauchy (1789-1857), matemático francés. Dedicó especial atención a los fundamentos lógicos del análisis matemático.



EJERCICIOS

1) Hallar c, correspondiente al teorema de Rolle, para:

$f: x \rightarrow 3 + 2x - x^2$ en [−2; 4] $\quad g: x \rightarrow -\sqrt[3]{x}\,(x - 7)^2$ en [0; 7]

$h: x \rightarrow x^4 - 4x^3 + 10$ en [0; 4] $\quad t: x \rightarrow x^3 - 3x^2 + 1$ en [−1; 2]

2) Hallar c, correspondiente al teorema del valor medio, para:

$f: x \rightarrow \dfrac{2x}{x^2 + 1}$ en [−1; 3] $\quad g: x \rightarrow 8x^3 - 6x^2 + 9x$ en [1; 4]

$h: x \rightarrow \sqrt{x - 1}$ en [1; 3] $\quad t: x \rightarrow \sqrt[3]{x^2}$ en [0; 1]

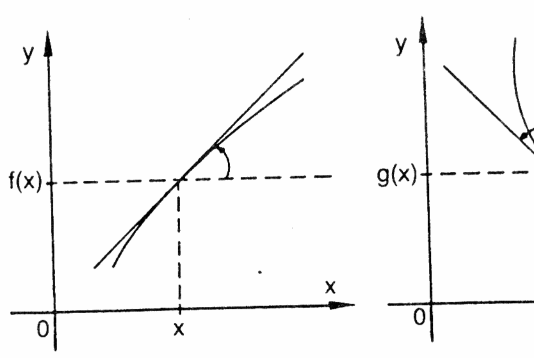
IV. Funciones monótonas

En el capítulo 5 (pág. 184) se han dado las definiciones de funciones monótonas en un conjunto. Veremos ahora cómo se pueden vincular esas definiciones con el signo de la derivada, cuando las funciones que se consideran son funciones derivables.

Si una función derivable es creciente en un intervalo I, la derivada en cualquier punto del mismo es positiva o nula.

En efecto, en cualquier punto del gráfico la recta tangente al mismo forma, con el eje positivo de abscisas, un ángulo agudo o nulo. Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente, o tangente trigonométrica del ángulo mencionado, es un número no negativo.

De la misma forma, si la función es decreciente, la recta tangente en cada punto del gráfico forma con el eje positivo de abscisas un ángulo obtuso o llano. Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente corresponde a la tangente trigonométrica de un ángulo $\beta / \frac{\pi}{2} < \beta \leq \pi$, que es un número no positivo.



f creciente: $f'(x) = \text{tg}\,\alpha \geq 0$ g decreciente: $g'(x) = \text{tg}\,\beta \leq 0$

Formalizaremos las consideraciones geométricas anteriores, demostrando los teoremas correspondientes.

Teorema 1

Si una función es estrictamente creciente (o creciente) en un intervalo I, entonces en cada punto de dicho intervalo, donde f es derivable, la derivada es no negativa.
O sea, f derivable y estrictamente creciente en $I \Rightarrow \forall a \in I: f'(a) \geq 0$.

Demostración

Como f es estrictamente creciente en I:

$$x < a \Rightarrow f(x) < f(a) \quad \text{y} \quad x > a \Rightarrow f(x) > f(a).$$

Luego, en ambas situaciones: $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$

Por una propiedad de límites finitos (pág. 134):

$$\text{lím}_a \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0.$$

Luego, $\forall a: f'(a) \geq 0$.

Teorema 2

Si f es una función estrictamente decreciente (o decreciente) en un intervalo, entonces en cada punto de dicho intervalo, donde f tiene derivada finita, la derivada es no positiva.
La demostración es análoga a la anterior.

En realidad, interesan fundamentalmente los teoremas recíprocos de los anteriores, que permiten, de acuerdo con el signo de la derivada primera en un intervalo, indicar si una función es creciente o decreciente en dicho intervalo.
Así, si la derivada primera es positiva en un intervalo, se prueba que la función es estrictamente creciente en el mismo, y si es no negativa, que la función es creciente.

Teorema

Si f es derivable en el intervalo I, y $\forall x \in I: f'(x) \geq 0$, entonces f es creciente en I. Si $f'(x) > 0$, entonces f es estrictamente creciente en I.

Demostración

Para probar que f es creciente en I debe probarse, para cualquier par de puntos x_1 y x_2 del intervalo:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Sea $x_1 < x_2$. Por el teorema del valor medio (pág. 247), aplicado en el intervalo $[x_1; x_2] \subseteq I$:

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(x_0) \quad (x_1 < x_0 < x_2).$$

Por lo tanto, $f(x_1) - f(x_2) = f'(x_0)(x_1 - x_2)$ (1).
Como habíamos elegido $x_1 < x_2$, es $x_1 - x_2 < 0$. Luego, por la regla de los signos, en el producto que aparece en el segundo miembro de la expresión (1),

si $f'(x_0) \geq 0$, entonces $f(x_1) - f(x_2) \leq 0$.

O sea, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ y f es creciente en I.

Si $f'(x_0) > 0$, entonces $f(x_1) - f(x_2) < 0$.

O sea, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ y f es estrictamente creciente en I.

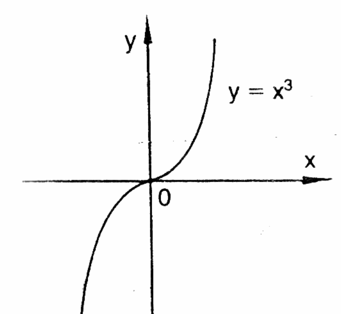
Análogamente se prueba el siguiente teorema.

Teorema

Si f es derivable en el intervalo I, y $\forall x \in I$ es $f'(x) \leq 0$, entonces f es decreciente en I. Si $f'(x) < 0$, entonces f es estrictamente decreciente en I.

Ejemplo 1

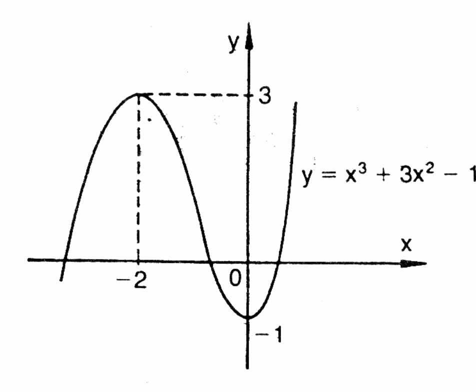
Indicar en qué partes del dominio la función $f: x \rightarrow x^3$ es creciente.



$f'(x) = 3x^2$
Por lo tanto, $\forall x: f'(x) \geq 0$.
Luego, f es creciente en todo su dominio.
Además, en este caso, f es estrictamente creciente en todo su dominio.

Ejemplo 2

Indicar en qué partes del dominio la función f: $x \to x^3 + 3x^2 - 1$ es estrictamente decreciente.



$\forall x$: $f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$. Luego, $f'(-2) = 0$ y $f'(0) = 0$.

Resulta: $f'(x) < 0$ si $-2 < x < 0$.

Por lo tanto, f es estrictamente decreciente en el intervalo $(-2; 0)$.

EJERCICIOS

1) Indicar en qué subconjuntos del dominio las siguientes funciones son crecientes o decrecientes, de acuerdo con el signo de su primera derivada:

f: $x \to 3x^2 - 2x + 5$ h: $x \to 2x^3 + 9x^2 - 24x$

g: $x \to 4x - x^3$ r: $x \to 4x^3(x - 1)^2$

m: $x \to \dfrac{3x - 2}{1 - x}$ s: $x \to 300 - \dfrac{1000}{x + 3}$

2) Idem para f: $x \to \sqrt[3]{(4 - x)^2 (2x - 4)}$

g: $x \to \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

h: $x \to x\sqrt{5x - x^2}$

3) Indicar en qué subconjuntos del dominio las siguientes funciones son estrictamente crecientes:

f: $x \to x^3 + 3x + 5$ g: $x \to x^{1/3}(x - 3)^2$ h: $x \to \sqrt[3]{x^3 - 12x}$

m: $x \to \dfrac{2x - 3}{x - 1}$ s: $x \to \dfrac{1}{(x - 3)^2}$

4) Indicar en qué subconjuntos del dominio las siguientes funciones son estrictamente decrecientes:

f: $x \to 5 - (x - 3)^2$ g: $x \to x^4 - 2x^2$ h: $x \to (x + 1)^2 (x - 2)^3$

r: $x \to x^{2/5} + 2$ m: $x \to \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 6x + \dfrac{31}{6}$ s: $x \to \dfrac{1}{x + 2}$

5) Verificar que las siguientes funciones son estrictamente decrecientes en los intervalos indicados:

f: $x \to (x - 1)^{2/3} - \dfrac{1}{3}(x + 1)^{3/2}$ en $(-1; 1)$

g: $x \to \sqrt{1 - x^2}$ en $(0; 1)$

h: $x \to \dfrac{1}{x^2} - \sqrt{x}$ en $(0; 9)$

m: $x \to \dfrac{8}{x^2 + 6x + 8}$ en $(-3; -2)$

V. Criterios para determinar extremos locales

Se ha repetido varias veces que no basta la anulación de la derivada de una función en un punto interior a un conjunto para asegurar la existencia, en dicho punto, de un extremo local. Si se quieren hallar, entonces, los extremos locales de una función, debe completarse la información mediante otros datos.

Daremos a continuación varios criterios que permiten asegurar la existencia de un máximo o de un mínimo local.

Criterio 1: Estudio de los valores de la función

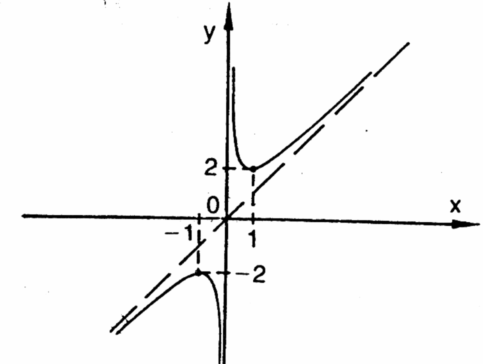
Si c es un punto interior al dominio de una función derivable f y $f'(c) = 0$, para saber si f(c) es un máximo local pueden considerarse los valores de f en un entorno de c y ver si satisfacen la definición.

Es decir, si es posible determinar un entorno de c tal que, para cualquier punto x del entorno, el valor f(x) correspondiente es menor o igual que f(c), entonces f(c) es máximo local.

La misma idea puede utilizarse para verificar la existencia de mínimo local.

Ejemplo

Sea f: $x \to \dfrac{x^2 + 1}{x}$. Utilizando el criterio anterior ubicar, si existen, máximos y mínimos locales.



$f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$ $f'(1) = 0 \wedge f'(-1) = 0.$

Deseamos ver, ahora, si $f(1) = 2$ y $f(-1) = -2$ son extremos locales de f.
Observamos que, para cualquier x positivo y distinto de 1, es

$$f(x) > 2, \text{ pues } \frac{x^2+1}{x} > 2 \quad \text{si } x > 0 \wedge x \neq 1.$$

En efecto, si x es positivo, es:

$\frac{x^2+1}{x} > 2 \iff x^2+1 > 2x \iff x^2+1-2x > 0 \iff (x-1)^2 > 0$, expresión que se verifica si $x \neq 1$.

Por lo tanto, $f(1) = 2$ es un mínimo local de f.
De manera análoga, puede probarse, para cualquier x negativo y distinto de 1,

$$f(x) < -2, \text{pues } \frac{x^2+1}{x} < -2 \text{ si } x < 0 \wedge x \neq 1.$$

Por lo tanto, $f(-1) = -2$ es un máximo local de f.
En general, este criterio presenta dificultades de cálculo, pues exige considerar los valores de una función en los infinitos puntos de un entorno y puede llevar a conclusiones falsas si se consideran solamente algunos valores de la función en puntos aislados del entorno.

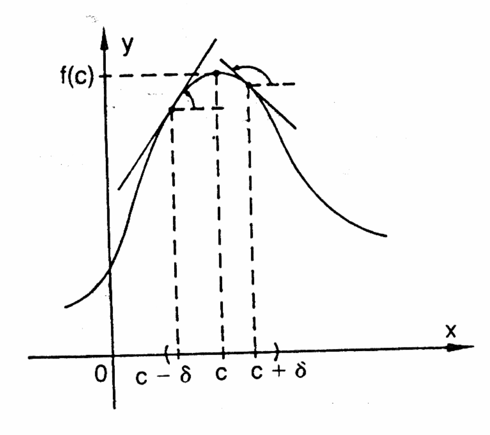
Criterio 2: Variación del signo de la derivada primera

Si f es una función derivable, c es un punto interior a su dominio donde se anula f' y existe un entorno de c tal que para todo x en el semientorno a izquierda de c es f'(x) positiva, y para todo x a derecha de c es f'(x) negativa, entonces f(c) es un máximo local de f.

O sea,

$$\exists E(c, \delta) / \forall x: \left[(x \in (c-\delta; c) \Rightarrow f'(x) > 0) \wedge (x \in (c; c+\delta) \Rightarrow f'(x) < 0) \right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(c) \text{ máximo local.}$$

Se suele abreviar este criterio diciendo que si la derivada primera pasa de positiva a negativa cuando x pasa de izquierda a derecha del punto c, entonces f(c) es máximo local.



Demostración

Por teoremas anteriores (pág. 253):
$f'(x) \geq 0$ en $(c-\delta; c] \Rightarrow$ f creciente en $(c-\delta; c]$ (1) y
$f'(x) \leq 0$ en $[c; c+\delta) \Rightarrow$ f decreciente en $[c; c+\delta)$ (2).
Luego, por (1), $\forall x \in (c-\delta; c]$ es $f(x) \leq f(c)$,
y por (2), $\forall x \in [c; c+\delta)$ es $f(c) \geq f(x)$.
Por lo tanto,

$$\forall x: (x \in E(c, \delta) \Rightarrow f(x) \leq f(c))$$

y, de acuerdo con la definición, f(c) es máximo local.

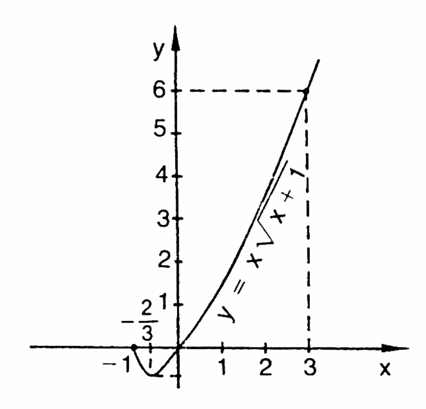
En forma análoga se demuestra el criterio para determinar un mínimo local, que dice:

Si f es una función derivable, c es un punto interior a su dominio donde se anula f' y existe un entorno de c tal que para todo x en el semientorno a izquierda de c es f'(x) negativa, y para todo x a derecha de c es f'(x) positiva, entonces f(c) es un mínimo local de f.

Es decir, f(c) es un mínimo local si la derivada primera pasa de negativa a positiva cuando x pasa de izquierda a derecha del punto c.

Ejemplo

Hallar los extremos locales de $f: x \to x\sqrt{x+1}$, utilizando el criterio de la derivada primera.



El dominio de f es $D_f = \{x / x \geq -1\}$.
Calcularemos la derivada de f:

$$\forall x: \left(x > -1 \Rightarrow f'(x) = \sqrt{x+1} + \frac{x}{2\sqrt{x+1}} \right)$$

O sea, $f'(x) = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$ si $x > -1$. Es $f'(x) = 0$ si $x = -\frac{2}{3}$.

Luego, $f\left(-\frac{2}{3}\right) = -2\frac{\sqrt{3}}{9}$ puede ser un extremo local.

Estudiaremos el signo de los valores de la función derivada f′ en un entorno de $x = -\frac{2}{3}$.

Como para todo $x > -1$ es $f'(x) = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$, el signo de $f'(x)$ depende del signo del numerador, ya que el denominador siempre es positivo.

Luego, a izquierda, $x < -\frac{2}{3} \Rightarrow 3x + 2 < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$,

y a derecha, $x > -\frac{2}{3} \Rightarrow 3x + 2 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$.

De acuerdo con el criterio indicado, $f\left(-\frac{2}{3}\right)$ es un mínimo local de f.

Criterio 3: Signo de la derivada segunda

Si f es una función derivable, c es un punto interior a su dominio donde se anula f′ y existe $f''(c) < 0$, entonces f(c) es un máximo local de f.

Obsérvese que este criterio difiere fundamentalmente de los anteriores, pues solamente debe investigarse el signo de la derivada segunda en un punto y no exige su consideración en un entorno.

Demostración

Sea $f''(c) = \lim_c \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0$.

Por una propiedad del límite finito (pág. 134),

$$\exists E'(c) / \forall x: \left(x \in E'(c) \Rightarrow \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0\right).$$

Como $f'(c) = 0$, es $\frac{f'(x)}{x - c} < 0$.

Para que este cociente sea negativo, numerador y denominador deben tener signos opuestos, o sea,

a izquierda de c: $x - c < 0 \Rightarrow f'(x) > 0$, y

a derecha de c: $x - c > 0 \Rightarrow f'(x) < 0$.

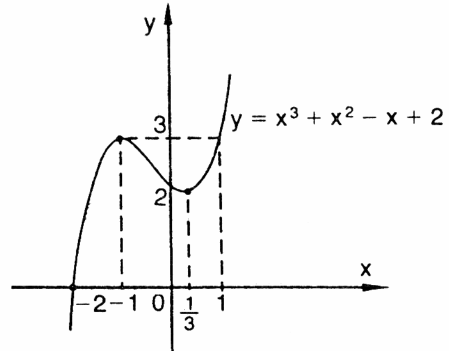
Por el criterio de la derivada primera, f(c) es máximo local.

En las mismas condiciones, si $f''(c) > 0$, puede probarse que f(c) es mínimo local.

Este criterio es cómodo si la derivada segunda es fácil de calcular, pues, como se ha dicho, sólo exige conocer su signo en un punto. No puede utilizarse si la función elegida no tiene derivada segunda en el punto, y presenta inconvenientes si la segunda derivada es difícil de hallar. Además, no proporciona ninguna información si la derivada segunda existe pero es nula en el punto considerado.

Ejemplo

Hallar extremos locales de $f: x \to x^3 + x^2 - x + 2$, utilizando el criterio de la derivada segunda.



Calcularemos la derivada de f.

Resulta: $\forall x: f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$.

La derivada se anula para $x_1 = -1$ y para $x_2 = \frac{1}{3}$.

Buscaremos ahora la derivada segunda de f:

$$\forall x: f''(x) = 6x + 2.$$

De acuerdo con el criterio de la derivada segunda, hay que determinar su signo en los puntos donde se anula f′.

Resulta $f''(-1) = -4 < 0$, y, por lo tanto, $f(-1) = 3$ es un máximo local de f.

$f''\left(\frac{1}{3}\right) = 4 > 0$ y $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{49}{27}$ es un mínimo local.

EJERCICIOS

1) Hallar, si existen, extremos locales de las siguientes funciones utilizando el criterio 1, que estudia los valores de la función:

$f: x \to \frac{5}{1 + x^4}$ $\quad g: x \to x^2 - 3x - 10$ $\quad h: x \to 5x - 4$

2) Hallar extremos locales, si existen, aplicando el criterio 2, que estudia el signo de la derivada primera en un entorno:

$f: x \to x^4 - 4x^3 + 4x^2$ $\quad h: x \to x^3 - 3x^2 + 6$ $\quad s: x \to \frac{3}{x^2 + 1}$

3) Hallar extremos locales aplicando el criterio de la derivada segunda:

$f: x \to x^{\frac{1}{3}}(x - 1)$ $\quad h: x \to (x - 1)^3 (x - 3)$ $\quad r: x \to \frac{3}{1 + \sqrt{x}}$

s: $x \to (x-2)^4(x+1)^2$ p: $x \to 5x^3 - \frac{1}{x^2}$ n: $x \to x^4 - 4x^3 + 10$

t: $x \to 10x^3(x-1)^2$ ℓ: $x \to x^2 - \frac{2}{x}$ m: $x \to \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + \frac{31}{6}$

g: $x \to 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$ u: $x \to x^4 - 4x^3 + 5$ v: $x \to 3x^4 - 24x^2 + 4$

VI. Extremos absolutos

En la mayoría de los problemas de matemática aplicada no interesa hallar los extremos locales sino los extremos absolutos que alcanza una función en su dominio o en algún intervalo, determinado, generalmente, por las condiciones del problema.

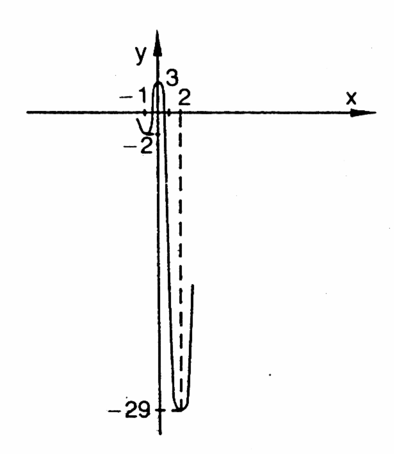
Ahora bien, si el máximo o el mínimo absolutos corresponden a una función derivable y la función alcanza dichos valores en puntos interiores al conjunto considerado, entonces los extremos absolutos serán, al mismo tiempo, extremos locales.

En ese caso bastará ubicar los extremos locales mediante el criterio más conveniente y luego determinar cuáles de ellos son, a la vez, extremos absolutos.

Ejemplo

Hallar, si existen, máximo y mínimo absolutos para:

$$f: x \to 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 3.$$



$$\forall x: f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2).$$

Buscaremos ahora los puntos donde se anula la derivada anterior.

Resulta $f'(x) = 0$ si $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$.

Para determinar si en algunos de los puntos anteriores la función f alcanza un extremo local, utilizaremos el criterio de la derivada segunda:

$$\forall x: f''(x) = 36x^2 - 24x - 24.$$

Hallaremos el signo de f'' en cada uno de los tres puntos seleccionados:

1) en $x_1 = 0$: $f''(0) = -24 < 0 \Rightarrow f(0) = 3$ es máximo local;
2) en $x_2 = -1$: $f''(-1) = 36 > 0 \Rightarrow f(-1) = -2$ es mínimo local;
3) en $x_3 = 2$: $f''(2) = 72 > 0 \Rightarrow f(2) = -29$ es mínimo local.

Ahora bien, la función f alcanza mínimo absoluto en el punto 2, y $f(2) = -29$ es el mínimo absoluto de f. En cambio, f no tiene máximo absoluto, pues $\lim_x f(x) = +\infty$ y los valores de f superan a cualquier número real.

Si se quieren hallar los extremos absolutos de f en un conjunto acotado, deben investigarse especialmente los valores que alcanza la función en los extremos de ese conjunto, pertenezcan o no al mismo.

Por ejemplo, si se considera la función f sobre el intervalo $[0; 2]$, $f(0)=3$ es el máximo absoluto y $f(2)=-29$ es el mínimo absoluto.

En el intervalo $(0; 2)$, en cambio, la función no tiene ni máximo ni mínimo absolutos.

Puntos críticos

Como se ha indicado en el ejemplo anterior, al buscar los extremos absolutos de una función definida sobre un conjunto acotado, deben considerarse especialmente los valores que alcanza la función en los extremos del mismo.

Además, si la función que se investiga no es derivable en algún punto, hay que tener en cuenta el valor de la función en dicho punto. La función f: $x \to |x|$, por ejemplo, no es derivable en el origen y alcanza mínimo local y absoluto en dicho punto.

Por ello, al buscar los extremos absolutos de una función es importante considerar especialmente los puntos de los distintos tipos mencionados, que son puntos claves en la investigación que se efectúa. Los llamaremos *puntos críticos de la función*, y daremos la siguiente definición.

Definición

Si f es una función continua, definida sobre un intervalo (abierto o cerrado), el punto c es un *punto crítico* de f en dicho intervalo si se cumple una de las siguientes condiciones:

1) c es interior al intervalo y f' existe y es nula en c;
2) c es interior al intervalo y f no es derivable en c (no hay derivada finita);
3) c es uno de los extremos del intervalo.

Como ya se ha dicho, el problema de encontrar los extremos absolutos de una función continua en un intervalo, se simplifica si se buscan primero los puntos críticos de la función en dicho intervalo.

Ejemplo 1

Encontrar, si existen, los extremos absolutos de f: $x \to \sqrt[3]{4x}\,(x-1)^2$ en el intervalo cerrado $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$.

Para encontrar los puntos críticos de f en $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$ calcularemos primero f':

$s: x \to (x - 2)^4 (x + 1)^2 \quad p: x \to 5x^3 - \frac{1}{x^2} \quad n: x \to x^4 - 4x^3 + 10$

$t: x \to 10x^3(x - 1)^2 \quad \ell: x \to x^2 - \frac{2}{x} \quad m: x \to \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + \frac{31}{6}$

$g: x \to 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5 \quad u: x \to x^4 - 4x^3 + 5 \quad v: x \to 3x^4 - 24x^2 + 4$

VI. Extremos absolutos

En la mayoría de los problemas de matemática aplicada no interesa hallar los extremos locales sino los extremos absolutos que alcanza una función en su dominio o en algún intervalo, determinado, generalmente, por las condiciones del problema.

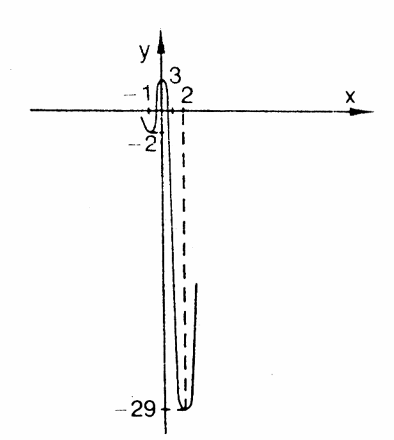
Ahora bien, si el máximo o el mínimo absolutos corresponden a una función derivable y la función alcanza dichos valores en puntos interiores al conjunto considerado, entonces los extremos absolutos serán, al mismo tiempo, extremos locales.

En ese caso bastará ubicar los extremos locales mediante el criterio más conveniente y luego determinar cuáles de ellos son, a la vez, extremos absolutos.

Ejemplo

Hallar, si existen, máximo y mínimo absolutos para:

$$f: x \to 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 3.$$



$$\forall x: f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2).$$

Buscaremos ahora los puntos donde se anula la derivada anterior.

Resulta $f'(x) = 0$ si $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$.

Para determinar si en algunos de los puntos anteriores la función f alcanza un extremo local, utilizaremos el criterio de la derivada segunda:

$$\forall x: f''(x) = 36x^2 - 24x - 24.$$

Hallaremos el signo de f'' en cada uno de los tres puntos seleccionados:

1) en $x_1 = 0$: $f''(0) = -24 < 0 \Rightarrow f(0) = 3$ es máximo local;
2) en $x_2 = -1$: $f''(-1) = 36 > 0 \Rightarrow f(-1) = -2$ es mínimo local;
3) en $x_3 = 2$: $f''(2) = 72 > 0 \Rightarrow f(2) = -29$ es mínimo local.

Ahora bien, la función f alcanza mínimo absoluto en el punto 2, y $f(2) = -29$ es el mínimo absoluto de f. En cambio, f no tiene máximo absoluto, pues $\lim_{x} f(x) = +\infty$ y los valores de f superan a cualquier número real.

Si se quieren hallar los extremos absolutos de f en un conjunto acotado, deben investigarse especialmente los valores que alcanza la función en los extremos de ese conjunto, pertenezcan o no al mismo.

Por ejemplo, si se considera la función f sobre el intervalo $[0; 2]$, $f(0) = 3$ es el máximo absoluto y $f(2) = -29$ es el mínimo absoluto.

En el intervalo $(0; 2)$, en cambio, la función no tiene ni máximo ni mínimo absolutos.

Puntos críticos

Como se ha indicado en el ejemplo anterior, al buscar los extremos absolutos de una función definida sobre un conjunto acotado, deben considerarse especialmente los valores que alcanza la función en los extremos del mismo.

Además, si la función que se investiga no es derivable en algún punto, hay que tener en cuenta el valor de la función en dicho punto. La función $f: x \to |x|$, por ejemplo, no es derivable en el origen y alcanza mínimo local y absoluto en dicho punto.

Por ello, al buscar los extremos absolutos de una función es importante considerar especialmente los puntos de los distintos tipos mencionados, que son puntos claves en la investigación que se efectúa. Los llamaremos *puntos críticos de la función*, y daremos la siguiente definición.

Definición

Si f es una función continua, definida sobre un intervalo (abierto o cerrado), el punto c es un *punto crítico* de f en dicho intervalo si se cumple una de las siguientes condiciones:

1) c es interior al intervalo y f' existe y es nula en c;
2) c es interior al intervalo y f no es derivable en c (no hay derivada finita);
3) c es uno de los extremos del intervalo.

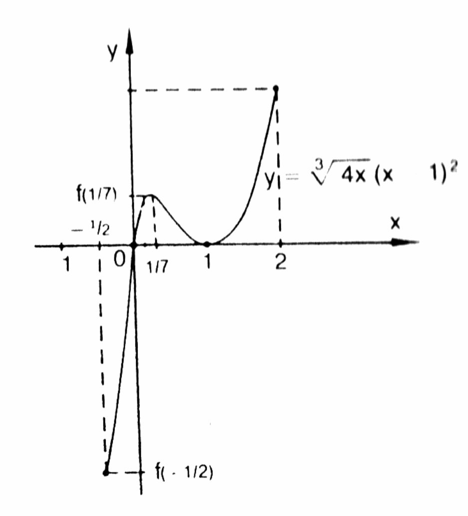
Como ya se ha dicho, el problema de encontrar los extremos absolutos de una función continua en un intervalo, se simplifica si se buscan primero los puntos críticos de la función en dicho intervalo.

Ejemplo 1

Encontrar, si existen, los extremos absolutos de $f: x \to \sqrt[3]{4x}(x - 1)^2$ en el intervalo cerrado $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$.

Para encontrar los puntos críticos de f en $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$ calcularemos primero f':

$$\forall x \neq 0: f'(x) = \frac{4(7x^2 - 8x + 1)}{3\sqrt{16x^2}}.$$



La derivada anterior no existe en el punto 0 y se anula en los puntos 1 y $\frac{1}{7}$.

Por lo tanto, los puntos críticos de f son:

tipo 1: $x_1 = 1$ y $x_2 = \frac{1}{7}$, donde se anula f';

tipo 2: $x_3 = 0$, donde no existe f' (hay derivada infinita);

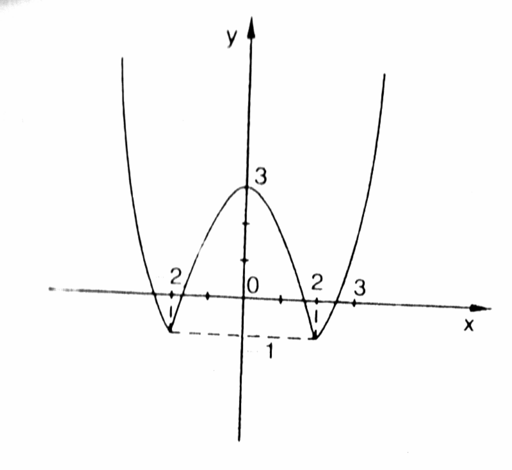
tipo 3: $a = -\frac{1}{2}$ y $b = 2$, que son los extremos del intervalo.

Puede probarse que $f\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{36}{49}\sqrt[3]{\frac{4}{7}}$ es un máximo local y **f(1) = 0 es** un mínimo local.

Además, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{4}\sqrt[3]{2}$ es el mínimo absoluto de f en el **intervalo** $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$. El valor f(2) = 2 es el máximo absoluto de f en $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$.

Ejemplo 2

Hallar extremos absolutos y locales de f, si existen:
a) en su dominio, b) en (0;2), c) en $[-3; 4]$, si $f: x \to |x^2 - 4| - 1$.



a) El dominio de f es **R** y los puntos críticos son:
tipo 1) 0, pues $f'(0) = 0$;
tipo 2) 2 y −2, pues en ellos f no es derivable;
tipo 3) como el dominio no está acotado, buscamos $\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{-\infty} f(x) = +\infty$
Este límite asegura que f no tiene máximo absoluto en **R**.
Observemos que

$$f: x \to \begin{cases} x^2 - 5 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 3 & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ x^2 - 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$(f'(x) < 0 \text{ si } x < -2) \wedge (f'(x) > 0 \text{ si } -2 < x < 0) \Rightarrow f(-2)$ mínimo local.
$(f'(x) < 0 \text{ si } 0 < x < 2) \wedge (f'(x) > 0 \text{ si } x > 2) \Rightarrow f(2)$ mínimo local.
$\wedge\ f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow f(0)$ máximo local.

Puede verificarse además que $f(-2) = f(2) = -1$ es mínimo absoluto.

b) En (0;2) f no tiene extremos absolutos ni locales.

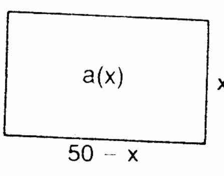
c) En $[-3; 4]$ $f(2) = f(-2) = -1$ mínimo local y absoluto, f(0) máximo local, y máximo absoluto.

Ejemplo 3

Averiguar cuál es el terreno rectangular de mayor área que se puede rodear con 100 metros de alambre.

La primera parte del problema consiste en expresar las condiciones anteriores en lenguaje matemático.

Llamemos x a un lado cualquiera del rectángulo. Si el perímetro es 100, el otro lado es 50 − x.



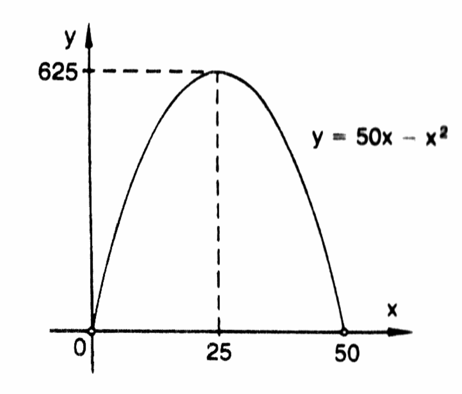
El área del rectángulo está dada por la expresión siguiente:

$$a(x) = x(50 - x).$$

Para hallar el número x, que da el área máxima de un rectángulo en las condiciones requeridas, debemos considerar la función escalar que a cada número x le asigna como imagen el área del rectángulo correspondiente.

Es decir, la función $a: x \to 50x - x^2$.

El dominio de la función a está condicionado por la índole del problema y debe ser $\forall x: 0 < x < 50$.



Calcularemos ahora la derivada de la función a:

$$\forall x: a'(x) = 50 - 2x.$$

Los puntos críticos de la función a son 0 y 50 como extremos del dominio establecido, y el punto 25 donde se anula la derivada a'.

Calculamos ahora la derivada segunda de la función a:

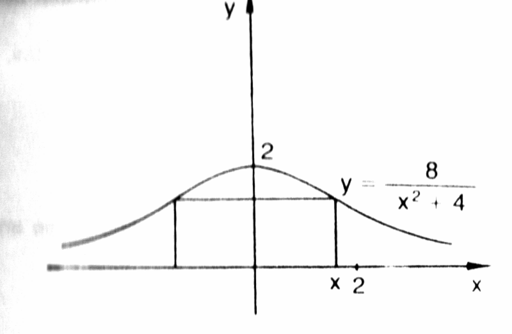
$$\forall x: a''(x) = -2.$$

Luego, a (25) = 625 es un máximo local. Se comprueba fácilmente que es también el máximo absoluto de a.

Si interpretamos el resultado anterior en el problema planteado, resulta que el rectángulo de mayor área y perímetro 100 es el cuadrado de lado 25.

Ejemplo 4

Hallar el rectángulo de mayor área con base en el eje de abscisas y vértices opuestos en puntos de la curva de ecuación $y = \dfrac{8}{x^2+4}$, de acuerdo con el siguiente dibujo:



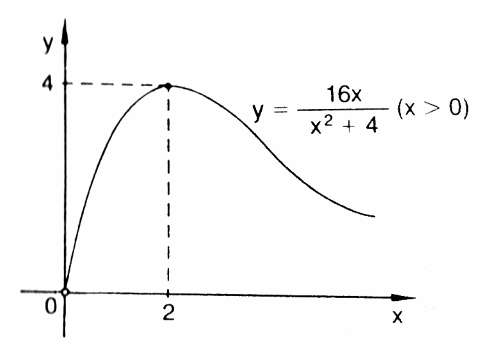
Si la base del rectángulo es 2x, su altura está dada por el valor de la ordenada correspondiente.

Es decir, base = 2x, altura $= \dfrac{8}{x^2+4}$.

El área del rectángulo pedido es $a(x) = 2x \cdot \dfrac{8}{x^2+4}$

La función escalar correspondiente es $a: x \to \dfrac{16x}{x^2+4}$

y su dominio, de acuerdo con la índole geométrica del problema, es el conjunto de los números reales positivos.



Si calculamos la derivada de la función a,

$$\forall x \text{ es } a'(x) = \frac{64 - 16x^2}{(x^2+4)^2}.$$

El punto $x_1 = 2$ es un punto crítico de la función, pues es interior al dominio determinado y además es $f'(2) = 0$.

Si calculamos la derivada segunda de la función a, resulta:

$$a''(x) = \frac{32x(x^2 - 12)}{(x^2+4)^3}.$$

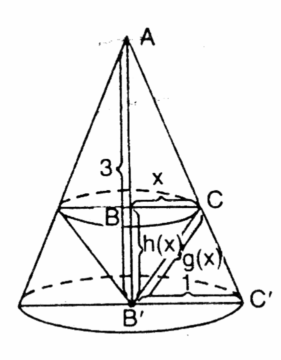
En el punto 2, es $a''(2) = -1 < 0$. Por lo tanto, a(2) es un máximo local de la función área

Puede comprobarse fácilmente que a(2) es también el máximo absoluto de la función a.

Luego, el rectángulo de mayor área, en las condiciones pedidas, que corresponde al valor x = 2, es el de base 4 y altura 1.

◆ *Ejemplo 5*

Hallar el cono de mayor superficie lateral que puede inscribirse en un cono de radio 1 y altura 3, de acuerdo con la figura siguiente:



Utilizando la fórmula que da la superficie lateral de un cono, el área correspondiente al cono inscripto es

$$a(x) = \pi x \cdot g(x),$$

donde la generatriz es

$$g(x) = \sqrt{x^2 + [h(x)]^2}.$$

Para calcular h(x) podemos comparar los triángulos semejantes

ABC y AB'C', donde $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AB'}{B'C'}$.

Reemplazando valores en la igualdad anterior, resulta:

$$\frac{3 - h(x)}{x} = \frac{3}{1} \Rightarrow 3 - h(x) = 3x \Rightarrow h(x) = 3(1 - x).$$

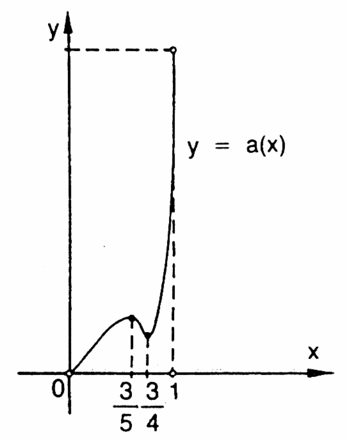
Por lo tanto, $g(x) = \sqrt{x^2 + 9(1 - x)^2} = \sqrt{10x^2 - 18x + 9}$.

Luego, $\forall x > 0$ es $a(x) = \pi x \cdot \sqrt{10x^2 - 18x + 9}$.

El área, entonces, depende exclusivamente de x, y utilizando la expresión anterior puede anotarse la función escalar correspondiente:

$$a: x \to \pi x \sqrt{10x^2 - 18x + 9}.$$

De acuerdo con los datos del problema y el significado geométrico asignado a la variable x, el dominio de la función área determinada es el intervalo abierto (0; 1).



Por lo tanto, los puntos 0 y 1 son puntos críticos de la función, ya que son los extremos del dominio determinado.

Para buscar los demás puntos críticos calculamos la derivada de la función a. Obtenemos:

$$a'(x) = \frac{\pi(20x^2 - 27x + 9)}{\sqrt{10x^2 - 18x + 9}}.$$

La derivada a' se anula en los puntos $x_1 = \frac{3}{4}$ y $x_2 = \frac{3}{5}$, ambos interiores al intervalo (0; 1).

Puede verificarse, mediante uno cualquiera de los criterios estudiados, que el valor a$\left(\frac{3}{4}\right)$ es un mínimo local y el valor a$\left(\frac{3}{5}\right)$ es un máximo local.

Sin embargo, como la función área considerada es continua en el intervalo abierto (0; 1), no alcanza necesariamente extremos absolutos en dicho conjunto.

En este caso no tiene ni máximo ni mínimo absolutos, pues ambos corresponden a los extremos del intervalo abierto.

El problema planteado, por lo tanto, no tiene solución.

Nótese que, al encarar un problema de este tipo, es necesario un análisis exhaustivo de las condiciones planteadas y de la función obtenida para resolverlo. Si se resuelve mecánicamente el problema considerando solamente los puntos del dominio donde se anula la derivada primera, pueden obtenerse conclusiones erróneas.

EJERCICIOS

1) Hallar los puntos críticos de cada una de las funciones siguientes y clasificarlos:

$f: x \to \lvert x + 4\rvert$	en $[-6; -1]$	$t: x \to 2\lvert x\rvert - x^2$ en $[-1; 1]$
$g: x \to x^3 + 2x$	en $[-3; 4]$	$s: x \to \lvert x - 1\rvert + \lvert x + 1\rvert$
$h: x \to 2x^3 - \frac{1}{x}$	en $[-4; 0]$	$m: x \to \sqrt[3]{x} - 3x + 5$
$n: x \to \lvert x^2 - 3\rvert + \lvert 2x - 8\rvert - 1$		$r: x \to 2 - \lvert x^2 + 2x - 15\rvert$

2) Hallar extremos absolutos, si existen, de las funciones consideradas en los ejercicios de la sección V (pág. 259).

3) Extremos absolutos, si existen, de

$f: x \to \dfrac{3}{1-x^2}$	en $(-1; 1)$	$g: x \to \dfrac{1+\lvert x\rvert}{1-\lvert x\rvert}$	en $(-1; 1)$
$r: x \to \dfrac{1}{x} - \sqrt{x}$	en $[1; 9]$	$h: x \to \dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$	en $[-1; 4]$
$p: x \to \dfrac{x^2-2x-3}{x^2-4}$	en $[-1; 1]$	$q: x \to x^3 - 2x + 1$	en $(0; 3]$
$v: x \to x^2 - \lvert x\rvert$	en $[-1; 2)$	$u: x \to x^3 - 3x^2 + 5$	en $\mathbb{R}$
$s: x \to \lvert x-3\rvert$	en $(0; 4)$	$m: x \to x^4 - 4x^3 + 10$	en $[-1; 4)$
$t: x \to x^3 - 2x^2$	en $[-1; 3)$	$n: x \to \sqrt{25 - x^2}$	en $[-1; 5)$
$\ell: x \to x^3 - 6x^2 + 12x$	en $(-1; 3]$	$w: x \to x^3 + 3x^2 + 3x + 3$	en $[-2; 0)$

4) Area máxima de un triángulo isósceles de perímetro 12.

5) ¿Cuál es el cilindro recto de mayor volumen que puede inscribirse en un cono recto de radio 6 y altura 24?

6) Dividir el número 100 en dos partes cuya suma de cubos sea mínima.

7) Rectángulo de menor perímetro y área 100.

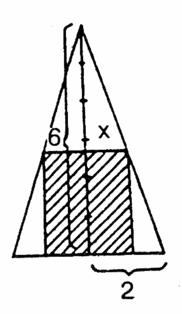
8) ¿Cuál es el triángulo isósceles de mayor área que puede inscribirse en un círculo de radio unidad?

9) ¿Cuál es el cilindro de volumen 1 y superficie total mínima?

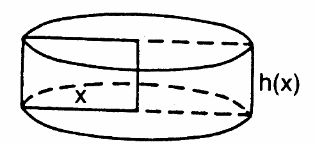
10) En un triángulo isósceles de base 6 y altura 10 se inscribe otro triángulo isósceles de modo que las bases de ambos triángulos son paralelas y el vértice del segundo está en el punto medio de la base del primero. Se busca el de área máxima.

11) Se quiere alambrar con 200 m de alambre un campo rectangular adyacente a un muro. Hallar el de mayor área.

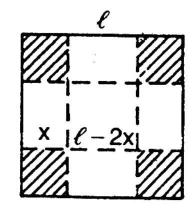
12) Hallar el rectángulo de área máxima inscripto en un triángulo isósceles de base 4 y altura 6, de acuerdo con el gráfico adjunto.



13) Un rectángulo de perímetro 12 gira sobre uno de sus lados para engendrar un cilindro. De todos los rectángulos posibles, ¿cuál genera el cilindro de mayor volumen?



14) Dado un cuadrado de lado ℓ, separar cuatro cuadrados de sus vértices y determinar las dimensiones de la caja de volumen máximo y base cuadrada que se puede construir.



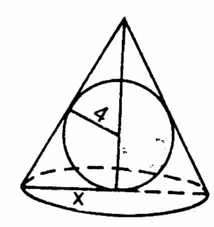
15) Encontrar un número real x tal que $x + \dfrac{1}{x^2}$ tenga valor mínimo.

16) Entre los sectores circulares de perímetro 8, ¿cuál es el de mayor área?

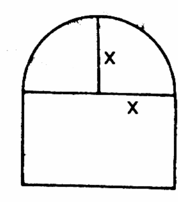
17) Cilindro de mayor volumen y área total 300.

18) ¿Cuál es el cono de mayor volumen que se engendra al hacer girar alrededor de un cateto un triángulo de hipotenusa 5?

19) ¿Cuál es el cono recto de menor volumen que puede circunscribirse a una esfera de radio 4?

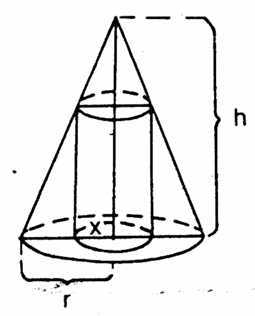


20) Una ventana tiene la forma de un rectángulo con un semicírculo encima cuyo diámetro es igual a la base del rectángulo. Si el perímetro total de la ventana es 2, hallar las dimensiones para que su área sea máxima.



21) De todos los cilindros rectos que se pueden inscribir en un cono circular recto,

demostrar que la altura del cilindro de volumen máximo es un tercio de la altura del cono.



22) Un triángulo isósceles tiene perímetro 2 p y se lo hace girar alrededor de su base. ¿Qué lado tiene el triángulo que engendra el cuerpo de volumen máximo?

23) Idem si el triángulo gira alrededor de la altura de la base.

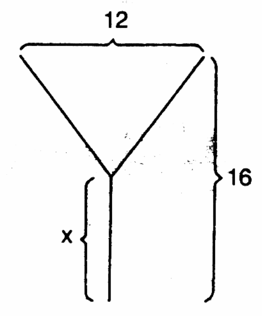
24) ¿Cuál es el cilindro de volumen máximo que puede inscribirse en una esfera de radio a?

25) ¿Cuál es el rectángulo de perímetro máximo que puede inscribirse en una semicircunferencia de radio a?

26) El perímetro de un sector circular es 2 p. ¿Cuál es el radio del círculo si el sector tiene área máxima?

27) El perímetro de un cuadrado y la longitud de una circunferencia de radio a suman 2 p. ¿En qué condiciones la suma del área del cuadrado más el área del círculo es mínima?

28) Se desea construir la letra Y con las siguientes dimensiones:



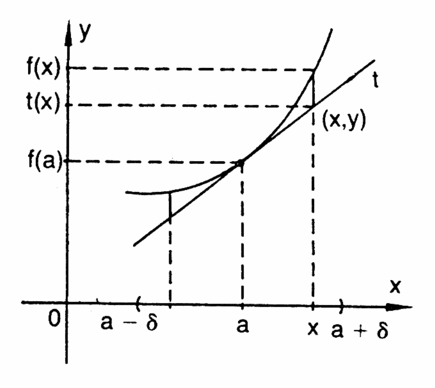
¿Cuál es la longitud del segmento vertical para que la suma de las 3 longitudes sea mínima?

VII. Puntos de inflexión

Así como el signo de la derivada primera de una función está vinculado con el crecimiento o decrecimiento de la misma, el signo de la derivada segunda está vinculado con la concavidad del gráfico correspondiente.

Concavidad de una curva

La curva correspondiente a una función derivable f es *"cóncava hacia arriba"* o tiene concavidad positiva en el punto [a; f(a)] si y sólo si existe un entorno reducido del punto a, donde la curva está por encima de la recta tangente a la misma en dicho punto. (La concavidad de la curva está dirigida hacia el sentido positivo del eje de ordenadas.)



De acuerdo con consideraciones anteriores (pág. 217), la ecuación de la recta tangente en el punto [a; f(a)] es:

$$t(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Consideremos una función auxiliar $g = f - t$.

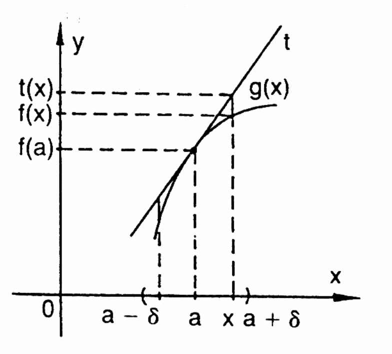
Resulta $g(x) = f(x) - t(x) = f(x) - [f(a) + f'(a)(x - a)]$.

El valor g(x) es la diferencia entre la ordenada de la curva y la ordenada de la recta t para un punto cualquiera x del dominio de f.

Por lo tanto, la curva es cóncava hacia arriba en el punto [a; f(a)] si y sólo si existe un entorno reducido del punto a tal que, para todo punto x de dicho entorno, el valor g(x) es positivo.

En efecto, si g(x) es positivo, la ordenada de la curva es mayor que la ordenada de la recta tangente, y la curva, en cada punto x del entorno, está por encima de la recta tangente. Se cumple también la implicación recíproca.

Análogamente, la curva de una función derivable f es *"cóncava hacia abajo"* o tiene concavidad negativa en el punto [a; f(a)] si y sólo si existe un entorno reducido del punto a, donde la curva está por debajo de la recta tangente a la misma en dicho punto. En este caso la concavidad de la curva está dirigida hacia el sentido negativo del eje y.



En este caso, $\exists E'(a, \delta) / \forall x: (x \in E'(a, \delta) \Rightarrow g(x) = f(x) - t(x) < 0)$.

Según indicaciones anteriores, el signo de la derivada segunda permite determinar el sentido de la concavidad de una curva, de acuerdo con el siguiente teorema.

Teorema

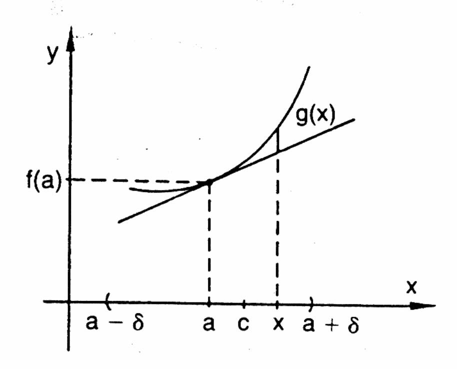
Si una función f tiene derivada segunda positiva en un punto a y existe f' finita en un entorno de a, entonces el gráfico de f es cóncavo hacia arriba en el punto $[a; f(a)]$.

Demostración

Consideremos nuevamente la función g, que indica la diferencia entre la ordenada de la curva y la ordenada de la tangente en $[a; f(a)]$ para un punto x del entorno de centro a y radio δ, donde existe f'.

Es $g(x) = f(x) - [f(a) + f'(a)(x - a)]$ (pág. 271)

y también $g(x) = [f(x) - f(a)] - f'(a)(x - a)$ (1).



Si se aplica el teorema del valor medio (pág. 247) al intervalo entre a y x, es posible encontrar un punto c entre a y x / $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$.

Reemplazando en la expresión (1) resulta:

$$g(x) = f'(c)(x - a) - f'(a)(x - a) = [f'(c) - f'(a)](x - a) \quad (2),$$

para c entre a y x.

Ahora bien, por hipótesis, $f''(a)$ es positiva, es decir,

$$f''(a) = \lim_a \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} > 0.$$

Por una propiedad de los límites finitos (pág. 134),

$$\exists E'(a, \delta') / \forall x: \left(x \in E'(a, \delta') \Rightarrow \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} > 0\right).$$

Para que este cociente de incrementos sea positivo, numerador y denominador tienen el mismo signo.

Es decir, $(x > a \Rightarrow f'(x) > f'(a)) \wedge (x < a \Rightarrow f'(x) < f'(a))$.

Supongamos $\delta < \delta'$. Si x pertenece al entorno reducido del punto a de radio δ, también el punto c pertenece a dicho entorno y se verifica:

$$(x > a \Rightarrow f'(x) > f'(a) \Rightarrow f'(c) > f'(a))$$
$$\wedge \ (x < a \Rightarrow f'(x) < f'(a) \Rightarrow f'(c) < f'(a)).$$

Por lo tanto, los dos factores de la expresión (2) tienen el mismo signo.

Es decir, $\forall x: (x \in E'(a, \delta) \Rightarrow g(x) > 0)$, y el gráfico de f es cóncavo hacia arriba en el punto $[a; f(a)]$.

De la misma forma se demuestra, si $f''(a)$ es negativa, que el gráfico de f es cóncavo hacia abajo en el punto $[a; f(a)]$.

En resumen,

f'' *positiva* $\Rightarrow$ gráfico de f cóncavo hacia el *eje y positivo.*

f'' *negativa* $\Rightarrow$ gráfico de f cóncavo hacia el *eje y negativo.*

El criterio para verificar la existencia de extremos locales utilizando la derivada segunda (pág. 258) es un caso particular de la propiedad que se acaba de demostrar.

En efecto, $f'(a) = 0 \wedge f''(a) > 0 \Rightarrow f(a)$ mínimo local, ya que la tangente es horizontal y la curva es cóncava hacia arriba.

Análogamente, $f'(a) = 0 \wedge f''(a) < 0 \Rightarrow f(a)$ máximo local, ya que la tangente es horizontal y la curva es cóncava hacia abajo.

Ejemplo

Sea $f: x \to 2x^4 - 3x^2 + 5$. Estudiar la concavidad del gráfico correspondiente.

Derivamos f y luego f' para hallar f'':

$$f'(x) = 8x^3 - 6x \Rightarrow f''(x) = 24x^2 - 6.$$

El signo de la derivada segunda determina el sentido de la concavidad.

Buscamos los valores de x para los cuales es $f''(x) > 0$.

$$24x^2 - 6 > 0 \quad \text{si} \quad x^2 > \frac{1}{4}$$

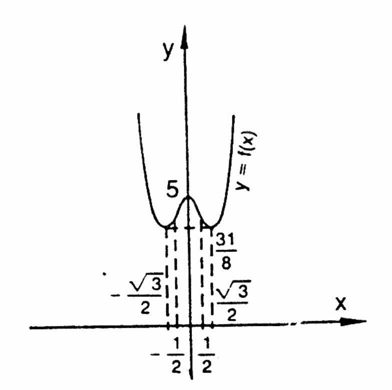
O sea, $$24x^2 - 6 > 0 \quad \text{si} \quad |x| > \frac{1}{2}$$

Luego $$f''(x) > 0 \text{ si } x > \frac{1}{2} \vee x < -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, el gráfico de la función f es cóncavo hacia arriba en el conjunto

$$A = \left\{x / x > \frac{1}{2} \vee x < -\frac{1}{2}\right\}.$$

Análogamente, $f''(x) < 0$ si $|x| < \frac{1}{2}$. Luego, el gráfico es cóncavo hacia abajo en el conjunto $B = \left\{x / -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right\}$.



Para completar el gráfico de f vemos que la intersección con el eje de ordenadas es el punto (0; 5). Por otra parte, la ecuación bicuadrada $2x^4 - 3x^2 + 5 = 0$ no tiene raíces reales y el gráfico no corta al eje de abscisas.

Además la derivada primera f' se anula en tres puntos: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

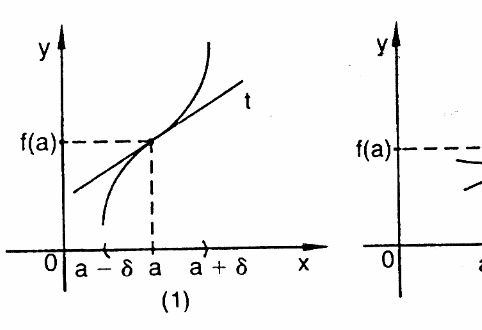
y $x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Puede verificarse que f(0) = 5 es máximo local y que

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{31}{8} \text{ es mínimo local y absoluto.}$$

Punto de inflexión

El punto [a; f(a)] del gráfico de una función derivable f es un punto de inflexión si y sólo si en el mismo la curva cambia el sentido de su concavidad.

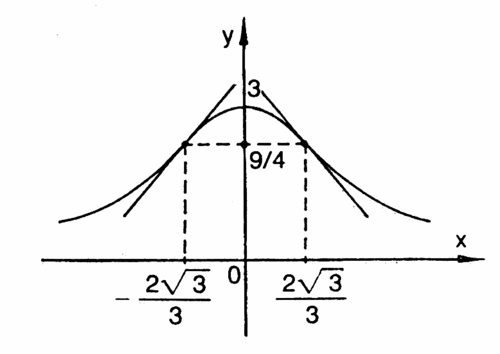


Si, por ejemplo, existe E(a, δ) tal que el gráfico de f es cóncavo hacia abajo en (a − δ; a) y cóncavo hacia arriba en (a; a + δ) (fig. 1), entonces el punto [a; f(a)] es de inflexión. De acuerdo con la definición de concavidad en ambos semientornos, la tangente al gráfico atraviesa al mismo en dicho punto.

Según propiedades anteriores, si f''(a) = 0, y existe un entorno de a tal que f'' es positiva en (a − δ; a) y negativa en (a; a + δ) (o recíprocamente), el punto considerado es de inflexión.

Ejemplo

Hallar, si existen, puntos de inflexión en el gráfico de $f: x \to \frac{12}{x^2 + 4}$.



Si buscamos la derivada:

$$\forall x \text{ es } f'(x) = \frac{-24x}{(x^2 + 4)^2}$$

Calculemos ahora la derivada segunda de f. Resulta, para todo x:

$$f''(x) = \frac{-24(x^2 + 4)^2 + 96x^2(x^2 + 4)}{(x^2 + 4)^4} = \frac{-24(x^2 + 4) + 96x^2}{(x^2 + 4)^3} =$$

$$= \frac{24(3x^2 - 4)}{(x^2 + 4)^3}$$

$$f''(x) = 0 \text{ si } x^2 = \frac{4}{3}$$

Por lo tanto, la derivada segunda se anula en los puntos $x_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

y $x_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Luego, los puntos $[x_1; f(x_1)]$ y $[x_2; f(x_2)]$ pueden ser puntos de inflexión. Para verificarlo debe estudiarse la concavidad del gráfico en algún entorno de cada uno de ellos.

Veamos qué sucede en el punto $[x_1; f(x_1)]$.

$$\left(0 < x < \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow f''(x) < 0\right) \wedge \left(x > \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow f''(x) > 0\right).$$

Por lo tanto, $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}; f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\right]$ es un punto de inflexión.

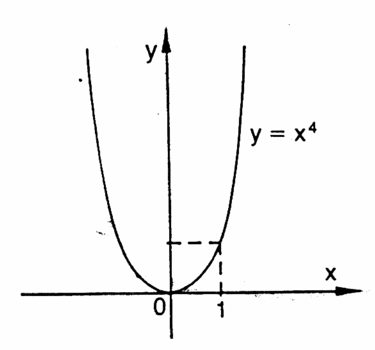
Análogamente, puede demostrarse que $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; f\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\right)$ es otro punto de inflexión.

Luego, el gráfico de f presenta dos puntos de inflexión:

$\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{9}{4}\right)$ y $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{9}{4}\right)$.

Obsérvese que la condición de ser nula la derivada segunda es necesaria pe no suficiente para la existencia de un punto de inflexión.

Por ejemplo, sea f: $x \to x^4$.



$$f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f''(x) = 12x^2.$$

En este caso, f'' se anula en el origen y allí no hay inflexión. Puede probarse fácilmente que la función tiene mínimo local y absoluto en el origen.

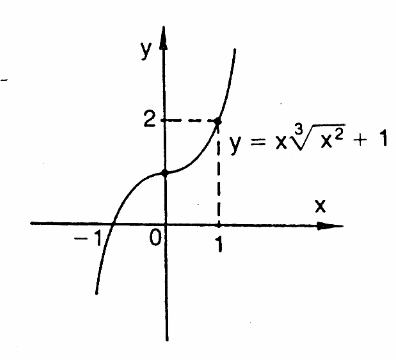
También debe tenerse en cuenta que puede haber inflexión en un punto donde no existe f''.

Por ejemplo, consideremos la función $f: x \to x\sqrt[3]{x^2} + 1$.

La función dada es $f / \forall x: f(x) = x^{5/3} + 1$.

Calculemos f' y f''.

Resulta $\forall x: f'(x) = \frac{5}{3}x^{2/3} \Rightarrow \forall x \neq 0: f''(x) = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}}$



La derivada segunda no existe en el origen, pero es positiva a derecha del mismo y negativa a izquierda.

Además, como f es derivable en el origen, hay recta tangente y la curva es cóncava hacia arriba a derecha del origen y cóncava hacia abajo a la izquierda. Por lo tanto, el punto (0; 1) es punto de inflexión.

Para encontrar, entonces, los puntos de inflexión de un gráfico, interesa considerar especialmente los puntos donde se anula f'', si ésta existe, pero también hay que tener en cuenta los puntos del dominio donde no existe f''.

Condiciones suficientes para la existencia de punto de inflexión se verán en el capítulo siguiente, como aplicación de la fórmula de Taylor.

EJERCICIOS

1) Indicar en qué partes del dominio los gráficos de las siguientes funciones son cóncavos hacia arriba:

$g: x \to \frac{3x-1}{3x+5}$ $\quad r: x \to \frac{5}{x^2+1}$ $\quad h: x \to \frac{2}{x^3+1}$ $\quad f: x \to 3^{1/x}$

2) Indicar en qué partes del dominio los gráficos de las siguientes funciones son cóncavos hacia abajo:

$f: x \to x^{1/3}(x+2)$ $\quad g: x \to 2x^3 + x$ $\quad h: x \to \frac{x^2}{x+1}$

$r: x \to x^2(x+5)$ $\quad m: x \to (x-3)(x+2)^2$

$s: x \to x(x^2-4)$ $\quad n: x \to 2\sqrt{x^2+1} - x^2$

3) Puntos de inflexión en el gráfico de cada una de las siguientes funciones:

$f: x \to x^5$ $\quad t: x \to \frac{1}{x^2+9}$

$g: x \to \frac{x}{x^2+1}$ $\quad m: x \to (x-1)^3(x-2)$

$h: x \to e^{(x^2)}$ $\quad p: x \to (x+3)^2(x-4)$

$r: x \to 3x^2 + \frac{1}{x}$ $\quad u: x \to x^{1/3}(x+2)$

$s: x \to (x+1)^4(x-3)$ $\quad w: x \to x^4 - 4x^3 + 5$

4) Intervalos de concavidad positiva o negativa:

a) $f: x \to \frac{x^4}{2} - x^3 - 18x^2 + 40x - 5$ $\quad$ b) $f: x \to x^2 - \frac{1}{x}$ $\quad$ c) $f: x \to x^2 + \cos x$

5) $f: x \to x^2 - \frac{1}{6x^3}$;

a) punto de inflexión; b) ecuación de la recta tangente a la curva en dicho punto.

VIII. Límites indeterminados. Regla de L'Hôpital

Para calcular el límite de un cociente se ha demostrado en el capítulo 3 (pág. 139) la propiedad correspondiente:

$$\text{lím}_a \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{lím}_a f(x)}{\text{lím}_a g(x)}$$

si se cumple la condición de que el límite del divisor no es cero.

Al considerar límites infinitos puede observarse que son equivalentes las siguientes expresiones:

$$\text{lím}_a g(x) = 0 \quad \text{y} \quad \text{lím}_a \frac{1}{g(x)} = \infty,$$

y puede probarse también que si el divisor tiene límite nulo y el dividendo tiene límite finito no nulo, entonces el límite del cociente es infinito.

Por lo tanto, queda por resolver un caso que aparece frecuentemente, presentado en el capítulo 3 (pág. 154) como un caso de indeterminación del límite: el cociente de dos infinitésimos. Este caso de indeterminación suele simbolizarse con la expresión $\frac{0}{0}$, y un ejemplo lo constituye $\text{lím}_0 \frac{\text{sen } x}{x} = 1$, calculado en dicho capítulo (pág. 136).

En muchas circunstancias se puede destruir la indeterminación recurriendo a las funciones derivadas, mediante un método conocido con el nombre de regla de L'Hôpital.*

Teorema 1

Sean f y g dos funciones derivables en un entorno reducido de un punto a, y $g'(x) \neq 0$ en todo punto x de dicho entorno.

Si $\text{lím}_a f(x) = 0$, $\text{lím}_a g(x) = 0$ y $\text{lím}_a \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, entonces $\text{lím}_a \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Se considerará primero el semientorno a la derecha del punto a, es decir, el intervalo abierto (a; a + h), y los límites se calcularán por la derecha del punto a. Puede demostrarse, luego, la misma propiedad en el intervalo (a − h; a), es decir, calculando límites por la izquierda.

Finalmente, entonces, la propiedad es válida a la derecha y a la izquierda del punto a, es decir, es válida en el entorno reducido del punto a.

◆ *Demostración*

Para demostrar la primera parte utilizaremos el teorema generalizado del valor medio en el intervalo $[a; x] \subseteq E(a; h)$, que no puede aplicarse directamente a las funciones f y g pues no se conoce el comportamiento de éstas en el punto a, y el teorema mencionado exige, por lo menos, continuidad en los extremos del intervalo, además de derivabilidad en su interior.

Por ello consideramos dos nuevas funciones:

$$F: x \to \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases} \quad (1) \qquad G: x \to \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}$$

Como $\text{lím}_a f(x) = \text{lím}_a F(x) = 0$ y $F(a) = 0$ por (1). F es continua en a. Análogamente, G es continua en a.

* Guillermo de L'Hôpital (1661-1704). Fue uno de los divulgadores del cálculo diferencial. Su obra se apoya en la de su maestro Juan Bernoulli.

Si se considera el intervalo cerrado [a; x], donde x es un punto cualquiera de (a; a + h), puede aplicarse el teorema generalizado del valor medio (pág. 250). En efecto, F y G son continuas en [a; x], derivables en (a; x) y, además, por hipótesis, G' = g' no se anula en (a; x).

Por lo tanto, $\exists c \in (a; x) \,/\, \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} \quad a < c < x$.

Es decir, $$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} \quad (2).$$

Como f y F coinciden en (a; a + h) y también coinciden g y G en dicho intervalo, $\forall x \in (a; a+h)$ es $F'(x) = f'(x)$ y $G'(x) = g'(x)$. Además, como $c \in (a; a+h)$, es $F'(c) = f'(c)$ y $G'(c) = g'(c)$.

Calculando el límite de la expresión (2), a derecha del punto a, es

$$\text{lím}_{a^+} \frac{F(x)}{G(x)} = \text{lím}_{a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)}, \text{ y por lo tanto } \text{lím}_{a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{lím}_{a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (3).$$

Ahora bien, c depende de x y está entre a y x. Por ello, el punto c pertenece a cualquier entorno del punto a al cual pertenezca x. Aplicando la definición de límite, es $\text{lím}_{a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \ell$.

Reemplazando en (3) resulta $\text{lím}_{a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

De la misma forma se prueba $\text{lím}_{a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{lím}_{a^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, considerando el intervalo (a − h; a).

Luego, el teorema queda probado en el punto a.

El teorema puede completarse, si existen f'(a) y $g'(a) \neq 0$, de la siguiente manera: $\text{lím}_a \frac{f(x)}{g(x)} = \text{lím}_a \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$.

En efecto,

$$\frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\text{lím}_a \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\text{lím}_a \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \text{lím}_a \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \text{lím}_a \frac{f(x)}{g(x)},$$

ya que por existir f'(a), f es continua en el punto a y es $f(a) = \text{lím}_a f(x) = 0$. Por las mismas razones resulta $g(a) = 0$.

Obsérvese que no se ha exigido previamente la continuidad de f' y g' en el punto a.

Ejemplos

$$\text{lím}_0 \frac{\text{sen } x}{x} = \text{lím}_0 \frac{\cos x}{1} = 1$$

$$\lim_0 \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_0 \frac{1}{x+1} = 1$$

Puede suceder, al aplicar la regla, que las funciones f' y g' sean infinitésimos en el punto a y satisfagan también la hipótesis del teorema anterior. En este caso puede volver a aplicarse la misma regla utilizando las derivadas segundas. De la misma forma, la regla puede aplicarse en forma reiterada para funciones con n derivadas en las condiciones exigidas. Esta propiedad se demuestra por inducción.

Ejemplo

$$\lim_0 \frac{3x - 3\operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_0 \frac{3 - 3\cos x}{3x^2} = \lim_0 \frac{3 \operatorname{sen} x}{6x} = \lim_0 \frac{3\cos x}{6} = \frac{1}{2}$$

Generalización de la regla de L'Hôpital

La regla demostrada admite varias generalizaciones que permiten su aplicación a distintos casos de límites indeterminados.

Para completar el caso del cociente de dos infinitésimos falta considerar funciones infinitésimas para $x \to \infty$.

Teorema 2

Sea k un número positivo cualquiera, y para todo $x > k$ sean f y g dos funciones derivables en x, con $g'(x) \neq 0$. Si $\lim_{+\infty} f(x) = 0$ y $\lim_{+\infty} g(x) = 0$, entonces

$$\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

◆ *Demostración*

Consideremos $t = \frac{1}{x}$. Con este cambio de variable, si x tiende a $+\infty$, entonces t tiende a 0^+.

Si para todo $x > k$ es $F(t) = f(x)$ y $G(t) = g(x)$ (1),

resulta $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{0^+} \frac{F(t)}{G(t)}$ (2).

Ahora bien, por hipótesis,

$$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{0^+} F(t) = 0 \quad y \quad \lim_{+\infty} g(x) = \lim_{0^+} G(t) = 0.$$

Por lo tanto las funciones F y G, cuya variable es t, satisfacen la hipótesis del primer teorema de L'Hôpital, y se cumple, entonces:

$$\lim_{0^+} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{0^+} \frac{F'(t)}{G'(t)}$$

Para hallar F' y G' debemos aplicar la regla de derivación de funciones compuestas, pues por (1):

$$F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) \Rightarrow F'(t) = f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right).$$

Análogamente:

$$G(t) = g\left(\frac{1}{t}\right) \Rightarrow G'(t) = g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)$$

$$y \quad G'(t) \neq 0 \quad si \quad 0 < t < \frac{1}{k}$$

Luego,

$$\lim_{0^+} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{0^+} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (3).$$

Por lo tanto, es $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{0^+} \frac{F(t)}{G(t)}$ por (2),

y es $\lim_{0^+} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ por (3).

Luego, resulta $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, que es la tesis.

Ejemplo

$$\lim_{+\infty} \frac{\ln x}{e^x} = \lim_{+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^x} = \lim_{+\infty} \frac{1}{x e^x} = 0.$$

Puede demostrarse una propiedad análoga si $x \to -\infty$ y, en general, si $x \to \infty$.

Teorema 3

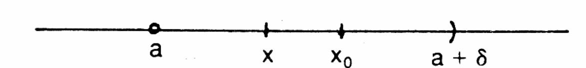
Sean f y g dos funciones derivables en todo punto $x \neq a$, y $g'(x) \neq 0$. Si $\lim_a f(x) = +\infty$, $\lim_a g(x) = +\infty$ y $\lim_a \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, entonces $\lim_a \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

◆ *Demostración*

Como $\lim_a f(x) = +\infty$, prefijado $k > 0$, existe un intervalo $(a; a+\delta) / \forall x$: $(x \in (a; a+\delta) \Rightarrow f(x) > k)$. Análogamente, $\exists \delta' / \forall x$: $(x \in (a; a+\delta') \Rightarrow g(x) > k)$ (1).

Si es $\delta < \delta'$, existe en $(a; a+\delta)$ el cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$

Consideremos ahora un intervalo $(a; x_0]$ incluido en $(a; a+\delta)$. Es decir, fijamos en el intervalo $(a; a+\delta)$ un punto x_0.



Si x es un punto cualquiera entre a y x_0, puede verificarse, efectuando las operaciones indicadas en el segundo miembro, que es válida la siguiente expresión:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}} \qquad (2),$$

pues $g(x) \neq g(x_0)$, según el teorema de Rolle, ya que, por hipótesis, g' no se anula, y tampoco se anula g por (1).

Por el teorema de Cauchy (pág. 250), en el intervalo $[x; x_0]$

$$\exists c / \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Reemplazando en la expresión (2), resulta:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}, \text{ para c entre x y } x_0$$

Si se calcula el límite a derecha del punto a, es:

$$\text{lím}_{a^+}\frac{f'(c)}{g'(c)} = \text{lím}_{a^+}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\text{lím}_{a^+}\frac{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}$$

Resulta $\text{lím}_{a^+}\frac{f(x_0)}{f(x)} = 0$, pues el límite del denominador es infinito y el numerador es una constante. Análogamente, $\text{lím}_{a^+}\frac{f(x_0)}{g(x)} = 0$.

Luego, $\text{lím}_{a^+}\frac{f'(c)}{g'(c)} = \text{lím}_{a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ (3).

Ahora bien, c depende de x y está entre x y x_0.

x x_0

a c a + h a + δ

Como $\text{lím}_{a^+}\frac{f'(C)}{g'(x)} = \ell, \forall\epsilon > 0\ \exists h > 0 / x \in (a; a+h) \Rightarrow \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - \ell\right| < \epsilon$:

Encontrado h > 0, cualquier número positivo h' menor que h satisface la expresión anterior. Basta buscar h' suficientemente pequeño, o sea, tomar x suficientemente próximo al punto a para que el punto c pertenezca al intervalo (a; a + h) y se

que también $\left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - \ell\right| < \epsilon$.

Resulta, entonces, $\text{lím}_{a^+}\frac{f'(c)}{g'(c)} = \ell$, y reemplazando en (3) es: $\text{lím}_{a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

De igual forma se prueba la propiedad a izquierda del punto a, y vale, por lo tanto, en el punto a.

Ejemplo

$$\text{lím}_0\frac{\text{cotg}\, x}{\frac{1}{x}} = \text{lím}_{0^+}\frac{-\frac{1}{\text{sen}^2 x}}{-\frac{1}{x^2}} = \text{lím}_0\frac{x^2}{\text{sen}^2 x} = 1.$$

El teorema 3 es también válido, en las mismas condiciones, para $x \to \infty$.

Los demás casos de indeterminación (pág. 154) pueden llevarse a los casos anteriores mediante recursos algebraicos o aplicando logaritmos.

Ejemplos

Caso 3: producto de un infinitésimo por un infinito

Trataremos de calcular $\ell = \text{lím}_{\frac{\pi}{2}}\, \text{tg}\, x \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Para poder aplicar el teorema 1 escribiremos el producto anterior como cociente de dos infinitésimos en el punto $\frac{\pi}{2}$.

Resulta $\ell = \text{lím}_{\frac{\pi}{2}}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\text{cotg}\, x} = \text{lím}_{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-\frac{1}{\text{sen}^2 x}} = -1.$

Caso 4: suma de dos infinitos de signos opuestos

Deseamos calcular $\ell = \text{lím}_3\left[\frac{1}{x-3} - \frac{1}{\ln(x-2)}\right]$.

La expresión anterior puede escribirse como el cociente de dos infinitésimos en el punto 3.

$$\ell = \text{lím}_3\underbrace{\frac{\ln(x-2)-x+3}{(x-3)\ln(x-2)}}_{\text{teorema 1}} = \text{lím}_3\frac{\frac{1}{x-2}-1}{\ln(x-2)+\frac{x-3}{x-2}} =$$

$$= \lim_3 \frac{3-x}{\underbrace{(x-2)\ln(x-2)+x-3}_{\text{teorema 1}}} = \lim_3 \frac{-1}{\ln(x-2)+2} = -\frac{1}{2}.$$

En general, si se desea expresar la resta de dos funciones como un cociente, se recurre al siguiente artificio algebraico:

$$f(x) - g(x) = \frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)g(x)}} \quad (f(x) \neq 0 \mid \wedge\ g(x) \neq 0).$$

Caso 5: límite de una función potencial exponencial si la base tiende al número 1 y el exponente a infinito

Trataremos de calcular $\ell = \lim_{+\infty}\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x}$.

Aplicando logaritmos, si $f(x) = \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x}$, es:

$$\ln f(x) = 2x \cdot \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right).$$

Luego, $\lim_{+\infty}[\ln f(x)] = \lim_{+\infty}\left[2x \cdot \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)\right] =$

$$= \lim_{+\infty} \underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{2x}} = \lim_{+\infty}}_{\text{teorema 2}} \frac{\frac{x}{x+3}\cdot\left(-\frac{3}{x^2}\right)}{\frac{-1}{2x^2}} = \lim_{+\infty}\frac{6x}{x+3} = \underbrace{\lim_{+\infty} 6}_{\text{teorema 3}} = 6$$

$\lim_{+\infty}[\ln f(x)] = 6 \Rightarrow \ln[\lim_{+\infty} f(x)] = 6$ (pág. 141).

Luego, $\lim_{+\infty} f(x) = e^6$.

Caso 6: límite de una función potencial exponencial si la base y el exponente son infinitésimos

Calcular $\ell = \lim_{0^+}(x^x)$.

Si $f(x) = x^x$, es $\ln f(x) = x \ln x$.

$$\lim_{0^+}(\ln x^x) = \lim_{0^+}(x \ln x) = \underbrace{\lim_{0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}_{\text{teorema 3}} = \lim_{0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{0^+}(-x) = 0.$$

$\lim_{0^+}(\ln x^x) = 0 \Rightarrow \ln(\lim_{0^+} x^x) = 0$ y $\ln \ell = 0 \Rightarrow \ell = e^0 = 1$.

Luego, $\lim_{0^+}(x^x) = 1$.

Caso 7: límite de una función potencial exponencial si la base es un infinito y el exponente es un infinitésimo

Calcular $\ell = \lim_{0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{sen} x}$.

Si $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{sen} x}$, es $\ln f(x) = \operatorname{sen} x \cdot \ln \frac{1}{x}$.

Luego,

$$\lim_{0^+}[\ln f(x)] = \lim_{0^+}\left[\operatorname{sen} x \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right] =$$

$$= \underbrace{\lim_{0^+}\frac{-\ln x}{\operatorname{cosec} x} = \lim_{0^+}}_{\text{teorema 3}}\frac{-\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{0^+}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x \cos x} = \lim_{0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 0.$$

Luego, $\lim_{0^+} f(x) = e^0 = 1$.

Nota: La regla de L'Hôpital, que permite, en el cálculo del límite, reemplazar a ciertas funciones por sus derivadas, sólo puede aplicarse, como se ha indicado, al cociente de dos infinitésimos o al cociente de dos infinitos. Los restantes casos de indeterminación del límite deben reducirse previamente a uno de los dos casos mencionados mediante operaciones algebraicas o mediante la aplicación de logaritmos.

EJERCICIOS

1) Calcular los siguientes límites aplicando la regla de L'Hôpital $\left(\frac{0}{0}\right)$:

a) $\lim_1 \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1}$ b) $\lim_0 \frac{x^2 + 5x}{x^2 - 2x}$ c) $\lim_3 \frac{x - 3}{x^3 - 27}$

d) $\lim_{+\infty} \frac{e^x}{x^2}$ e) $\lim_0 \frac{3x(e^x - 1)\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$ f) $\lim_0 \frac{\operatorname{sen} x - x}{e^{2x} - 1}$

g) $\lim_0 \frac{\operatorname{tg} x}{\ln(x + 1)}$ h) $\lim_0 \frac{x - \operatorname{tg} x}{2 \operatorname{sen}^2 x}$ i) $\lim_0 \frac{x - \operatorname{sen} x}{5x^4}$

2) Calcular aplicando la regla de L'Hôpital $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$:

a) $\lim_{+\infty} \frac{x^2 + 3x}{x^3 - 1}$ b) $\lim_{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$

c) $\lim_{+\infty} \dfrac{x^2}{\ln x}$

d) $\lim_0 \dfrac{\operatorname{cotg} x}{\operatorname{cotg} 5x}$

e) $\lim_{\infty} \dfrac{\ln x + x}{x \ln x}$

f) $\lim_{\infty} \dfrac{\ln x}{x^3}$

3) Aplicar la regla de L'Hôpital ($0 \cdot \infty$):

a) $\lim_1 [\ln x \operatorname{cotg}(1 - x)]$

b) $\lim_0 [(2x - x^2) \cdot \operatorname{cotg} x]$

c) $\lim_{\frac{\pi}{2}} \left[\operatorname{tg} x \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)\right]$

d) $\lim_0 [\ln (5x)\ (2x - \operatorname{sen} x)]$

4) Aplicar la regla de L'Hôpital ($\infty - \infty$):

a) $\lim_1 \left(\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$

b) $\lim_0 \left(\dfrac{1}{e^{2x} - 1} - \dfrac{1}{\operatorname{sen} 2x}\right)$

c) $\lim_{\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{1}{x - \frac{\pi}{2}} - \operatorname{tg} x\right)$

d) $\lim_0 \left(\dfrac{1}{x} - \operatorname{cosec} x\right)$

e) $\lim_0 \left[\dfrac{\ln(x + 1)}{x^2} - \dfrac{1}{x^2 + x}\right]$

f) $\lim_0 \left[\operatorname{cosec}^2 x - \dfrac{1}{x^2}\right]$

5) Aplicar la regla de L'Hôpital (1^{∞}):

a) $\lim_{+\infty} \left(\dfrac{2x + 1}{2x + 3}\right)^{x - 2}$

b) $\lim_1 (2x - 1)^{\operatorname{cotg}(x - 1)}$

c) $\lim_0 (2x + e^x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$

d) $\lim_0 (x + 1)^{\sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$

e) $\lim_{\infty} \left(\dfrac{3x + 1}{3x + 4}\right)^x$

f) $\lim_1 (1 + 3 \ln x)^{\operatorname{cosec}(1 - x)}$

6) Aplicar la regla de L'Hôpital (0^0):

a) $\lim_{1^+} (x - 1)^{x - 1}$

b) $\lim_{1^+} (x - 1)^{\ln x}$

c) $\lim_{\frac{\pi}{2}^-} (\cos x)^{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$

d) $\lim_{0^+} x^{\operatorname{sen} x}$

e) $\lim_{0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$

f) $\lim_{0^+} (\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{\ln x}}$

7) Aplicar la regla de L'Hôpital (∞^0):

a) $\lim_{0^+} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\ln(x + 1)}$

b) $\lim_{0^+} (\operatorname{cotg} x)^{\operatorname{sen} x}$

c) $\lim_{+\infty} (x^3 - 2)^{\frac{1}{\ln x}}$

d) $\lim_{\infty} (3 + x)^{\frac{2}{x}}$

e) $\lim_{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$

f) $\lim_1 \left(\dfrac{1}{\ln x}\right)^{x - 1}$

IX. Estudio completo de funciones

Como síntesis de los temas expuestos en este capítulo y en los capítulos de límite y continuidad haremos ahora el estudio completo de algunas funciones.

Ejemplo 1

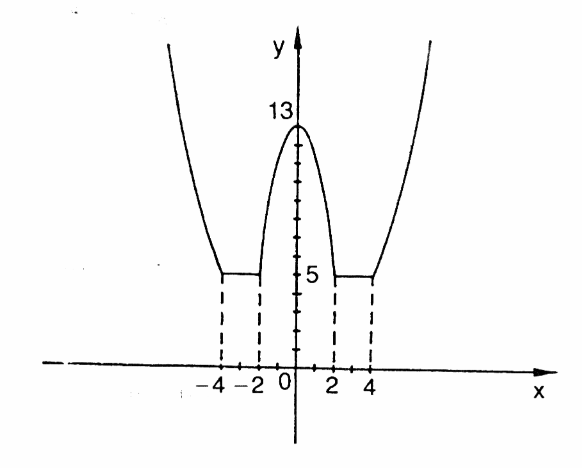
$f: x \to |x^2 - 16| + |x^2 - 4| - 7$

$$x < -4 \Rightarrow x^2 - 16 > 0 \wedge x^2 - 4 > 0 \Rightarrow f(x) = 2x^2 - 27$$
$$-4 \leq x < -2 \Rightarrow x^2 - 16 \leq 0 \wedge x^2 - 4 > 0 \Rightarrow f(x) = 5$$
$$-2 \leq x \leq 2 \Rightarrow x^2 - 16 < 0 \wedge x^2 - 4 \leq 0 \Rightarrow f(x) = -2x^2 + 13$$
$$2 \leq x \leq 4 \Rightarrow x^2 - 16 \leq 0 \wedge x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow f(x) = 5$$
$$x \geq 4 \Rightarrow x^2 - 16 \geq 0 \wedge x^2 - 4 > 0 \Rightarrow f(x) = 2x^2 - 27$$

Luego, $D_f = \mathbb{R}$, y f puede definirse también de la siguiente manera:

$$f: x \to \begin{cases} 2x^2 - 27 & \text{si } |x| \geq 4 \\ 5 & \text{si } 2 \leq |x| < 4 \\ -2x^2 + 13 & \text{si } |x| < 2 \end{cases}$$

f es función par, pues $\forall x: f(x) = f(-x)$.



$$f': x \to \begin{cases} 4x & \text{si } |x| > 4 \\ 0 & \text{si } 2 < |x| < 4 \\ -4x & \text{si } |x| < 2 \end{cases}$$

Puntos críticos

no $\exists$ f'(x) si $x = -4 \vee x = -2 \vee x = 2 \vee x = 4$.
$f'(x) = 0$ si $x = 0 \vee x \in (-4; -2) \vee x \in (2; 4)$.

Monotonía

$f'(x) > 0$ si $x > 4 \vee -2 < x < 0$.
Luego, f crece en $(-2; 0)$ y en $(4; +\infty)$
$f'(x) < 0$ si $x < -4 \vee 0 < x < 2$.
Luego, f decrece en $(0; 2)$ y en $(-\infty; -4)$.

Concavidad

$$(f''(x) = 4 \text{ si } |x| > 4) \wedge (f''(x) = -4 \text{ si } |x| < 2).$$

Por lo tanto, la concavidad es positiva en $(-\infty; -4)$ y en $(4; +\infty)$, y es negativa en $(-2; 2)$.

Extremos

$$f''(0) = -4 < 0 \Rightarrow f(0) \text{ máximo local}$$

$$f(x) \text{ mínimo local si } x \in [-4; -2] \vee x \in [2; 4].$$

El valor de cada mínimo local es 5, que es también mínimo absoluto.

$$Rec_f = [5; +\infty).$$

La función no tiene máximo absoluto, pues $\lim_{\infty} f(x) = +\infty$.

Ejemplo 2

$f: x \longrightarrow e^{(-3x^2)}$

$D_f = \mathbb{R}$ $\qquad \lim_{\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ asíntota horizontal.

$$f'(x) = -6x\, e^{(-3x^2)}.$$

Puntos críticos

0 es punto crítico pues $f'(0) = 0$.

Monotonía

$f'(x) > 0$ si $x < 0$. Luego, f crece si $x < 0$.
$f'(x) < 0$ si $x > 0$. Luego, f decrece si $x > 0$.

Concavidad

$$f''(x) = -6\, e^{(-3x^2)} + 36x^2 e^{(-3x^2)} \Rightarrow f''(x) = e^{(-3x^2)}(36x^2 - 6).$$

$$f''(0) = -6 \Rightarrow f''(0) < 0 \Rightarrow f(0) \text{ máximo local.}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 36x^2 > 6 \Leftrightarrow x^2 > \frac{1}{6} \Leftrightarrow |x| > \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Luego, la concavidad del gráfico es positiva en $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ y en $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}; +\infty\right)$.

$f''(x) < 0$ si $|x| < \frac{\sqrt{6}}{6}$.

Luego, la concavidad es negativa en $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$.

$f''\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = f''\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = 0$ indica que puede haber puntos de inflexión en $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}; f\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\right)$ y en $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}; f\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\right)$.

Como en ambos puntos cambia el sentido de la concavidad, ambos son puntos de inflexión.

Si existe f''' y esta derivada no se anula en los puntos donde es nula f'', puede demostrarse que hay inflexión en el punto correspondiente sobre la curva (pág. 314).

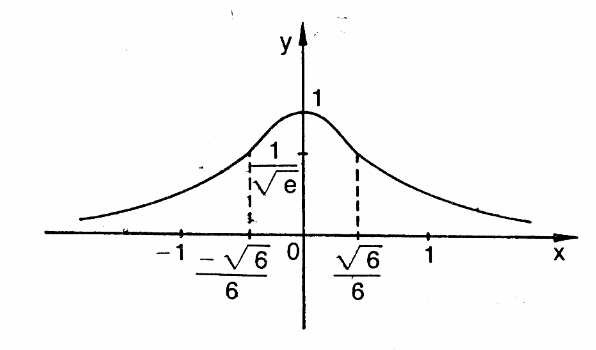
En nuestro caso:

$$f'''(x) = 108x\, e^{(-3x^2)} - 216x^3 e^{(-3x^2)} \Rightarrow f'''(x) = 108x\, e^{(-3x^2)}(1 - 2x^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'''\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) \neq 0 \wedge f'''\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) \neq 0.$$

Volvemos a afirmar, entonces, que $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}; e^{-\frac{1}{2}}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}; e^{-\frac{1}{2}}\right)$ son puntos de inflexión.

La función es par, pues $f(-x) = e^{(-3x^2)} = f(x)$
$Rec_f = (0; 1]$



f(0) = 1 es máximo local y absoluto.

La función tiene ínfimo, que es el número 0, pero no tiene mínimo absoluto, pues $0 \notin Rec_f$.

Ejemplo 3

$f: x \to \dfrac{x}{\ln x}$

$D_f = R^+ - \{1\}$

$\lim_1 f(x) = \infty \Rightarrow x = 1$ asíntota vertical $\left(\lim_{1^+} \dfrac{x}{\ln x} = +\infty \wedge \lim_{1^-} \dfrac{x}{\ln x} = -\infty\right)$.

$\lim_{+\infty} \dfrac{x}{\ln x} = \lim_{+\infty} x = +\infty$ (por regla de L'Hôpital).

$\lim_{0^+} \dfrac{x}{\ln x} = 0.$

$f'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x} \qquad \ln x = 1 \Rightarrow f'(x) = 0.$

O sea, $f'(e) = 0 \Rightarrow e$ punto crítico.

Monotonía

Como el denominador de f': $\ln^2 x = [\ln x]^2$ es siempre positivo, el signo de f' depende del numerador.

$\ln x > 1 \Leftrightarrow \ln x > \ln e \Rightarrow x > e \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ f crece.

$\ln x < 1 \Leftrightarrow \ln x < \ln e \Rightarrow x < e \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$ f decrece.

Luego, f crece en $(e; +\infty)$ y decrece en (0; 1) y en (1; e).

Concavidad

$$f''(x) = \dfrac{\dfrac{\ln^2 x}{x} - \dfrac{2 \ln x}{x}(\ln x - 1)}{\ln^4 x} \Rightarrow f''(x) = \dfrac{2 \ln x - \ln^2 x}{x \ln^4 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = \dfrac{2 - \ln x}{x \ln^3 x}$$

$f''(e) > 0 \Rightarrow f(e)$ mínimo local.

Para que $f''(x)$ sea positiva se presentan dos posibilidades:

1) $2 - \ln x > 0 \wedge x \ln^3 x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 2 \wedge \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln e^2 \wedge$

$\wedge \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow x < e^2 \wedge x > 1 \Leftrightarrow 1 < x < e^2$

2) $2 - \ln x < 0 \wedge x \ln^3 x < 0 \Leftrightarrow x > e^2 \wedge x < 1$, que no puede verificarse.

Luego, $f''(x) > 0$ si $1 < x < e^2$, y el gráfico tiene concavidad positiva en $(1;e^2)$.

Por otra parte, $f''(x) < 0$ si

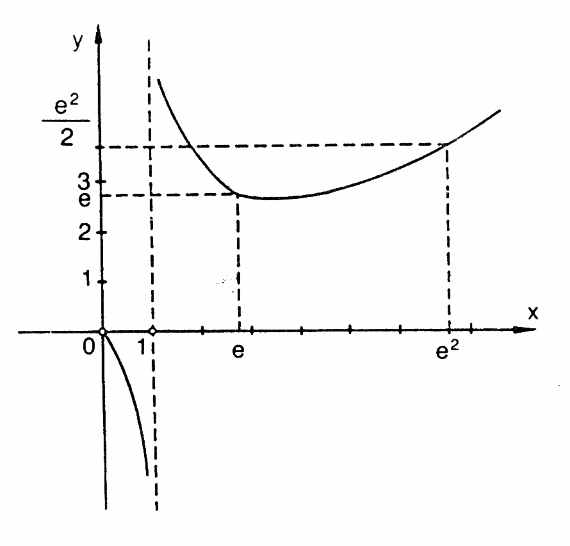
1) $2 - \ln x > 0 \wedge x \ln^3 x < 0 \vee$ 2) $2 - \ln x < 0 \wedge x \ln^3 x > 0$.

1) $x < e^2 \wedge 0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x < 1$.

La curva tiene concavidad negativa en (0; 1).

2) $x > e^2 \wedge x > 1 \Rightarrow x > e^2$.

La curva tiene concavidad negativa en $(e^2; +\infty)$.



$f''(x) = 0$ si $\ln x = 2$. Como además en e^2 cambia el sentido de la concavidad, $\left(e^2; \dfrac{1}{2} e^2\right)$ es punto de inflexión.

$Rec_f = \{y / y < 0 \vee y \geq e\}$.

No hay extremos absolutos.

EJERCICIOS

Estudio completo de cada una de las siguientes funciones:

1) $f: x \to \dfrac{-x^2}{x+3}$

2) $f: x \to \dfrac{x^3}{x^2+1}$

3) $f: x \to x^2 - |4x + 12| - 1$

4) $f: x \to \dfrac{x^2 - x}{x+2}$

5) $f: x \to \dfrac{3x}{x^2+4}$

6) $f: x \to \dfrac{x}{x^3 - 8}$

7) $f: x \to |x + 4| - |x^2 - 5| + 2$

8) $f: x \to |x^2 - 9| + |x - 5| + 2$

9) $f: x \to 3x^2 + \frac{1}{x}$ 10) $f: x \to \frac{|x^2 - 4|}{x}$

11) $f: x \to \frac{|x^2 + x - 12|}{x + 1} - 3$

RESPUESTAS A EJERCICIOS

CAPITULO 7

Sección III

1) $f: c = 1$ $g: c = 1$ $h: c = 3$ $t: c = 0$

2) $f: c_1 = \sqrt{\frac{-7 + \sqrt{65}}{2}}$ $c_2 = -\sqrt{\frac{-7 + \sqrt{65}}{2}}$

$g: c = \frac{1 + \sqrt{93}}{4}$ $h: c = \frac{3}{2}$ $t: c = \frac{8}{27}$

Sección IV

1) f crece si $x > \frac{1}{3}$ y decrece si $x < \frac{1}{3}$.

g decrece si $x > \frac{2}{\sqrt{3}} \vee x < \frac{-2}{\sqrt{3}}$ y crece si $-\frac{2}{\sqrt{3}} < x < \frac{2}{\sqrt{3}}$.

h decrece si $-4 < x < 1$ y crece si $x > 1 \vee x < -4$.

r crece si $x < \frac{3}{5} \vee x > 1$ y decrece si $\frac{3}{5} < x < 1$.

m crece si $x < 1 \vee x > 1$ s crece si $x > -3 \vee x < -3$

2) f crece en $\left(-\infty; \frac{8}{3}\right)$ y en $(4; +\infty)$ y decrece en $\left(\frac{8}{3}; 4\right)$.

g crece en $(-\infty; -1)$ y en $(1; +\infty)$ y decrece en $(-1; 1)$.

h crece en $\left(0; \frac{15}{4}\right)$ y decrece en $\left(\frac{15}{4}; 5\right)$.

3) $f: \forall x \in \mathbb{R}$ $g: x < \frac{3}{7} \vee x > 3$ $h: x > 2 \vee x < -2$

$m: x < 1 \vee x > 1$ $s: x < 3$

4) $f: x > 3$ $g: x < -1 \vee 0 < x < 1$ $h: -1 < x < \frac{1}{5}$

$r: x < 0$ $m: -3 < x < 2$ $s: x < -2 \vee x > -2$

Sección V

1) $f(0) = 5$ máximo local $g\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{49}{4}$ mínimo local h: no hay

2) $f(0)$ y $f(2)$ mínimos locales; $f(1)$ máximo local

$h(0)$ máximo local y $h(2)$ mínimo local

$s(0) = 3$ máximo local

3) $f\left(\frac{1}{4}\right)$ mínimo local $h\left(\frac{5}{2}\right)$ mínimo local

$s(-1) = 0$ mínimo local $s(2) = 0$ mínimo local $s(0)$ máximo local

$p\left(-\sqrt[5]{\frac{2}{15}}\right)$ máximo local $n(3) = -17$ mínimo local

$t\left(\frac{3}{5}\right)$ máximo local $t(1) = 0$ mínimo local $\ell(-1) = 3$ mínimo local

$m(-3) = \frac{56}{3}$ máximo local $m(2) = -\frac{13}{6}$ mínimo local

$g(1) = -2$ mínimo local $g(-2) = 25$ máximo local

$u(3) = -22$ mínimo local

$v(0) = 4$ máximo local $v(2) = -44$ mínimo local $v(-2) = -44$ máximo local

Sección VI

1) f: tipo 2: $c_1 = -4$, tipo 3: $c_2 = -6$, $c_3 = -1$

g: tipo 3: $c_1 = -3$, $c_2 = 4$

h: tipo 3: $c_1 = -4$, $c_2 = 0$

t: tipo 2: $c_1 = 0$, tipo 3: $c_2 = -1$, $c_3 = 1$

s: tipo 1: todos los puntos del intervalo $(-1; 1)$, tipo 2: $c_1 = -1$, $c_2 = 1$

m: tipo 1: $c_1 = \frac{1}{27}$, $c_2 = -\frac{1}{27}$, tipo 2: $c_3 = 0$

n: tipo 1: $c_1 = 1$ tipo 2: $c_2 = \sqrt{3}$, $c_3 = -\sqrt{3}$, $c_4 = -4$

r: tipo 1: $c_1 = -1$ tipo 2: $c_2 = -5$, $c_3 = 3$

2) 1) $f(0) = 5$ máximo absoluto, $g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{49}{4}$ mínimo absoluto, h: no hay

2) $f(0) = f(2) = 0$ mínimo absoluto, h: no hay, $s(0) = 3$ máximo absoluto

3) $f\left(\frac{1}{4}\right)$ mínimo absoluto, $h\left(\frac{5}{2}\right)$ mínimo absoluto, $r(0)$ máximo absoluto,

$s(-1) = s(2) = 0$ mínimo absoluto p: no hay $n(3) = -17$ mínimo absoluto t: no hay, ℓ: no hay, m: no hay, g: no hay, $u(3) = -22$ mínimo absoluto, $v(2) = v(-2) = -44$ mínimo absoluto

3) f(0) mínimo local y absoluto. No hay máximos locales ni absoluto

$g(0) = 1$ mínimo local y absoluto

r: no hay extremos locales en $[1; 9]$, r(1) máximo absoluto,

r(9) mínimo absoluto

$h(1 + \sqrt{2})$ mínimo local, $h(1 - \sqrt{2})$ máximo local

$p(-1)$ mínimo absoluto, p(1) máximo absoluto

q(3) máximo absoluto, $q\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ mínimo absoluto.

$v\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$ mínimo absoluto; no hay máximo absoluto

$s(3) = 0$ mínimo absoluto; no hay máximo absoluto

$t(-1) = -3$ mínimo absoluto; no hay máximo absoluto

u: no hay extremos absolutos

$m(-1)$ máximo absoluto, m(3) mínimo absoluto

n(0) máximo absoluto; no hay mínimo absoluto

$\ell(3) = 9$ máximo absoluto; no hay mínimo absoluto

$w(-2) = 1$ mínimo absoluto; no hay máximo absoluto

4) triángulo equilátero de lado 4

5) el radio de la base del cilindro es 4 y su altura 8

6) 50 y 50

7) cuadrado de lado 10

8) triángulo equilátero de lado $\sqrt{3}$

9) radio $= \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$

10) base 3 y altura 5

11) altura 50 y base 100

12) altura 3 y base 2

13) altura 2 y base 4

14) altura de la caja es $\frac{\ell}{6}$

15) $x = \sqrt[3]{2}$

16) radio 2

17) radio $5\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

18) radio $\frac{5\sqrt{6}}{3}$

19) radio $4\sqrt{2}$ y altura 16

20) radio $\frac{2}{4+\pi}$

22) $\ell = \frac{3}{4}p$

23) $\ell = \frac{3}{5}p$

24) altura $= \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

25) $\ell_1 = \frac{4a\sqrt{5}}{5}$; $\ell_2 = \frac{a\sqrt{5}}{5}$

26) $\frac{p}{2}$

27) lado $= 2a$

28) $16 - 2\sqrt{3}$

Sección VII

1) g: si $x < -\frac{5}{3}$; h: si $-1 < x < 0$ y $x > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$;

r: si $|x| > \frac{\sqrt{3}}{3}$; f: si $x > -\frac{\ln 3}{2}$

2) f: si $0 < x < 1$; g: si $x < 0$; h: si $x < -1$;

r: si $x < -\frac{5}{3}$; m: si $x < -\frac{1}{3}$; s: si $x < 0$; n: en $\mathbb{R}$.

3) f: (0; 0); g: (0; 0), $\left(\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$; $\left(-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$; h: no hay;

r: $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}; r\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)\right)$; s: $\left[\frac{7}{5}; s\left(\frac{7}{5}\right)\right]$; t: $\left(\sqrt{3}; \frac{1}{12}\right)$; $\left(-\sqrt{3}; \frac{1}{12}\right)$;

m: (1; 0), $\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{16}\right)$; p: $\left[-\frac{2}{3}; p\left(-\frac{2}{3}\right)\right]$; u: (0; 0), (1; 3);

w: (0; 5), (2; −11)

4) a) concavidad positiva en $(-\infty; -2)$ y en $(3; +\infty)$ y negativa en $(-2; 3)$

b) concavidad positiva en $(-\infty; 0)$ y en $(1; +\infty)$ y negativa en $(0; 1)$

c) concavidad positiva en $\mathbb{R}$

5) a) $\left(1; \frac{5}{6}\right)$, b) $y = \frac{5}{2}x - \frac{5}{3}$

Sección VIII

1) a) -1 b) $-\frac{5}{2}$ c) $\frac{1}{27}$ d) 0 e) 3 f) 0 g) 1 h) 0 i) ∞

2) a) 0 b) 1 c) $+\infty$ d) 5 e) 0 f) 0

3) a) -1 b) 2 c) -1 d) 0

4) a) $-\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) ∞ d) 0 e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{1}{3}$

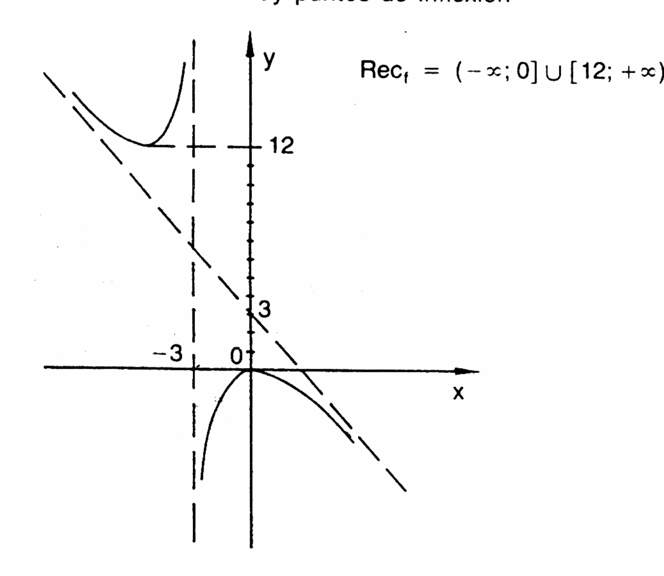
5) a) $\frac{1}{e}$ b) e^2 c) e^3 d) e e) e^{-1} f) e^{-3}

6) a) 1 b) 1 c) 1 d) 1 e) 1 f) e

7) a) 1 b) 1 c) e^3 d) 1 e) 1 f) 1

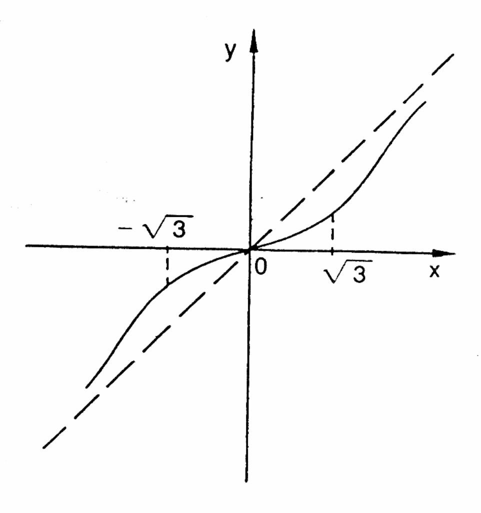
Sección IX

1) $D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$ A.V.: $x = -3$ A.O.: $y = 3 - x$
f crece en $(-6; -3)$ y en $(-3; 0)$ f decrece en $(0; +\infty)$ y en $(-\infty; -6)$
Concavidad positiva en $(-\infty; -3)$ y negativa en $(-3; +\infty)$
$f(-6) = 12$ mínimo local y $f(0) = 0$ máximo local.
No hay extremos absolutos. No hay puntos de inflexión



$Rec_f = (-\infty; 0] \cup [12; +\infty)$

2) $D_f = \mathbb{R}$ A.O.: $y = x$ $f'(x) = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$ $f''(x) = \frac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$
f crece en $\mathbb{R}$.
No hay extremos locales ni absolutos. Concavidad negativa en $(-\sqrt{3}; 0)$ y en $(\sqrt{3}; +\infty)$ y positiva en $(0; \sqrt{3})$ y en $(-\infty; -\sqrt{3})$.
$(0; 0)$, $\left(-\sqrt{3}; -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ y $\left(\sqrt{3}; \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ son puntos de inflexión
Función impar. $Rec_f = \mathbb{R}$

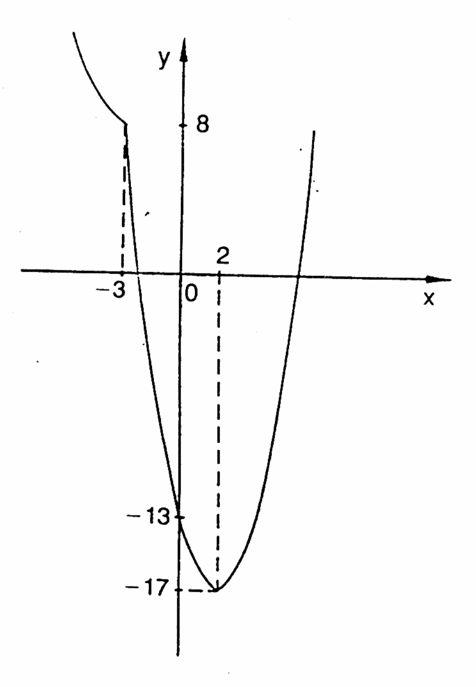


3) $D_f = \mathbb{R}$. Puntos críticos -3 y 2

$$f: x \to \begin{cases} x^2 + 4x + 11 & \text{si } x < -3 \\ x^2 - 4x - 13 & \text{si } x \geq -3 \end{cases}$$

f decrece en $(-\infty; 2)$ y crece en $(2; +\infty)$
$f(2) = -17$ mínimo local y absoluto
Concavidad positiva en $\mathbb{R}$

$Rec_f = \{y / y \geq -17\}$



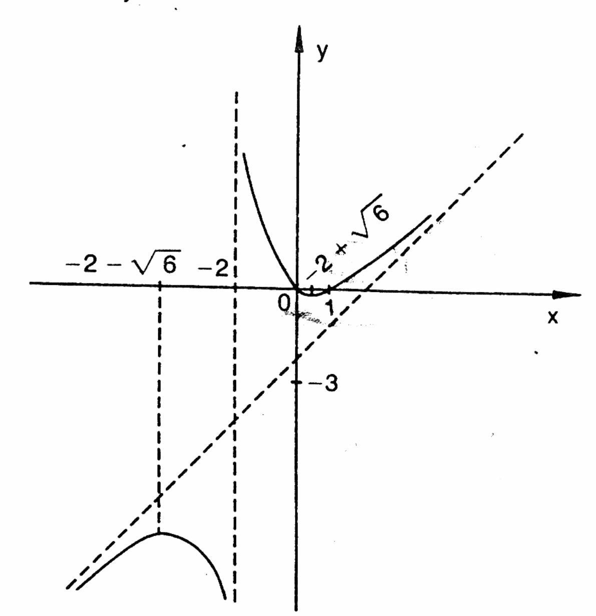
4) $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$ $x = -2$ A.V. $y = x - 3$ A. oblicua
Puntos críticos: $(-2 + \sqrt{6})$ y $(-2 - \sqrt{6})$ inters. eje x: (0; 0) y (1; 0).

$$f'(x) = \frac{x^2 + 4x - 2}{(x+2)^2} \quad f''(x) = \frac{12}{(x+2)^3}$$

f crece en $(-\infty; -2 - \sqrt{6})$ y en $(-2 + \sqrt{6}; +\infty)$
f decrece en $(-2 - \sqrt{6}; -2)$ y en $(-2; -2 + \sqrt{6})$
$f(-2 - \sqrt{6})$ máximo local
$f(-2 + \sqrt{6})$ mínimo local
Concavidad negativa en $(-\infty; -2)$
Concavidad positiva en $(-2; +\infty)$

$$Rec_f = \left(-\infty; -5 - 2\sqrt{6}\right] \cup \left[2\sqrt{6} - 5; +\infty\right)$$

No hay extremos absolutos:
$\lim_{-\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow$ no hay mínimo absoluto
$\lim_{+\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow$ no hay máximo absoluto



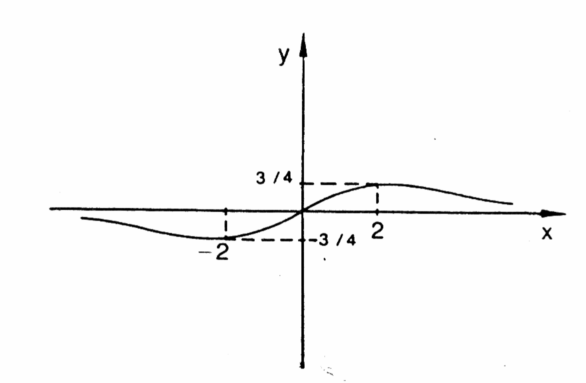
5) $D_f = \mathbb{R}$ $y = 0$ A.H. función impar $f'(x) = \frac{12 - 3x^2}{(x^2+4)^2}$

Puntos críticos: 2 y −2.
f crece en $(-2; 2)$ y decrece en $(-\infty; -2)$ y en $(2; +\infty)$
$f(-2) = -\frac{3}{4}$ es mínimo local y absoluto
$f(2) = \frac{3}{4}$ es máximo local y absoluto $f''(x) = \frac{6x(x^2 - 12)}{(x^2+4)^3}$

Concavidad positiva en $(-2\sqrt{3}; 0)$ y en $(2\sqrt{3}; +\infty)$
Concavidad negativa en $(-\infty; -2\sqrt{3})$ y en $(0; 2\sqrt{3})$.

Puntos de inflexión: (0; 0), $\left(-2\sqrt{3}; \frac{-3\sqrt{3}}{8}\right)$ y $\left(2\sqrt{3}; \frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$

$$Rec_f = \left[-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right]$$



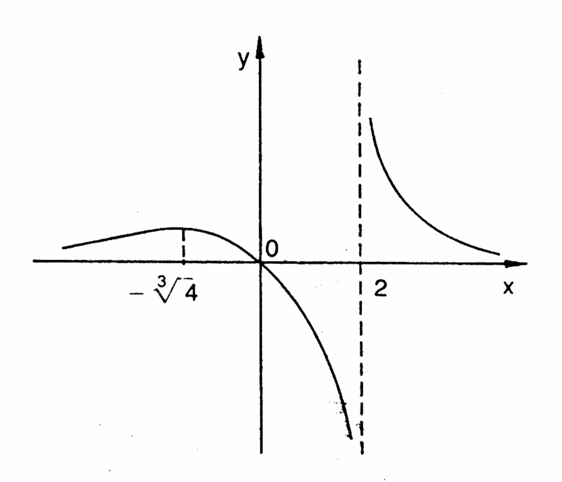
6) $D_f = R - \{2\}$ $x = 2$ A.V. $y = 0$ A.H.

$$f'(x) = \frac{-2x^3 - 8}{(x^3 - 8)^2}$$

Punto crítico: $-\sqrt[3]{4}$
f crece en $(-\infty; -\sqrt[3]{4})$
f decrece en $(-\sqrt[3]{4}; 2)$ y en $(2; +\infty)$
$f(-\sqrt[3]{4})$ máximo local

$f''(x) = \frac{6x^2(x^3 + 16)}{(x^3 - 8)^3}$ Concavidad positiva en $(-\infty; -2\sqrt[3]{2})$ y en $(2; +\infty)$
Concavidad negativa en $(-2\sqrt[3]{2}; 2)$

Punto de inflexión: $\left(-2\sqrt[3]{2}; \frac{\sqrt[3]{2}}{12}\right)$ $Rec_f = \mathbb{R}$



7) $f: x \to \begin{cases} -x^2 - x + 3 & \text{si } x < -4 \\ -x^2 + x + 11 & \text{si } -4 \leq x < -\sqrt{5} \\ x^2 + x + 1 & \text{si } -\sqrt{5} \leq x < \sqrt{5} \\ -x^2 + x + 11 & \text{si } x \geq \sqrt{5} \end{cases}$

Puntos críticos: $-4, \sqrt{5}, -\sqrt{5}$ (no $\exists f'$)

$-\frac{1}{2}$ ($f' = 0$)

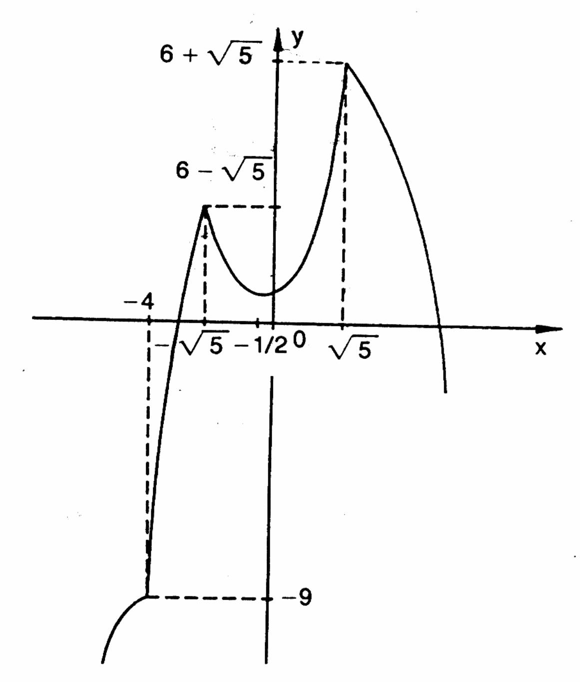
$f\left(-\frac{1}{2}\right)$ mínimo local

$f(\sqrt{5})$ máximo local y absoluto

$f(-\sqrt{5})$ máximo local

No existe mínimo absoluto, pues $\lim_x f(x) = -\infty$

$Rec_f = (-\infty; 6 + \sqrt{5}]$



8) $f: x \to \begin{cases} x^2 - x - 2 & \text{si } x < -3 \\ -x^2 - x + 16 & \text{si } -3 \leq x < 3 \\ x^2 - x - 2 & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ x^2 + x - 12 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$

Puntos críticos: $-3, 3, 5$ y $-\frac{1}{2}$

$f(-3) = 10$ mínimo local

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{65}{4}$ máximo local

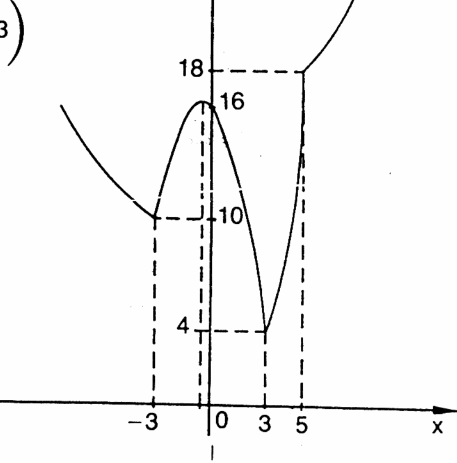
$f(3) = 4$ mínimo local y absoluto

No existe máximo absoluto, pues $\lim_x f(x) = +\infty$

f crece en $\left(-3; -\frac{1}{2}\right)$ y en $(3; +\infty)$

f decrece en $(-\infty; -3)$ y en $\left(-\frac{1}{2}; 3\right)$

$Rec_f = [4; +\infty)$



9) $x = 0$ A.V. int. eje x: $\left(-\frac{\sqrt[3]{9}}{3}; 0\right)$

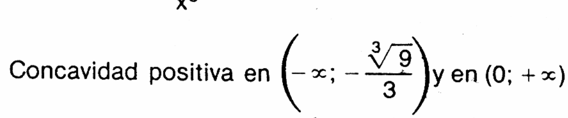
$f'(x) = \frac{6x^3 - 1}{x^2}$

f crece en $\left(\frac{\sqrt[3]{36}}{6}; +\infty\right)$

f decrece en $(-\infty; 0)$ y en $\left(0; \frac{\sqrt[3]{36}}{6}\right)$

$f\left(\frac{\sqrt[3]{36}}{6}\right)$ mínimo local

$f''(x) = \frac{6x^3 + 2}{x^3}$



Concavidad positiva en $\left(-\infty; -\frac{\sqrt[3]{9}}{3}\right)$ y en $(0; +\infty)$

Concavidad negativa en $\left(-\frac{\sqrt[3]{9}}{3}; 0\right)$ $\left(-\frac{\sqrt[3]{9}}{3}; 0\right)$ punto de inflexión

$\lim_{-\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow$ no $\exists$ máximo absoluto (también $\lim_{0^+} f(x) = +\infty$)

$\lim_{0^-} f(x) = -\infty \Rightarrow$ no $\exists$ mínimo absoluto $Rec_f = \mathbb{R}$

10)

$$f: x \to \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x} & \text{si } |x| \geq 2 \\ \dfrac{4 - x^2}{x} & \text{si } |x| < 2 \wedge x \neq 0 \end{cases}$$

Puntos críticos: 2 y −2, donde no $\exists f'$

Función impar

f crece en $(-\infty; -2)$ y en $(2; +\infty)$

f decrece en $(-2; 0)$ y en $(0; 2)$

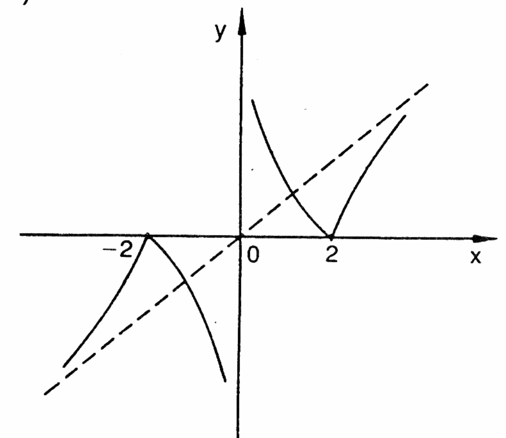
f (-2) máximo local y f(2) mínimo local

Concavidad negativa en $(2; +\infty)$ y en $(-2; 0)$

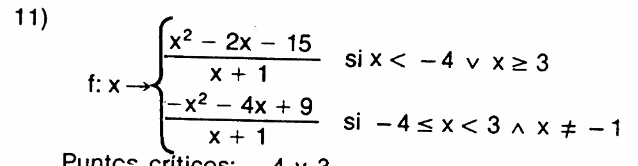
Concavidad positiva en $(-\infty; -2)$ y en $(0; 2)$

No existen extremos absolutos

((2; 0) y (−2; 0) no son puntos de inflexión, pues en ellos no hay recta tangente a la curva)



11)



$$f: x \to \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x - 15}{x + 1} & \text{si } x < -4 \vee x \geq 3 \\ \dfrac{-x^2 - 4x + 9}{x + 1} & \text{si } -4 \leq x < 3 \wedge x \neq -1 \end{cases}$$

Puntos críticos: −4 y 3

f crece en $(-\infty; -4)$ y en $(3; +\infty)$

f decrece en $(-4; -1)$ y en $(-1; 3)$

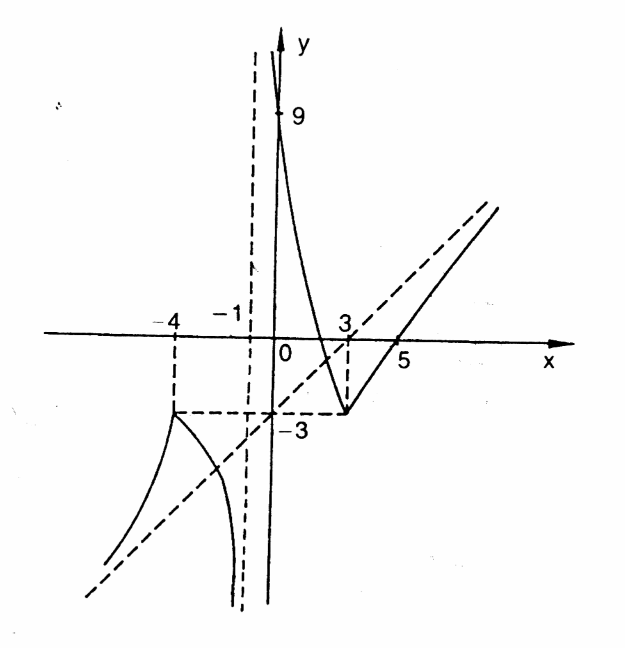
$f(-4) = -3$ máximo local $f(3) = -3$ mínimo local

Concavidad positiva en $(-\infty; -4)$ y en $(-1; 3)$

Concavidad negativa en $(3; +\infty)$ y en $(-4; -1)$

No existen extremos absolutos

$\text{Rec}_f = \mathbf{R}$



8. FORMULA DE TAYLOR

Los polinomios en una variable, con coeficientes reales, determinan funciones simples que tienen la propiedad de ser derivables. Si el polinomio es de grado n, admite n polinomios, no idénticamente nulos, que son sus derivadas sucesivas.

En muchas ocasiones resulta conveniente aproximar una función derivable no polinómica mediante un polinomio particularmente elegido, y precisar la aproximación o error que se comete al reemplazar el valor de la función en un punto cualquiera x de su dominio por el valor, en el mismo punto, del polinomio seleccionado.

Es decir, si f es la función considerada y p el polinomio que la reemplaza, interesa conocer, para el número x del dominio, el valor de la diferencia

$$r(x) = f(x) - p(x).$$

Si una función f tiene n derivadas sucesivas finitas en un punto c, existe y es único el polinomio de grado n cuyas derivadas sucesivas coinciden con las derivadas de la función f. Para comprobarlo consideraremos previamente la expresión de los coeficientes de un polinomio cualquiera utilizando sus derivadas sucesivas.

I. Polinomio de Taylor*

Sea p la función polinómica de grado n y coeficientes reales $A_0, A_1, A_2, \ldots A_n$.

Es decir, $p: x \rightarrow A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots\ldots + A_nx^n$.

Si c es un número real cualquiera, siempre es posible expresar el polinomio p según las potencias del binomio (x − c), para lo cual basta efectuar las divisiones sucesivas por dicho binomio.

Se obtiene así una expresión del tipo siguiente:

$$p: x \rightarrow a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \ldots + a_n(x-c)^n.$$

O sea, $\forall x \in \mathbb{R}: p(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \ldots +$

$$+ a_n(x-c)^n \quad (1).$$

* Brooks Taylor (1685-1731). Su obra más importante, Introducción al cálculo de diferencias finitas, queda resumida en la famosa fórmula que lleva su nombre. Cultivó además física, música, pintura y filosofía.

Calcularemos sus n derivadas sucesivas:

$$\forall x: p'(x) = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + \ldots\ldots + n\,a_n(x-c)^{n-1}.$$

$$p''(x) = 2a_2 + 3!\,a_3(x-c) + \ldots + n(n-1)\,a_n(x-c)^{n-2}$$
$$p'''(x) = 3!\,a_3 + \ldots\ldots + n(n-1)(n-2)\,a_n(x-c)^{n-3}$$

. . . .

$p^{(n)}(x) = n!\,a_n$ (como puede demostrarse por inducción).

En el punto c las funciones determinadas por las expresiones anteriores alcanzan los valores siguientes:

$$p(c) = a_0,\quad p'(c) = a_1,\quad p''(c) = 2!\,a_2,\quad p'''(c) = 3!\,a_3, \ldots,\quad p^{(n)}(c) = n!\,a_n.$$

Por lo tanto resulta:

$$a_0 = p(c),\quad a_1 = p'(c),\quad a_2 = \frac{p''(c)}{2!},\quad a_3 = \frac{p'''(c)}{3!}, \ldots a_n = \frac{p^{(n)}(c)}{n!}.$$

Reemplazando en (1) es:

$$p(x) = p(c) + p'(c)(x-c) + \frac{p''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots\ldots + \frac{p^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n,$$

que recibe el nombre de *polinomio de Taylor*.

Si se considera $f^{(0)}(x) = f(x)$ y se recuerda que $0! = 1$, la expresión anterior puede condensarse de la siguiente manera:

$$p(x) = \sum_{h=0}^{n} \frac{p^{(h)}(c)\,(x-c)^h}{h!}.$$

Si se elige, en especial, $c = 0$, el polinomio queda expresado en la forma:

$$p(x) = p(0) + p'(0)x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \ldots\ldots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

o $p(x) = \sum_{h=0}^{n} \frac{p^{(h)}(0)\,x^h}{h!}$,

que recibe el nombre de *polinomio de Maclaurin**.

Aplicación

La fórmula de Taylor permite expresar un polinomio según las potencias del binomio (x − c) sin necesidad de efectuar las divisiones sucesivas. Para ello basta hallar su valor y el de sus derivadas en el punto c y aplicar la fórmula.

Por ejemplo, se desea expresar el polinomio.

$$p(x) = x^4 - 7x^3 + x^2 - 2x + 1$$

según potencias del binomio (x + 1).

* Colin Maclaurin (1698-1746). Fue discípulo de Newton y profesor en la Universidad de Edimburgo.

$$p'(x) = 4x^3 - 21x^2 + 2x - 2 \Rightarrow p'(-1) = -29$$
$$p''(x) = 12x^2 - 42x + 2 \Rightarrow p''(-1) = 56$$
$$p'''(x) = 24x - 42 \Rightarrow p'''(-1) = -66$$
$$p^{IV}(x) = 24 \Rightarrow p^{IV}(-1) = 24$$

Además, $p(-1) = 12$.
Luego,

$$p(x) = 12 - 29(x+1) + \frac{56}{2!}(x+1)^2 - \frac{66}{3!}(x+1)^3 + \frac{24}{4!}(x+1)^4$$

$$p(x) = 12 - 29(x+1) + 28(x+1)^2 - 11(x+1)^3 + (x+1)^4$$

EJERCICIOS

1) Escribir $p(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 6x - 6$ según potencias de $(x+1)$
 a) por divisiones sucesivas; b) por fórmula de Taylor.
2) Escribir $p(x) = 3x^3 - 13x^2 + 14x + 7$ según pòtencias de $(x-2)$ aplicando la fórmula de Taylor.

II. Fórmula de Taylor

Sea f una función con n derivadas sucesivas finitas en cualquier punto de un intervalo I. Si $c \in I$, dichas derivadas finitas en c son:

$$f'(c), f''(c), \ldots\ldots, f^{(n)}(c).$$

El polinomio

$$p(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

es el polinomio de Taylor correspondiente a la función f en el punto c. Sus n derivadas sucesivas coinciden, en el punto c, con las derivadas de la función f:

$$p'(c) = f'(c), \quad p''(c) = f''(c) \ldots p^{(n)}(c) = f^{(n)}(c) \text{ y, además, } p(c) = f(c).$$

Consideremos, por ejemplo, la función $f: x \rightarrow e^x$.

Sus derivadas sucesivas son $\forall x$: $f'(x) = e^x = f''(x) = \ldots = f^{(n)}(x)$.
El polinomio de Taylor correspondiente a f en el punto $c = 1$. es:

$$p(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n \qquad (1),$$

y en este caso, $f(1) = f'(1) = \ldots. = f^{(n)}(1) = e^1 = e$.
Luego, reemplazando en (1), es:

$$p(x) = e + e(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \ldots + \frac{e}{n!}(x-1)^n$$

o $$p(x) = \sum_{h=0}^{n} \frac{e}{h!}(x-1)^h.$$

Interesa conocer el valor de $r(x) = f(x) - p(x)$,

$$\text{o sea, de} \quad r(x) = e^x - \sum_{h=0}^{n} \frac{e}{h!}(x-1)^h$$

en un punto x perteneciente a un entorno del punto $c = 1$.

El valor r(x) se llama *resto de Taylor* o *término complementario,* y su valor depende, para cada x, de h.

Si $h = 1$, es $r(x) = e^x - [e + e(x-1)] = e^x - ex$.

Si $h = 2$, es $r(x) = e^x - \left[e + e(x-1) + \frac{e(x-1)^2}{2}\right] =$

$$= e^x - e\,x - \frac{e}{2}(x^2 - 2x + 1) =$$

$$= e^x - \frac{e}{2} - \frac{e\,x^2}{2}.$$

Por lo tanto, para x próximo a 1, el resto considerado se hace menor al aumentar el grado del polinomio que aproxima la función.

Si $h = 1$, es decir, si se considera el polinomio de Taylor de primer grado, la aproximación obtenida se llama aproximación lineal de la función en el punto elegido. Si $h = 2$, es decir, si el polinomio es de segundo grado, la aproximación es cuadrática, etcétera.

Hallaremos, en general, la expresión del resto de Taylor mediante el siguiente teorema.

Teorema

Sea f una función con derivada finita de orden $(n+1)$ en todos los puntos de un entorno del punto c. Si x es un punto cualquiera de dicho entorno, entonces existe un punto z entre x y c tal que:

$$f(x) = p_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1},$$

donde p_n es el polinomio de Taylor, de grado n, correspondiente a f en el punto c.
O sea,

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

Demostraremos el teorema para un punto x ubicado en el semientorno a derecha del punto c. Una demostración análoga puede hacerse para un punto x en el semientorno a izquierda.

Demostración

Sea x un punto del entorno considerado / $x > c$. El punto x es un punto fijo para toda la demostración.

$c-\delta \quad c \quad z \quad x \quad c+\delta$

Definiremos en el intervalo $[c; x]$ dos funciones auxiliares F y G de la siguiente manera:

$$\forall t \in [c; x]: F(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - f''(t)\frac{(x-t)^2}{2!} - \ldots - f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}$$

y $\qquad G(t) = (x-t)^{n+1}$

Las funciones F y G satisfacen la hipótesis del teorema generalizado del valor medio (pág. 250), y por lo tanto, $\exists z \in (c; x)$ /

$$\frac{F(c) - F(x)}{G(c) - G(x)} = \frac{F'(z)}{G'(z)} \qquad (1).$$

Ahora bien, $F(x) = 0$ y $G(x) = 0$, como puede observarse haciendo el reemplazo de t por x en las expresiones que definen a las funciones F y G.

Al calcular F' debemos tener en cuenta que $f'(x) = 0$, pues f(x) es una constante.

Resulta: $F'(t) = -f'(t) - f''(t)(x-t) + f'(t) - f'''(t)\frac{(x-t)^2}{2!} + f''(t)(x-t) -$

$$- \ldots\ldots - f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}$$

Cancelando términos es: $F'(t) = -f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}$.

Por lo tanto $\qquad F'(z) = -f^{(n+1)}(z)\frac{(x-z)^n}{n!}$.

Por otra parte, $G'(t) = -(n+1)(x-t)^n$ y $G'(z) = -(n+1)(x-z)^n$.
Reemplazando en (1) es:

$$\frac{F(c)}{G(c)} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(z)(x-z)^n}{n!}}{-(n+1)(x-z)^n} = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}.$$

Luego, $F(c) = G(c)\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}$.

Sustituyendo en la expresión anterior los valores F(c) y G(c), resulta:

$$f(x) - f(c) - f'(c)(x-c) - \ldots - f^{(n)}(c)\frac{(x-c)^n}{n!} = (x-c)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}.$$

Pasando términos al segundo miembro se llega a la tesis:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \ldots + f^{(n)}(c)\frac{(x-c)^n}{n!} + f^{(n+1)}(z)\frac{(x-c)^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

La expresión anterior es la *fórmula de Taylor*. El término complementario tiene la misma expresión formal que los términos del polinomio de Taylor, pero el valor de la derivada de orden (n + 1) no se calcula en el punto c sino en un punto z que está ubicado entre c y x.

Si $c = 0$ se obtiene la fórmula de Maclaurin:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + f^{(n+1)}(z)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

para z entre 0 y x, que puede indicarse $z = hx$ si $0 < h < 1$.

♦ *Nota:* Utilizando el símbolo de sumatoria, pueden precisarse algunas expresiones del teorema anterior.

$$F(t) = f(x) - \sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(t)(x-t)^i}{i!}$$

Derivando, es

$$F'(t) = -\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i+1)}(t)(x-t)^i}{i!} - \sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(t)(x-t)^{i-1}i(-1)}{i!}.$$

Para poner en evidencia que las dos sumatorias de la última expresión coinciden, salvo en un término, puede hacerse un cambio de notación en la primera sumatoria haciendo $j = i + 1$ y considerar en la segunda sumatoria que el término correspondiente a $i = 0$ es nulo.

Queda:

$$F'(t) = -\sum_{j=1}^{n+1}\frac{f^{(j)}(t)(x-t)^{j-1}}{(j-1)!} + \sum_{i=1}^{n} f^{(i)}(t)(x-t)^{i-1}\frac{i}{i!}$$

$$F'(t) = -\sum_{j=1}^{n+1}\frac{f^{(j)}(t)(x-t)^{j-1}}{(j-1)!} + \sum_{i=1}^{n}\frac{f^{(i)}(t)(x-t)^{i-1}}{(i-1)!}.$$

Desdoblando la primera sumatoria resulta:

$$F'(t) = -\sum_{j=1}^{n}\frac{f^{(j)}(t)(x-t)^{j-1}}{(j-1)!} - \frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!} + \sum_{j=1}^{n}\frac{f^{(j)}(t)(x-t)^{j-1}}{(j-1)!}.$$

Cancelando, queda: $F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!}$.

EJERCICIOS

1) Fórmula de Maclaurin para la función $f: x \to e^x$.
2) Aproximar la función seno mediante un polinomio de quinto grado en el punto $c = \frac{\pi}{2}$.
3) Aproximar la función coseno mediante un polinomio de sexto grado en $c = 0$.

4) Fórmula de Taylor en los siguientes casos:

$f: x \to \ln x \quad n = 5 \quad c = 1$

$g: x \to \text{arc tg } x \quad n = 4 \quad c = 1$

$h: x \to \text{cosec } x \quad n = 3 \quad c = \frac{\pi}{4}$

5) Fórmula de Maclaurin en los siguientes casos:

$f: x \to \text{sen } x \quad n = 7$ $\qquad h: x \to \sec x \quad n = 3$

$g: x \to \cos x \quad n = 5$ $\qquad t: x \to e^{-x} \quad n = 4$

III. Aproximación de funciones

El cálculo del valor de un polinomio en un punto cualquiera x, ubicado en un entorno de un punto c, donde se conoce el valor del mismo y de sus derivadas sucesivas, es un problema sencillo. La fórmula de Taylor permite utilizar este cálculo simple para aproximar funciones que no son polinomios, mediante el polinomio de Taylor correspondiente. La aproximación es más precisa cuanto mayor sea el grado del polinomio.

El término complementario, o resto de Taylor, permite estimar la aproximación obtenida, ya que es la diferencia entre el valor de la función en el punto considerado y el polinomio correspondiente.

O sea, $r(x) = f(x) - p(x)$ y también $|r(x)| = |f(x) - p(x)|$.

Si se halla un número positivo ϵ tal que $|r(x)| < \epsilon$, entonces $|f(x) - p(x)| < \epsilon$.

Es decir, si se considera como valor de la función f en el punto x el valor numérico, en dicho punto x, del polinomio p, el error cometido es, en valor absoluto, menor que el número ϵ.

Ejemplo 1

Aproximar $f(x) = e^{2x}$ mediante un polinomio de grado 3 y acotar el error que se comete para $x = 0{,}1$.

Utilizamos la fórmula de Maclaurin.

Para ello:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{2x} \Rightarrow f(0) = 1 \\ f'(x) &= -2e^{2x} \Rightarrow f'(0) = -2 \\ f''(x) &= 4e^{2x} \Rightarrow f''(0) = 4 \\ f'''(x) &= 8e^{2x} \Rightarrow f'''(0) = -8 \\ f^{IV}(x) &= 16e^{2x} \Rightarrow f^{IV}(z) = 16e^{2z} \text{ con z entre 0 y x.} \end{aligned}$$

$$\text{Luego, } e^{2x} = 1 - 2x + 4\frac{x^2}{2!} - 8\frac{x^3}{3!} + 16e^{2z}\frac{x^4}{4!};$$

$$e^{2x} \simeq 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3.$$

El error de la aproximación elegida está dado por el término complementario $r_4(x) = \frac{2}{3}e^{-2z}x^4$.

$$\text{Para } x = 0{,}1 \text{ es } \epsilon = \frac{2}{3}e^{-2z}(0{,}1)^4 \text{ con } 0 < z < 0{,}1.$$

$$\text{O bien } \epsilon = \frac{2}{3}\frac{10^{-4}}{e^{2z}} \wedge 0 < z < 10^{-1}.$$

Para acotar el error debemos elegir una cota inferior para e^{2z}, ya que se encuentra en el denominador y el valor aumenta al disminuir éste. Para $z > 0$ es $e^{2z} > 1$.

Luego, al reemplazar e^{2z} por 1, resulta:

$$\epsilon < \frac{2}{3}10^{-4}.$$

Como el error suele estimarse según potencias de 10, para encontrar cifras exactas afirmamos que

$$\epsilon < \frac{2}{3}10^{-4} \Rightarrow \epsilon < 10^{-4}.$$

$$\text{Si calculamos } e^{-2(0,1)} \simeq 1 - 0{,}2 + 0{,}02 - \frac{4}{3}0{,}001,$$

el valor $e^{-\frac{1}{5}} \simeq 0{,}818667$ admite un error menor que 10^{-4} y tiene, por lo tanto, cuatro cifras decimales exactas.

Es decir, $e^{-\frac{1}{5}} = 0{,}8186$.

Ejemplo 2

Aproximar la función logaritmo natural mediante un polinomio de cuarto grado.
Consideremos la fórmula de Taylor con un polinomio de cuarto grado:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \frac{f^{IV}(c)}{4!}(x-c)^4 + \frac{f^{V}(z)}{5!}(x-c)^5 \quad (\text{z entre c y x}).$$

Luego, $f(x) = \ln x$ $\qquad$ Si $c = 1$, es $f(1) = 0$.

$f'(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad f'(1) = 1$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\qquad f''(1) = -1$

$f'''(x) = \frac{2}{x^3}$ $\qquad f'''(1) = 2$

$f^{IV}(x) = -\frac{3!}{x^4}$ $\qquad f^{IV}(1) = -3!$

$$f^{v}(x) = \frac{4!}{x^5} \qquad f^{v}(z) = \frac{4!}{z^5} \text{ (z entre 1 y x).}$$

Por lo tanto,

$$p(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{2(x-1)^3}{3!} - \frac{3!(x-1)^4}{4!}.$$

O sea, $p(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4}.$

$$r_5(x) = \frac{4!(x-1)^5}{z^5 \cdot 5!} \Rightarrow r_5(x) = \frac{(x-1)^5}{5} \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^5 \qquad (1)$$

para z entre 1 y x.

Si se elige x en el intervalo (1; 1,1), es $1 < z < 1{,}1$ y $\frac{1}{z} < 1$.

Considerando los valores anteriores, de (1) se obtiene:

$$|r_5(x)| < \frac{(0{,}1)^5}{5} \Rightarrow |r_5(x)| < 10^{-5}.$$

Luego, $\ln x \simeq (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4}$

con $\epsilon < 10^{-5}$ si $1 < x < 1{,}1$.

Por ejemplo, si elegimos $x = 1{,}01$, resulta:

$\ln 1{,}01 \simeq 0{,}0099503$ con 5 cifras decimales exactas,

es decir,

$\ln 1{,}01 = 0{,}00995.$

EJERCICIOS

1) Aproximar las siguientes funciones mediante polinomios de grado n, acotando el error que se comete al despreciar el término complementario:

$f: x \to \cos x \quad n = 4 \quad 0 \leq x \leq 0{,}1$

$g: x \to \text{sen } x \quad n = 5 \quad 0 \leq x \leq 0{,}2$

$h: x \to e^x \quad n = 4 \quad 0 \leq x \leq 0{,}5$

2) Hallar $\sqrt{e}$ con 5 cifras decimales exactas.

3) Hallar $\cos \frac{\pi}{6}$ con 4 cifras decimales exactas.

4) Hallar sen 0,5 con 5 cifras decimales exactas.

5) Siendo $\ln 3 = 1{,}0986$, hallar $\ln 4$ con 4 cifras decimales exactas.

IV. Generalización del criterio para determinar extremos

En el capítulo anterior se dio un criterio para ubicar máximos y mínimos locales en puntos interiores al dominio donde se anula la derivada primera (puntos críticos del tipo 1), que depende del signo de la derivada segunda en dicho punto.

Ese criterio puede volver a demostrarse utilizando la fórmula de Taylor.

Por la condición necesaria para existencia de extremos locales investigamos el punto c, donde $f'(c) = 0$.

La fórmula, en ese caso, es:

$$f(x) = f(c) + f''(c)\frac{(x-c)^2}{2!} + f'''(c)\frac{(x-c)^3}{3!} + \ldots + r_n(x).$$

Si $f''(c) \neq 0$, consideramos como resto al término de segundo grado y escribimos:

$$f(x) - f(c) = f''(z)\frac{(x-c)^2}{2} \qquad (1).$$

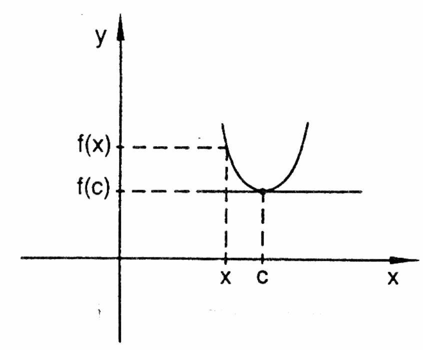
Ahora bien, el signo del segundo miembro depende del signo de $f''(z)$, pues

$$\forall x: \frac{(x-c)^2}{2} > 0 \text{ si } x \neq c.$$

Si $f''(c) > 0$, como f'' es continua por existir f''', en un entorno conveniente también es $f''(x) > 0$. En efecto, por una propiedad de las funciones continuas (pág. 174), si $f''(c) > 0$, entonces existe un entorno de c donde f'' tiene el mismo signo que su límite. Eligiendo x en dicho entorno, como z está entre c y x, resulta $f''(z) > 0$.

Luego, en (1) es $f(x) - f(c) > 0$.

Es decir, para cualquier x perteneciente al entorno elegido de c, el valor f(x) es mayor que f(c), lo que asegura que f(c) es el menor valor de f en el entorno, o sea, f(c) es mínimo local.



Análogamente, se prueba que si $f''(c) < 0$, entonces f(c) es máximo local.

O sea, llegamos nuevamente al criterio ya demostrado en la página 258.

Pero dicho criterio no ofrece conclusiones para el caso en que la derivada segunda se anule en el punto considerado.

En ese caso podemos extender el desarrollo de Taylor con n = 3. Como $f'(c) = f''(c) = 0$, obtenemos:

$$f(x) - f(c) = f'''(z)\frac{(x-c)^3}{3!}.$$

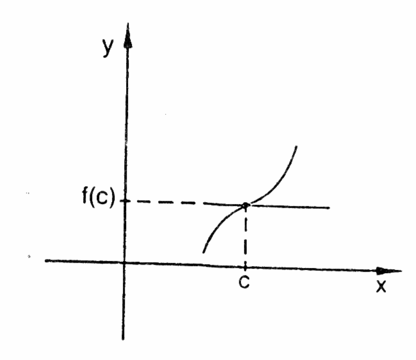
Veremos qué sucede si $f'''(c) \neq 0$.

Suponiendo que $f'''(c) > 0$, por la propiedad mencionada de las funciones continuas, es $f'''(z) > 0$ en un entorno de c. Pero $(x - c)^3$ cambia de signo según x se encuentre a izquierda o a derecha de c.

Por lo tanto,

$$f(x) - f(c) = f'''(z)\,\frac{(x-c)^3}{3!}$$

es positivo si $x > c$ y negativo si $x < c$. O sea, f(c) no es extremo local.



Algo similar sucede si $f'''(c) < 0$.

Por otra parte, como $f''(c) = 0$ es condición necesaria para existencia de punto de inflexión, y la recta tangente atraviesa a la curva en (c; f(c)), este punto es de inflexión (con tangente horizontal).

Si $f'''(c) = 0$, extendemos el desarrollo de Taylor con $n = 4$. Con el mismo razonamiento hecho en la primera parte, si $f^{IV}(c) > 0$, entonces f(c) es mínimo local, y si $f^{IV}(c) < 0$, entonces f(c) es máximo local.

Generalizando las demostraciones anteriores, vemos que si $f'(c) = f''(c) = f'''(c) = \ldots\ldots f^{(n-1)}(c) = 0 \wedge f^{(n)}(c) \neq 0$, entonces habrá extremo local si n es par y habrá inflexión, en un punto donde la recta tangente es horizontal, si n es impar.

O sea, si c es un punto interior al dominio de f y la función f tiene n derivadas finitas continuas en c, que son nulas hasta la orden (n – 1) inclusive, y $f^{(n)}(c) \neq 0$, resulta:

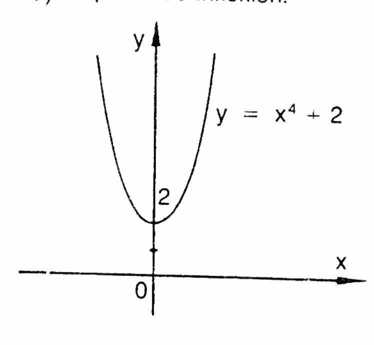
si n es par y $f^{(n)}(c) > 0$, entonces f(c) es mínimo local;

si n es par y $f^{(n)}(c) < 0$, entonces f(c) es máximo local.

Finalmente, si n es impar, entonces (c; f(c)) es punto de inflexión.

Ejemplo 1

Sea $f: x \rightarrow x^4 + 2$.



$\forall x$:

$f'(x) = 4x^3$ $f'(0) = 0$

$f''(x) = 12x^2$ $f''(0) = 0$

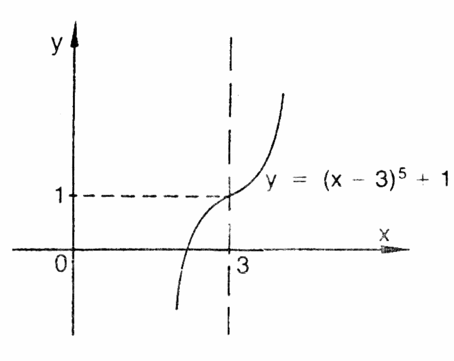
$f'''(x) = 24x$ $f'''(0) = 0$

$f^{IV}(x) = 24$ $f^{IV}(0) = 24$

Como el orden de la primera derivada que no se anula en el origen es cuatro, número *par*, y dicha derivada es *positiva*, la función tiene un mínimo local en $x = 0$. Es decir, $f(0) = 2$ es un mínimo local.

Ejemplo 2

Sea $f: x \rightarrow (x-3)^5 + 1$.



$\forall x$:

$f'(x) = 5(x-3)^4$ $f'(3) = 0$

$f''(x) = 20(x-3)^3$ $f''(3) = 0$

$f'''(x) = 60(x-3)^2$ $f'''(3) = 0$

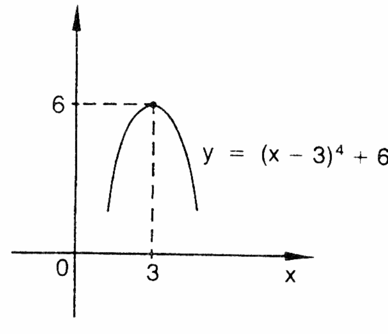
$f^{IV}(x) = 120(x-3)$ $f^{IV}(3) = 0$

$f^{V}(x) = 120$ $f^{V}(3) = 120$

La primera derivada no nula en el punto 3 es la derivada quinta. Luego, hay inflexión en el punto (3; 1).

Ejemplo 3

Sea $f: x \rightarrow -(x-3)^4 + 6$.



$f'(x) = -4(x-3)^3$ $f'(3) = 0$

$f''(x) = -12(x-3)^2$ $f''(3) = 0$

$f'''(x) = -24(x-3)$ $f'''(3) = 0$

$f^{IV}(x) = -24$ $f^{IV}(3) = -24$

$n = 4$, número par $\wedge\ f^{(n)}(3) < 0 \Rightarrow f(3)$ máximo local.

EJERCICIOS

1) Hallar extremos locales, si existen, de las siguientes funciones:

$f: x \to x^4 - 1$ $\qquad t: x \to (x-2)^4 + 5$

$g: x \to -x^6 + 3$ $\qquad s: x \to \operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x$

$h: x \to (x+5)^3 - 3$ $\qquad m: x \to 7x^5 - 5$

2) Estudiar el comportamiento de f en el origen si

$f: x \to x^5 \cos 2x + (1 - \cos x)x^2$.

3) Idem para $f: x \to \operatorname{tg} x - x - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{5}$.

V. Generalización del criterio para determinar la concavidad

Consideremos nuevamente la fórmula de Taylor con término complementario de segundo grado:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + f''(z)\frac{(x-c)^2}{2}.$$

O sea, $r_2(x) = f''(z)\dfrac{(x-c)^2}{2}$.

Según se ha visto en la página 217), la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(c; f(c))$ es:

$$t(x) = f(c) + f'(c)(x-c).$$

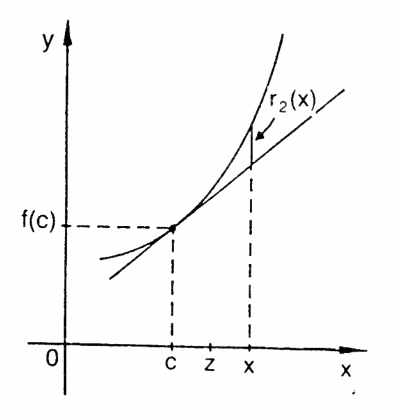
Por lo tanto,

$$f(x) - [f(c) + f'(c)(x-c)] = f''(z)\frac{(x-c)^2}{2} \Leftrightarrow f(x) - t(x) = f''(z)\frac{(x-c)^2}{2}.$$

Por consideraciones ya hechas en la sección anterior, en un entorno del punto c:

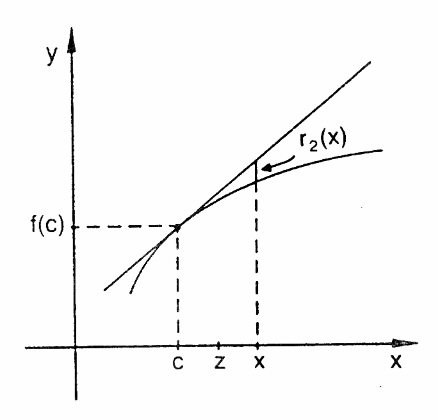
$$f''(c) > 0 \Rightarrow f''(z) > 0 \Rightarrow f''(z)\frac{(x-c)^2}{2} > 0 \Rightarrow f(x) - t(x) > 0.$$

Esto significa que la curva está por encima de la recta tangente en el entorno elegido.



Se llega así a la misma conclusión obtenida anteriormente (pág. 272): si $f''(c) > 0$, entonces existe un entorno de c donde la curva está ubicada encima de la recta tangente, o sea, es cóncava hacia arriba.

Análogamente, si $f''(c) < 0$, el gráfico es cóncavo hacia abajo.



La fórmula de Taylor permite generalizar la conclusión anterior ya conocida para el caso en que se anule la segunda derivada en el punto c.

En efecto, basta extender el desarrollo hasta la primera derivada que no se anule en dicho punto.

Si $f''(c) = \ldots\ldots = f^{(n-1)}(c) = 0 \wedge f^{(n)}(c) \neq 0$, entonces la diferencia entre la ordenada de la curva y la de la recta tangente está dada por el término complementario:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n)}(z)\,(x-c)^n}{n!}.$$

Si la derivada enésima es continua, el signo de $f^{(n)}(z)$ será el mismo de $f^{(n)}(c)$, para x en un entorno conveniente.

Si n es impar, el signo de $r_n(x)$ depende de la ubicación del punto x, a derecha o a izquierda del punto c.

En efecto, $(x-c)^n$ es positivo para x a derecha de c y negativo para x a izquierda de c, y, cualquiera que sea el signo de $f^{(n)}(c)$, el término $r_n(x)$ cambia de signo para x ubicado a derecha o a izquierda de c. Por lo tanto, de un lado la curva está por encima de la recta tangente y del otro por debajo de ella, es decir, en el punto $(c; f(c))$ la curva cambia el sentido de su concavidad. Se trata, entonces, de un punto de inflexión. En este caso, si $f'(c) \neq 0$, entonces en el punto de inflexión la recta tangente es oblicua.

Si n es par, en cambio, el signo de $r_n(x)$ depende del signo de $f^{(n)}(c)$, pues

$$\forall x: \frac{(x-c)^n}{n!} > 0 \text{ si } x \neq c.$$

Es decir, $f^{(n)}(c) > 0$ indica que la curva es cóncava hacia arriba en $(c; f(c))$, y $f^{(n)}(c) < 0$ indica que es cóncava hacia abajo en dicho punto.

EJERCICIOS

1) Sentido de la concavidad de los gráficos siguientes en los puntos indicados:

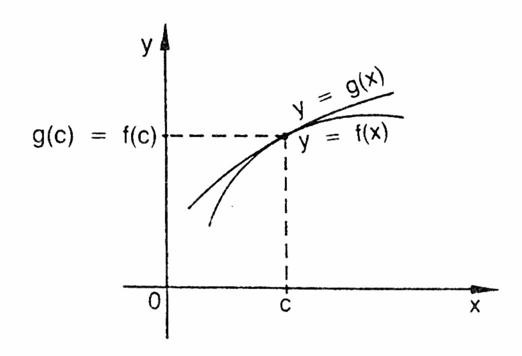
$h: x \to (x + 2)^4 - 3x + 4$	en $x = -2$
$f: x \to x^6 + 2x - 1$	en $x = 0$
$g: x \to (x - 3)^2 (x + 1) + x$	en $x = 3$
$m: x \to -x^4 - 4x^3 - 6x^2 - x - 1$	en $x = -1$

2) Puntos de inflexión en los gráficos de las siguientes funciones:

$f: x \to 2x^3 - 1$	$g: x \to (x - 1)^3 (x - 2)$
$h: x \to 2x^4 - 3x + 5$	$m: x \to x^5 - 4x + 5$
$n: x \to x^7 - 4x^3$	$s: x \to \text{sen } x - x$

◆ VI. Contacto de curvas planas

Consideraciones similares a las anteriores se pueden hacer respecto de los gráficos de dos funciones f y g que tienen en común el punto $(c; f(c))$, es decir, $f(c) = g(c)$.



Puede suceder que, además, $f'(c) = g'(c)$, en cuyo caso los dos gráficos tienen la misma tangente en $(c; f(c))$. Se dice, en esta situación, que las curvas están en contacto en dicho punto.

Si también es $f''(c) = g''(c)$, el contacto es, por lo menos, de segundo orden. Será de segundo orden si, además, $f'''(c) \neq g'''(c)$.

Definición

Dos curvas asociadas a funciones escalares tienen, en un punto común, un *contacto de segundo orden* si y sólo si las derivadas primera y segunda de las funciones respectivas son iguales en dicho punto, y distintas y finitas, en el mismo punto, las derivadas terceras.

Consideremos dos funciones f y g que tienen derivada tercera continua en el punto c. Si se cumple: $f(c) = g(c) \wedge f'(c) = g'(c) \wedge f''(c) = g''(c)$ y además $f'''(c) \neq g'''(c)$, entonces las curvas correspondientes tienen un contacto de segundo orden en el punto $(c; f(c))$.

Si aplicamos la fórmula de Taylor para un punto x en un entorno del punto c y para $n = 3$, resulta:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \frac{f'''(z)}{3!}(x - c)^3$$

$$\wedge$$

$$g(x) = g(c) + g'(c)(x - c) + \frac{g''(c)}{2!}(x - c)^2 + \frac{g'''(z)}{3!}(x - c)^3$$

Restando ambas expresiones queda: $f(x) - g(x) = (x - c)^3 \left[\frac{f'''(z) - g'''(z)}{3!}\right]$.

Si es $f'''(c) \neq g'''(c)$ en un entorno conveniente también es $f'''(z) \neq g'''(z)$, y el signo de la resta $f(x) - g(x)$ depende del signo de $(x - c)^3$.

En este caso, entonces, las curvas se atraviesan en el punto $(c; f(c))$, pues $f(x) - g(x)$ cambia de signo según el punto x esté en el semientorno a derecha o a izquierda del punto c.

Las consideraciones y las definiciones anteriores pueden generalizarse para un contacto de orden n.

Definición

Dos curvas correspondientes a funciones que tienen derivada de orden $(n + 1)$ en el punto c tienen un *contacto de orden n* en el punto $(c; f(c))$ si y sólo si coinciden los valores de las n primeras derivadas en el punto c y existen y son diferentes las derivadas de orden $(n + 1)$ en dicho punto.

En este caso, si $f^{(n+1)}$ y $g^{(n+1)}$ son continuas, por la fórmula de Taylor es:

$$f(x) - g(x) = (x - c)^{(n+1)} \left[\frac{f^{(n+1)}(z) - g^{(n-1)}(z)}{(n+1)!}\right].$$

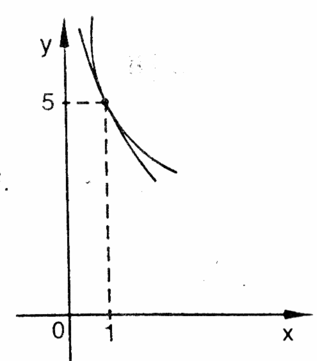
Luego, si n es un número *par*, como $(n + 1)$ resulta impar, la diferencia $(f(x) - g(x))$ cambia de signo a derecha e izquierda del punto c y las curvas *se atraviesan* en el punto $(c; f(c))$.

Si en cambio n es *impar*, como $(n + 1)$ resulta par, la diferencia $(f(x) - g(x))$ no cambia de signo en un entorno del punto c y las curvas *no se atraviesan* en el punto $(c; f(c))$.

Ejemplo

Consideremos las funciones

$$f: x \to x + 1 + \frac{2x + 1}{x^2} \quad \text{y} \quad g: x \to 4 - 4x + \frac{3}{x} + 2x^2.$$



Para $c = 1$, es $f(c) = g(c) = 5$.
Calculemos la derivada primera de cada función. Resulta $\forall x \neq 0$:

$$f'(x) = 1 + \frac{2x^2 - 2x(2x + 1)}{x^4} = 1 - \frac{2x^2 + 2x}{x^4}$$

$\wedge$

$$g'(x) = -4 - \frac{3}{x^2} + 4x.$$

Por lo tanto, $f'(1) = g'(1) = -3$.

Si derivamos nuevamente es:

$$f''(x) = \frac{(-4x - 2)\,x^4 - 4x^3(-2x^2 - 2x)}{x^8} = \frac{4x^5 + 6x^4}{x^8} = \frac{4x + 6}{x^4}$$

$\wedge$

$$g''(x) = \frac{6}{x^3} + 4.$$

Resulta $f''(1) = g''(1) = 10$.
Al calcular la tercera derivada de ambas funciones se obtiene:

$$f'''(x) = \frac{4x^4 - 4x^3(4x + 6)}{x^8} = \frac{-12x^4 - 24x^3}{x^8} = \frac{-12x - 24}{x^5}$$

$\wedge$

$$g'''(x) = -\frac{18}{x^4}.$$

Resulta $\left.\begin{array}{l} f'''(1) = -36 \\ g'''(1) = -18 \end{array}\right\} \quad f'''(1) \neq g'''(1).$

Por lo tanto, las curvas tienen un *contacto de segundo orden y se atraviesan* en el punto (1; 5).

EJERCICIOS

1) Orden de contacto de los gráficos de las siguientes funciones para $c = 1$.

$$f: x \to x + 1 + \frac{2x + 1}{x^2}$$

$$g: x \to -x^2 + 5(x - 1) + \frac{6}{x}$$

2) Orden de contacto en $c = 2$ para:

$f: x \to x^2 - 4x + 7$ $\qquad g: x \to x^3 \quad 2x \quad 1$

♦ VII. Curva osculatriz

Si se considera el gráfico de una función f y un punto $(c; f(c))$ del mismo, otra curva, de una familia determinada, es la curva osculatriz al gráfico en ese punto si es la que tiene el contacto de orden más elevado con el gráfico.

Por ejemplo, si la función f tiene derivadas f' y f'', el polinomio

$$p(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2,$$

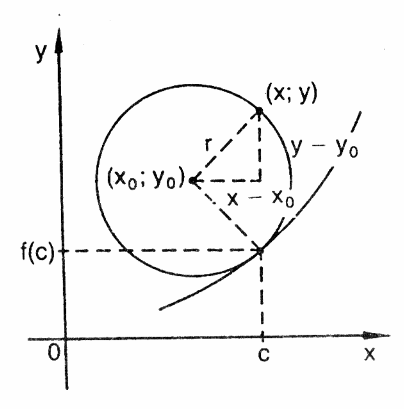
cuyo gráfico es una parábola de eje vertical, tiene, al menos, contacto de segundo orden con la curva asociada a f. Es, por lo tanto, la parábola osculatriz. (Cualquier otra parábola cuadrática que pase por el punto $(c; f(c))$ tiene, a lo sumo, un contacto de primer orden con el gráfico de f.)

Si se consideran las circunferencias que pasan por el punto $(c; f(c))$, interesa, en especial, aquella que tiene contacto de segundo orden con el gráfico de f.

Esa circunferencia es la ***circunferencia osculatriz*** y su radio recibe el nombre de *radio de curvatura* en el punto considerado.

La circunferencia osculatriz puede determinarse considerando que la expresión que la define tiene dos derivadas coincidentes con f' y f'' en el punto c.

Sea $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ (1) la ecuación de la circunferencia osculatriz buscada, donde $(x_0; y_0)$ es el centro y r el radio.



Consideremos sólo un arco de circunferencia correspondiente a un entorno de c, con el objeto de que sea efectivamente la curva de una *función* (ya que la circunferencia completa no lo es).

En un entorno tal como el que acabamos de mencionar es:

$(y - y_0)^2 = r^2 - (x - x_0)^2$ por (1).

Derivando:

$2(y - y_0)y' = -2(x - x_0)$

$(y - y_0)y' = -(x - x_0)$ (2).

Derivando nuevamente:

$(y - y_0)y'' + y'^2 = -1.$

Luego, $y - y_0 = -\dfrac{1 + y'^2}{y''}$ (3) $\Rightarrow y_0 = y + \dfrac{1 + y'^2}{y''}$ si $y'' \neq 0$.

Reemplazando (3) en (2):

$$x - x_0 = y'\,\frac{1 + y'^2}{y''} \ (4) \Rightarrow x_0 = x - y'\,\frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Para encontrar el radio se reemplazan los valores (3) y (4) en (1):

$$y'^2 \frac{(1+y'^2)^2}{y''^2} + \frac{(1+y'^2)^2}{y''^2} = r^2 \Rightarrow \frac{(1+y'^2)^2}{y''^2}(y'^2+1) = r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(1+y'^2)^3}{y''^2} = r^2 \Rightarrow r = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$$

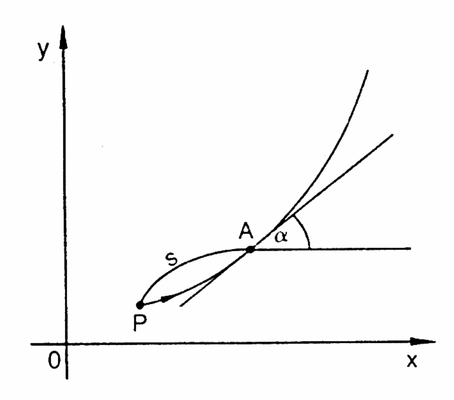
Luego, si existe la circunferencia osculatriz al gráfico de f en el punto $(c; f(c))$ y tiene centro $(x_0; y_0)$ y radio r, es:

$$x_0 = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''},\quad y_0 = y + \frac{1+y'^2}{y''},\quad r = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|},$$

donde $x = c$, $y = f(c)$, $y' = f'(c)$, $y'' = f''(c)$.

r es el ***radio de curvatura*** en el punto y su recíproco, si existe, es la ***curvatura*** de la curva en el punto considerado (en valor absoluto). El punto $(x_0; y_0)$ es el centro de curvatura.

Nota: Si se considera que la inclinación α de la recta tangente a una curva en un punto depende de la longitud s del arco correspondiente, puede definirse la curvatura en un punto como la derivada $\frac{d\alpha}{ds}$ en el punto considerado. Se llega, por este camino, a la misma fórmula anterior.



Ejemplo

Circunferencia osculatriz al gráfico de $f: x \to x^2$ en $(1; 1)$.

$(x_0; y_0)$ $\frac{7}{2}$ $y = x^2$ r 1 −4 0 1 x y

$f'(x) = 2x \qquad f'(1) = 2$

$f''(x) = 2 \qquad f''(1) = 2$

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= 1 - \frac{2(1+4)}{2} = -4 \\ y_0 &= 1 + \frac{1+2^2}{2} = \frac{7}{2} \end{aligned}\right\} \quad (x_0; y_0) = \left(-4; \frac{7}{2}\right)$$

$$r = \frac{(1+4)^{3/2}}{2} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

En este caso, $|K| = \frac{1}{r} = \frac{2\sqrt{5}}{25}$.

Además, $K = \frac{2\sqrt{5}}{25}$, pues $f''(1) > 0$.

EJERCICIOS

1) Circunferencia osculatriz al gráfico de:

$f: x \to x^2 + 1$ en $(1; 2)$, $g: x \to x^4 - 3x$ en $(1; -2)$.

2) Curvatura del gráfico de $f: x \to x^3 - 3x + 5$ en $(2; 7)$,

$g: x \to x^3$ en $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right)$.

3) Curvatura de $f: x \to \operatorname{sen} x$ para $x = \frac{\pi}{2}$.

4) Radio de curvatura de $f: x \to 4 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x$ para $x = \frac{\pi}{2}$.

5) Centro y radio de curvatura de $f: x \to e^x$ en $(0; 1)$.

RESPUESTAS A EJERCICIOS

CAPITULO 8

Sección I

1) $p(x) = (x+1)^4 - 3(x+1)^3 + 2(x+1)^2 - 5(x+1) - 1$

2) $p(x) = 3(x-2)^3 + 5(x-2)^2 - 2(x-2) + 7$

Sección II

1) $e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + e^z \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ z entre 0 y x

2) $\operatorname{sen} x = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 - \frac{\cos z}{120}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5$ z entre x y $\frac{\pi}{2}$

3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{\cos z}{6!}x^6$ z entre x y 0

4) $\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5z^5}$ z entre x y 1

$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3 - \frac{(x-1)^4 z(z^2-1)}{(z^2+1)^4}$

$\operatorname{cosec} x = \sqrt{2} - \sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 -$

$- \frac{5\operatorname{sen}^2 z \cos z + 6\cos^3 z}{6\operatorname{sen}^4 z}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3$

5) $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cos z \frac{x^7}{7!}$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \operatorname{sen} z \frac{x^5}{5!}$

$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{5\operatorname{sen} z\cos^2 z + 6\operatorname{sen}^3 z}{\cos^4 z} \cdot \frac{x^3}{6}$

$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + e^{z}\frac{x^4}{4!}$

Sección III

1) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$ $\quad |r_5| \le \frac{1}{120 \cdot 10^5} < 10^{-7}$

$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ $\quad |r_6| < 10^{-7}$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$ $\quad |r_5| \le \frac{1}{120 \cdot 16} < 10^{-3}$

2) Consideramos la fórmula de Maclaurin para e^x con $x = \frac{1}{2}$ y $n = 6$

$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{24}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{1}{120}\left(\frac{1}{2}\right)^5 +$

$+ \frac{1}{720}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = 1{,}64872$ con $|r_7| < \frac{e^z}{322.560} < 10^{-5}$

3) $\cos\frac{\pi}{6} = 0{,}8660$ $\quad |r_7| < 10^{-4}$

4) $\operatorname{sen} 0{,}5 = 0{,}47942$ $\quad |r_7| < 10^{-5}$

5) $\ln 4 = 1{,}0986 + \frac{1}{3} - \frac{1}{18} + \frac{1}{81} - \frac{1}{324} + \frac{1}{1215} - \frac{1}{4374} = 1{,}3862$

Sección IV

1) f(0) mínimo local — g(0) máximo local — h: no hay

s: no hay — t(2) = 5 mínimo local — m: no hay

2) $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0 \wedge f^{IV}(0) = 12 > 0 \Rightarrow$ f(0) mínimo local

3) $f'(0) = f''(0) = 0 \wedge f'''(0) \neq 0 \Rightarrow$ (0; 0) punto de inflexión

Sección V

1) f: hacia arriba — g: hacia arriba — h: hacia arriba

m: hacia abajo

2) f: (0; −1) — g: (1; 0) y $\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{16}\right)$ — h: no hay — m: (0; 5)

n: (0; 0) — s: puntos de abscisa $2n\pi$ con $n \in Z$

Sección VI

1) tercer orden

2) no hay contacto

Sección VII

1) f: $\left(-4; \frac{9}{2}\right)$ $\quad r = \frac{5\sqrt{5}}{2}$

g: $\left(\frac{5}{6}; -\frac{11}{6}\right)$ $\quad r = \frac{\sqrt{2}}{6}$

2) f: $K = \frac{3\sqrt{82}}{1681}$ $\quad$ g: $K = \frac{192}{125}$

3) $K = -1$

4) $r = \frac{5\sqrt{5}}{4}$

5) $(x_0; y_0) = (-2; 3)$ $\quad r = 2\sqrt{2}$

9. SUCESIONES NUMÉRICAS

La palabra sucesión se utiliza con frecuencia en el lenguaje cotidiano y tiene el mismo significado que en matemática, o sea, el de un conjunto ordenado de elementos. Así, se habla de la sucesión de los días o de la sucesión de los números naturales con la misma interpretación intuitiva.

Al considerar una sucesión de elementos se conoce cuál es el lugar que ocupa cada uno mediante una regla o reglas que permiten ubicarlo. Hay un primer término al cual generalmente se designa a_1, un segundo término a_2, un término enésimo o general a_n, etcétera.

La sucesión suele abreviarse:

$$(a_n) = (a_1; a_2; a_3; a_4; \ldots\ldots; a_n; a_{n+1}; \ldots)$$

y los puntos sucesivos finales indican que consideramos sucesiones de infinitos términos.

Ejemplos

$(a_n) = \left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots\right)$, donde $\forall n \in N: a_n = \frac{1}{n}$

$(b_n) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \ldots\right)$, donde $\forall n \in N: b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$(c_n) = (2; 1; 4; 3; 6; 5; \ldots)$, donde $\forall n \in N: \begin{cases} c_n = n - 1 & \text{si n es par} \\ c_n = n + 1 & \text{si n es impar} \end{cases}$

$(d_n) = (4; 2; 0; -2; -4; \ldots)$, donde $\forall n \in N: \begin{cases} d_n = 4 & \text{si } n = 1 \\ d_n = d_{n-1} - 2 & \text{si } n > 1 \end{cases}$

En este último ejemplo la sucesión se ha definido por recurrencia, es decir, mediante reglas que permiten obtener cada término a partir de los anteriores.

La sucesión de Fibonacci: $(x_n) = (1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; \ldots)$ se define también por recurrencia haciendo

$$\forall n \in N: \begin{cases} x_n = 1 & \text{si } n = 1 \\ x_n = 1 & \text{si } n = 2 \\ x_n = x_{n-2} + x_{n-1} & \text{si } n > 2 \end{cases}$$

I. Sucesiones numéricas

Se observa en los ejemplos anteriores que a cada número natural le corresponde un término de la sucesión y solamente uno, y que los términos de la sucesión pueden ser elementos de cualquier conjunto.

Por lo tanto, una sucesión infinita es un caso particular de función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales (sucesión numerable).

Nos interesan especialmente las sucesiones de números reales, es decir, aquellas cuyo recorrido está formado por números reales, o sea, las funciones del tipo $s: N \rightarrow R$ donde $D_s = N$ y $Rec_s \subset R$.

Es decir,

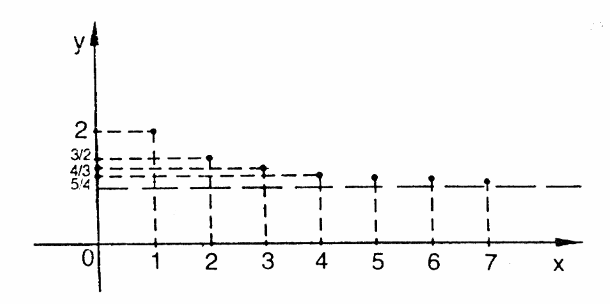
$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots\ldots & n & \ldots\ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \ldots\ldots & a_n & \ldots\ldots \end{array}$$

Definición

Una *sucesión numérica* es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales y cuyo recorrido está incluido en el conjunto de los números reales.

$$s: N \rightarrow R \,/\, \forall n \in N: s(n) = a_n.$$

Consideremos la sucesión $s \,/\, \forall n \in N: s(n) = \frac{n+1}{n}$, cuya representación gráfica es la siguiente:



Como ya se ha dicho, la sucesión suele indicarse

$$(a_n) = (a_1; a_2; \ldots; a_n; \ldots).$$

En el ejemplo considerado es:

$$(a_n) = \left(2; \frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \frac{5}{4}; \ldots\ldots\right)$$

y es usual, en lugar del gráfico anterior, representar directamente sus términos sobre la recta real de la siguiente manera:

$\ldots a_6\, a_5\, a_4\, a_3 \quad a_2 \qquad a_1$

$1 \quad \frac{7}{6}\ \frac{6}{5}\ \frac{5}{4}\ \frac{4}{3} \quad \frac{3}{2} \qquad 2$

Como ya se ha indicado, una sucesión tiene infinitos términos, pero todos ellos pueden tener el mismo valor, como sucede en

$$(a_n) = (1; 1; 1; 1; \ldots\ldots).$$

En este caso el recorrido de la sucesión es el conjunto unitario $\{1\}$.

Dos sucesiones son iguales si sus términos coinciden ordenadamente, es decir:

$$(a_n) = (b_n) \Leftrightarrow \forall n \in N: a_n = b_n.$$

La igualdad de sucesiones no debe confundirse con la de sus recorridos.

Por ejemplo, si $(a_n) = (1; 0; 1; 0; \ldots\ldots)$ y $(b_n) = (0; 1; 0; 1; \ldots)$

$$(a_n) \neq (b_n) \quad \text{pero } Rec_a = Rec_b = \{0, 1\}.$$

Sucesiones acotadas

El número real k es una cota superior de la sucesión (a_n) si y sólo si $\forall n \in N: a_n \leq k$.

Análogamente, k' es cota inferior si y sólo si $\forall n \in N: a_n \geq k'$.

Una sucesión numérica que admite cotas superiores está acotada superiormente, y si admite cotas inferiores está acotada inferiormente.

Si una sucesión admite cotas inferiores y cotas superiores se dice que está acotada.

La mayor de las cotas inferiores es el extremo inferior o ínfimo de la sucesión, y la menor de las cotas superiores es el extremo superior o supremo de la sucesión, según las definiciones ya conocidas.

Ejemplos

$(a_n) = (1; 2; 3; 4; \ldots; n; \ldots)$ es una sucesión acotada inferiormente. 1 es el ínfimo.

$(b_n) = (-2; -3; -4; -5; \ldots; -n; \ldots)$ es una sucesión acotada superiormente. -2 es el supremo.

$(c_n) = \left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots; \frac{1}{n}; \ldots\right)$ es una sucesión acotada. 1 es el supremo y 0 es el ínfimo.

EJERCICIOS

1) Escribir cuatro términos de cada una de las siguientes sucesiones:

$$(a_n) = \left(\frac{n^2 - 1}{n + 1}\right) \quad (b_n) = \left(\frac{n^2 - n + 3}{2n}\right) \quad (c_n) = \left(\frac{(-1)^n n}{n^2 + 3}\right)$$

2) Escribir el término general de cada una de las siguientes sucesiones:

$(a_n) = (9; -27; 81; -243; \ldots) \qquad (b_n) = \left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \ldots\right)$

$(c_n) = (-1; 1; -1; 1; \ldots.)$

3) Indicar cotas y extremos de las siguientes sucesiones:

$(a_n) = \left(\frac{1}{3^n}\right) \qquad (b_n) = \left(\frac{(-1)^n}{n}\right) \qquad (c_n) = \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$

$(d_n) = (2; 1; 2; 1; \ldots.) \qquad (e_n) = \left(-1; \frac{1}{2}; -1; \frac{1}{3}; -1; \frac{1}{4}; -1; \ldots.\right)$

II. Punto de aglomeración

Consideremos las siguientes sucesiones numéricas:

$(a_n) = (1; 0; -1; 1; 0; -1; \ldots)$

$(b_n) = \left(3; 1; 3; \frac{1}{2}; 3; \frac{1}{3}; 3; \frac{1}{4}; \ldots\ldots\right)$

$(c_n) = (1; -1; 2; -2; 3; -3; \ldots\ldots)$

En (a_n) hay infinitos subíndices n para los cuales $a_n = 1$. En efecto, $a_1 = a_4 = a_7 = \ldots. = 1$. Análogamente, hay infinitos subíndices n para los cuales $a_n = 0$ y también infinitos subíndices n para los cuales $a_n = -1$. Es decir, elegido un entorno cualquiera del punto 1, hay infinitos valores de n para los cuales a_n pertenece a dicho entorno. Lo mismo sucede para todo entorno del punto 0 y para todo entorno del punto -1.

Esta propiedad se indica diciendo que 1, 0 y -1 son puntos de aglomeración de la sucesión (a_n).

En general, un punto es de aglomeración si, prefijado cualquier entorno del mismo, hay infinitos valores de n para los cuales a_n pertenece a dicho entorno. Obsérvese que, a diferencia de lo exigido al definir punto de acumulación de un conjunto, el entorno que se elige *no* es un entorno reducido.

En el ejemplo elegido, ninguno de los puntos de aglomeración es, al mismo tiempo, punto de acumulación del recorrido de (a_n).

En (b_n) hay dos puntos de aglomeración: 3 y 0. En este caso, 0 es, además, punto de acumulación del recorrido.

En (c_n) no hay ningún punto de aglomeración.

Definición

El punto a es un *punto de aglomeración* de la sucesión (a_n) si y sólo si, elegido cualquier número positivo ϵ, existen infinitos valores de n para los cuales se verifica

$$|a_n - a| < \epsilon.$$

Esto significa exigir que existan infinitos subíndices n para los cuales, prefijado un entorno de a, se cumple que a_n pertenece a dicho entorno.

Interesan especialmente las sucesiones acotadas que tienen un único punto de aglomeración, el que se denomina límite de la sucesión.

EJERCICIOS

1) Hallar los puntos de aglomeración de cada una de las siguientes sucesiones:

$(a_n) = (1; 1; 1; 1; \ldots.)$ $\qquad$ $(b_n) = (1; 2; 3; 4; \ldots.)$

$(c_n) = \left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)$ $\qquad$ $(d_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$

$(e_n) = ((-1)^n)$ $\qquad$ $(f_n) = \left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$

$(g_n) = \left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ $\qquad$ $(h_n) = \left(\frac{3n-1}{2n}\right)$

$(j_n) = \left(1; \frac{1}{2}; 2; \frac{1}{3}; \ldots.; n; \frac{1}{n+1}; \ldots.\right)$ $\qquad$ $(k_n) = \left(\frac{n^2+1}{2n+1}\right)$

2) Considerar el recorrido de cada una de las sucesiones anteriores y hallar sus puntos de acumulación.

3) Dar ejemplos de:
   a) sucesión acotada con dos puntos de aglomeración y ningún punto de acumulación en el recorrido;
   b) sucesión no acotada con punto de aglomeración único;
   c) sucesión acotada con dos puntos de acumulación en el recorrido;
   d) sucesión no acotada con dos puntos de aglomeración y un punto de acumulación en el recorrido.

4) Contestar Verdadero o Falso: Una sucesión puede tener infinitos puntos de aglomeración. Justificar.

III. Límite de sucesiones

Al definir sucesión como caso particular de función se pone de manifiesto que es posible considerar las definiciones ya dadas para límite de funciones y adaptarlas a restricciones de dichas funciones, cuyo dominio es el conjunto de los números naturales.

Por otra parte, en la idea intuitiva de límite, considerada en la página 122, ya aparece la idea de sucesión. Cuando x "se aproxima" al punto de acumulación a, se consideran números $x_1, x_2, x_3, \ldots$ cada vez más próximos al número a. En ese caso, los valores correspondientes de la función: $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, ... se aproximan al límite ℓ.

Es decir, se han puesto en evidencia dos sucesiones de números reales:

$$(x_n) = (x_1; x_2; x_3; \ldots..)$$

$$y \quad (f(x_n)) = (f(x_1); f(x_2); f(x_3); \ldots.),$$

la primera con límite finito a y la segunda con límite finito ℓ.

Por habernos detenido en consideraciones previas al estudiar límite funcional, su analogía con límite de sucesiones nos lleva a dar directamente las definiciones correspondientes.

Sucesión convergente

Definición

Una sucesión numérica (a_n) tiene *límite finito* ℓ si y sólo si, para cualquier número positivo ϵ, existe un número positivo δ que depende de ϵ tal que $\forall n: (n \in N \wedge n > \delta \Rightarrow |a_n - \ell| < \epsilon)$.

Se indica: $\lim a_n = \ell \iff \forall\epsilon > 0\ \exists\delta(\epsilon) > 0 / \forall n: (n \in N \wedge n > \delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow |a_n - \ell| < \epsilon).$$

Una sucesión es convergente si y sólo si su límite es finito. En el caso considerado, la sucesión (a_n) converge al número ℓ.

Obsérvese que el límite finito de una sucesión corresponde al límite funcional: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell$.

Gráficamente, prefijado un entorno cualquiera de ℓ de radio ϵ, es posible determinar un número δ tal que los términos a_n de la sucesión que verifican $n > \delta$ pertenecen a dicho entorno. (Encontrado un número δ que satisface la condición propuesta, cualquier número positivo $\delta' > \delta$ también la satisface.)

$\ell - \epsilon \qquad \ell \qquad \ell + \epsilon$

$a_1 \quad a_2 \qquad a_n \ldots\ldots. a_{n+1} \qquad a_{n\ 1}$

Obsérvese que una sucesión tiene límite finito ℓ si y sólo si, para cualquier $\epsilon > 0$, en el intervalo $(\ell - \epsilon; \ell + \epsilon)$ están todos los términos de la sucesión con excepción de un número *finito* de ellos (δ términos si $\delta \in N$).

Es decir, el límite es punto de aglomeración de la sucesión, pero además es el *único* punto de aglomeración.

Obsérvese también que la definición de límite es más fuerte que la de punto de aglomeración. En efecto, la existencia de límite finito implica la existencia de punto de aglomeración único, pero el recíproco es falso. El contraejemplo lo dan sucesiones que tienen punto de aglomeración único pero no están acotadas, como se verá más adelante.

Ejemplo 1

Consideremos la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots.; \frac{1}{n}; \ldots.\right)$.

Probaremos que $\lim a_n = 0$.

Nos preguntamos si $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 / \left(n > \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon\right)$.

Como $n > 0$, $\left|\frac{1}{n}\right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon}$.

Luego, si $\delta \geq \frac{1}{\epsilon}$, $n > \delta \Rightarrow n > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \epsilon > \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{n} < \epsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < \epsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon \Rightarrow \lim \frac{1}{n} = 0$.

En particular, si se elige $\epsilon = \frac{1}{1000}$, resulta $\delta \geq 1000$ y puede asegurarse que para $n > 1000$ es $|a_n| < \frac{1}{1000}$, o sea, a partir del término $a_n = \frac{1}{1001}$, inclusive, la diferencia entre cualquier término de la sucesión y el número 0 es menor que 0,001.

Ejemplo 2

Probaremos que $\lim \left(\frac{3n+1}{n+2}\right) = 3$.

O sea, debemos probar que

$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 / \left(n \in N \wedge n > \delta \Rightarrow \left|\frac{3n+1}{n+2} - 3\right| < \epsilon\right)$.

Realizamos algunos cálculos auxiliares que nos permitan proponer un δ adecuado a las exigencias de la definición.

C.A.: $\left|\frac{3n+1}{n+2} - 3\right| < \epsilon \Leftrightarrow \left|\frac{-5}{n+2}\right| < \epsilon \Leftrightarrow n + 2 > \frac{|-5|}{\epsilon} \Leftrightarrow n + 2 > \frac{5}{\epsilon}$*.

Proponemos $\delta \geq \frac{5}{\epsilon}$ y verificamos que satisface la definición:

$\delta \geq \frac{5}{\epsilon} \Rightarrow n > \frac{5}{\epsilon} \Rightarrow n + 2 > \frac{5}{\epsilon} \Rightarrow \epsilon > \frac{5}{n+2} \Rightarrow \left|\frac{-5}{n+2}\right| < \epsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|\frac{3n+1}{n+2} - 3\right| < \epsilon$.

* Obsérvese que si bien $n + 2 > \frac{5}{\epsilon} \Leftrightarrow n > \frac{5}{\epsilon} - 2$, no podemos elegir $\delta = \frac{5}{\epsilon} - 2$, pues $\forall \epsilon > 0$ debe ser $\delta > 0$. En cambio, al elegir $\delta = \frac{5}{\epsilon}$, es $\delta > 0$ y $n > \frac{5}{\epsilon} \Rightarrow$

$\Rightarrow n + 2 > \frac{5}{\epsilon}$.

Ejemplo 3

Demostrar $\lim\left(\frac{n+3}{5n-2}\right) = \frac{1}{5}$.

C.A.: $\left|\frac{n+3}{5n-2} - \frac{1}{5}\right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{17}{5(5n-2)} < \epsilon \Leftrightarrow 5n - 2 > \frac{17}{5\epsilon} \Leftrightarrow 5n > \frac{17}{5\epsilon} + 2$.

Proponemos $\delta \geq \frac{17}{25\,\epsilon} + \frac{2}{5}$.

$n > \delta \Rightarrow n > \frac{17}{25\,\epsilon} + \frac{2}{5} \Rightarrow 5n > \frac{17}{5\,\epsilon} + 2 \Rightarrow 5n - 2 > \frac{17}{5\,\epsilon} \Rightarrow$

$\Rightarrow \epsilon > \frac{17}{5(5n-2)} \Rightarrow \left|\frac{17}{5(5n-2)}\right| < \epsilon \Rightarrow \left|\frac{n+3}{5n-2} - \frac{1}{5}\right| < \epsilon$.

Sucesión divergente

Hay algunas sucesiones, como la de los números naturales, que no tienen límite finito, pero sus términos, a partir de uno de ellos, superan a cualquier número positivo que se elija. En otros casos los términos de una sucesión, como la de los números enteros negativos, superan en valor absoluto, a partir de uno de ellos, a cualquier número positivo ϵ que se elija. Estas sucesiones tienen límite infinito.

Definición

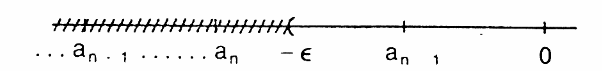
Una sucesión (a_n) tiene *límite infinito* si y sólo si, para cualquier número positivo ϵ, existe un número positivo δ que depende de ϵ tal que $\forall n$: $(n \in N \wedge n > \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |a_n| > \epsilon)$.

Se indica $\lim a_n = \infty$.

Una sucesión es divergente si y sólo si su límite es infinito*. Este caso corresponde al límite funcional $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Para precisar conceptos, igual que se hizo para límite infinito de funciones, es preferible considerar separadamente el caso en que la sucesión numérica diverge a $+\infty$ o $-\infty$.

$$\lim a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 / \forall n: (n \in N \wedge n > \delta \Rightarrow a_n > \epsilon).$$



$$\lim a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 / \forall n: (n \in N \wedge n > \delta \Rightarrow a_n < -\epsilon).$$

$\ldots a_{n+1} \ldots\ldots a_n \quad -\epsilon \quad a_{n-1} \quad 0$

* Algunos autores prefieren llamar sucesión divergente a cualquier sucesión que no es convergente.

En ambos casos las sucesiones son divergentes.

Ejemplo 1

Sea la sucesión $(n^2) = (1; 4; 9; \ldots\ldots)$.
Nos preguntamos si $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0 / (n > \delta \Rightarrow n^2 > \epsilon)$.
Para cualquier número $\epsilon > 0$ basta determinar $\delta \geq \sqrt{\epsilon}$, pues

$$n > \sqrt{\epsilon} \Rightarrow n^2 > \epsilon \Rightarrow \text{lím}\ a_n = +\infty.$$

Ejemplo 2

Sea la sucesión $(-2n) = (-2; -4; -6; -8; \ldots\ldots)$.
¿$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0 / (n > \delta \Rightarrow -2n < -\epsilon)$?
Como $2n > \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{\epsilon}{2}$, para cada $\epsilon > 0$ basta determinar $\delta \geq \frac{\epsilon}{2}$.

En efecto, $n > \delta \Rightarrow n > \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow 2n > \epsilon \Rightarrow -2n < -\epsilon \Rightarrow \text{lím}\ (-2n) = -\infty$.

Ejemplo 3

Sea la sucesión $((-1)^n \cdot n) = (-1; 2; -3; 4; -5; \ldots\ldots)$.
¿ $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0 / (n > \delta \Rightarrow |(-1)^n n| = |n| = n > \epsilon)$?
Para cualquier $\epsilon > 0$ basta determinar $\delta \geq \epsilon$, pues

$$n > \delta \Rightarrow n > \epsilon \Rightarrow |(-1)^n n| > \epsilon \Rightarrow \text{lím}((-1)^n n) = \infty.$$

Ejemplo 4

$$\text{lím}\frac{n^2-1}{5n+2} = +\infty \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0 / \forall n: \left(n \in N \wedge n > \delta \Rightarrow \frac{n^2-1}{5n+2} > \epsilon\right).$$

C.A.: $n^2 - 1 > \epsilon(5n+2) \Leftrightarrow n^2 - 5n\epsilon > 2\epsilon + 1 \Leftrightarrow n(n - 5\epsilon) > 2\epsilon + 1$.

Proponemos $\delta \geq 7\epsilon + 1$.

$$n > \delta \Rightarrow n > 7\epsilon + 1 \Rightarrow n - 5\epsilon > 2\epsilon + 1 \Rightarrow n(n - 5\epsilon) > 2\epsilon + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 - 5n\epsilon > 2\epsilon + 1 \Rightarrow n^2 - 1 > \epsilon(5n+2) \Rightarrow \frac{n^2-1}{5n+2} > \epsilon.$$

Sucesión oscilante

Una sucesión es oscilante si y sólo si no tiene límite finito ni infinito.

Por ejemplo, la sucesión $\left((-1)^n \frac{n+1}{n}\right) = \left(-2; \frac{3}{2}; -\frac{4}{3}; \frac{5}{4}; -\frac{6}{5}; \ldots\right)$ no tiene límite finito ni infinito.

En efecto, prefijado cualquier entorno del número 1, en él hay infinitos términos de la sucesión. Pero lo mismo sucede con el número -1. Luego, no se verifica ni la definición de límite infinito ni la de límite finito.

1 y -1 son dos puntos de aglomeración de la sucesión propuesta.

Obsérvese que una sucesión oscilante tiene, por lo menos, un punto de aglomeración.

La sucesión oscilante $(a_n) = (0; 1; 5; 0; 1; 5; 0; \ldots)$ tiene tres puntos de aglomeración 0,1 y 5. La oscilación es *finita.*

La sucesión oscilante $(b_n) = (0; 1; 0; 2; 0; 3; 0; 4; \ldots)$ tiene un solo punto de aglomeración 0. En este caso la oscilación es *infinita.*

Obsérvese también que no basta la unicidad del punto de aglomeración, como en el ejemplo anterior, para asegurar la convergencia de la sucesión.

Como ya se ha dicho al comienzo, el límite de una sucesión corresponde a un caso especial de límite funcional y pueden demostrarse propiedades análogas a las ya probadas para dicho límite.

El método de demostración es totalmente similar al utilizado en el capítulo 3 y da validez a las siguientes *propiedades de sucesiones convergentes:*

1. El límite de una sucesión numérica, si existe, es único.
2. Si (a_n) y (b_n) son sucesiones convergentes, entonces $(a_n \pm b_n)$ también es convergente y su límite es la suma (resta) de los límites.
   Es decir, $\text{lím}(a_n \pm b_n) = \text{lím}(a_n) \pm \text{lím}(b_n)$.
3. Si (a_n) y (b_n) convergen, entonces el límite del producto de ambas sucesiones es el producto de los límites.
   Es decir, $\text{lím}(a_n \cdot b_n) = \text{lím}(a_n) \cdot \text{lím}(b_n)$.
4. Si (a_n) y (b_n) convergen y $\text{lím}\ b_n \neq 0$, entonces el límite del cociente, cuando este cociente existe, es el cociente de los límites.
   O sea, $\text{lím}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\text{lím}(a_n)}{\text{lím}(b_n)}$.
5. Si (a_n) converge, entonces $\text{lím}|a_n| = |\text{lím}\ a_n|$.
6. Si $\text{lím}(a_n) = \ell$ y es $\ell \geq k$, entonces existe un número natural δ tal que $a_n \geq k$ si $n > \delta$.
7. Si (a_n) y (b_n) convergen y $\forall n$: $a_n > b_n$, entonces $\text{lím}(a_n) \geq \text{lím}(b_n)$.
8. Si (a_n) y (c_n) convergen al mismo límite ℓ y $\forall n$: $a_n \leq b_n \leq c_n$, entonces (b_n) converge y su límite es ℓ.

En todas las demostraciones anteriores a cargo del lector téngase en cuenta la siguiente consideración: si δ es el número que corresponde en la definición de límite para (a_n) y δ' el de (b_n), las propiedades *comunes* a ambas sucesiones serán válidas a partir del mayor de ellos. Por ejemplo, si $\delta > \delta'$, serán válidas a partir de $n > \delta$.

EJERCICIOS

1) Probar las propiedades de sucesiones convergentes enunciadas en esta página.
2) Probar que si $\text{lím}\ a_n = 0$ y (b_n) es una sucesión acotada, entonces $\text{lím}\ (a_n \cdot b_n) = 0$.
3) Aplicando la definición de límite finito o infinito de una sucesión, hallar δ para cualquier $\epsilon > 0$ en cada uno de los casos siguientes y probar así que:

a) $\lim\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$

b) $\lim\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = 1$

c) $\lim\left(\frac{1}{n^2+1}\right) = 0$

d) $\lim\left(\frac{1}{n^2-1}\right) = 0$

e) $\lim\left(\frac{n-3}{n}\right) = 1$

f) $\lim\left(\frac{n}{n+2}\right) = 1$

g) $\lim\left(\frac{n+5}{n+1}\right) = 1$

h) $\lim(3n+1) = +\infty$

i) $\lim(n^2+3) = +\infty$

j) $\lim(5-n^3) = -\infty$

4) Si existe, calcular el límite de cada una de las siguientes sucesiones:

$(a_n) = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

$(b_n) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}$

$(c_n) = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$

$(d_n) = \left(\sqrt{\frac{n+1}{n^2+2n+1}}\right)$

$(e_n) = \left(\frac{2n}{n+3}\right)$

$(f_n) = \left(\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)$

$(g_n) = \left(\frac{2n}{n+1} - \frac{n+1}{2n}\right)$

$(h_n) = \left(\frac{3n}{n^2+1}\right)$

$(t_n) = \left(\frac{4n^2-1}{2+3n}\right)$

$(s_n) = \left(\sqrt{\frac{9n^2-n+1}{n^2}}\right)$

$(r_n) = \left(\sqrt{n(n+4)} - n\right)$

$(j_n) = \left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$

5) Indicar el carácter de cada una de las siguientes sucesiones:

$(a_n) = \left(\frac{3^n + (-1)^n}{3^{n+1} + (-1)^{n+1}}\right)$

$(b_n) = \begin{cases} 1 & \text{si n es impar} \\ \frac{3}{n+5} & \text{si n es par} \end{cases}$

$(c_n) = \left(\frac{n}{\sqrt{n}-1} - \frac{n}{\sqrt{n}+1}\right)$

6) Contestar Verdadero o Falso, justificando la respuesta:

a) toda sucesión tiene un punto de aglomeración;
b) si una sucesión converge, entonces tiene punto de aglomeración único;
c) si una sucesión tiene punto de aglomeración único, entonces converge.

IV. Sucesiones monótonas

Una sucesión numérica (a_n) es creciente si y sólo si

$$\forall n \in N: (a_n \leq a_{n+1}),$$

y es estrictamente creciente si y sólo si

$$\forall n \in N: (a_n < a_{n+1}).$$

Análogamente, (a_n) sucesión decreciente $\Leftrightarrow \forall n \in N: (a_n \geq a_{n+1})$

y (a_n) estrictamente decreciente

$$\Leftrightarrow \forall n \in N: (a_n > a_{n+1}).$$

Las sucesiones crecientes o decrecientes se denominan monótonas.

Ejemplo 1

Verificar que la sucesión $(a_n) = \left(\frac{5n+1}{n}\right)$ es estrictamente decreciente.

Escribimos primero algunos términos de la sucesión:

$$(a_n) = \left(6; \frac{11}{2}; \frac{16}{3}; \frac{21}{4}; \frac{26}{5}; \ldots\ldots\right).$$

5 .... 16/3 11/2 6

$$a_n = \frac{5n+1}{n} \wedge a_{n+1} = \frac{5(n+1)+1}{n+1}.$$

Resulta $a_n = 5 + \frac{1}{n} \wedge a_{n+1} = 5 + \frac{1}{n+1}$.

Observemos que:

$$n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow 5 + \frac{1}{n} > 5 + \frac{1}{n+1} \Rightarrow a_n > a_{n+1}$$

y la sucesión dada decrece estrictamente.

Vemos también que la sucesión está acotada, siendo 6 el supremo y 5 el ínfimo.

Además $\lim(a_n) = 5$. O sea, que (a_n) es una sucesión decreciente y acotada que converge a su ínfimo.

Ejemplo 2

Verificar que la sucesión $(b_n) = \left(\frac{n^2}{n+5}\right)$ es estrictamente creciente.

Escribimos algunos términos:

$$(b_n) = \left(\frac{1}{6}; \frac{4}{7}; \frac{9}{8}; \frac{16}{9}; \frac{5}{2}; \ldots\right)$$

$$b_n = \frac{n^2}{n+5} \wedge b_{n+1} = \frac{n^2+2n+1}{n+6}.$$

Queremos probar $\forall n \in N: b_n < b_{n+1}$

Vemos que:

$b_n < b_{n+1} \iff n^2(n+6) < (n^2+2n+1)(n+5) \iff$

$\iff n^3 + 6n^2 < n^3 + 7n^2 + 11n + 5.$

Por lo tanto, sabiendo que:

$$n^3 = n^3 \wedge 6n^2 < 7n^2 \wedge 0 < 11n + 5,$$

si sumamos miembro a miembro resulta $\forall n \in N$: $b_n < b_{n+1}$ y la sucesión es estrictamente creciente.

Esta sucesión no está acotada y diverge a $+\infty$.

Ejemplo 3

En forma análoga a las anteriores puede verificarse que la sucesión $(c_n) = \left(\frac{n-1}{n}\right)$ es creciente, está acotada y converge a su supremo, que es el número 1.

Ejemplo 4

La sucesión $(d_n) = \left((-1)^n \frac{2n+1}{n}\right)$ no es monótona, está acotada y es oscilante.

Lo mismo sucede con la sucesión $(e_n) = \left(\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}\right)$.

Vemos entonces que una sucesión acotada puede tener o no límite finito. Sin embargo, si la sucesión acotada es además monótona, entonces puede asegurarse la existencia de límite finito.

Esta importante propiedad la demostraremos en el siguiente teorema.

Teorema fundamental

Una sucesión monótona está acotada si y sólo si es convergente.

Primera parte: Si una sucesión es convergente, entonces está acotada.

Demostración

Por hipótesis, $\lim a_n = \ell$, lo cual implica que

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ / \ |a_n - \ell| < \epsilon \text{ si } n > \delta.$$

Elijamos $\epsilon = 1$

Por una propiedad del valor absoluto (pág. 17), es:

$$|a_n| - |\ell| \leq |a_n - \ell|.$$

Luego, $|a_n| - |\ell| < 1$ si $n > \delta$

y $|a_n| < 1 + |\ell| = k$ si $n > \delta$ (1).

Hay, además, un número finito de términos de la sucesión: $a_1; a_2; \ldots; a_{n-1}$, para los cuales no se verifica necesariamente la relación anterior.

Sea a_h, entre ellos, el que tiene mayor módulo. (Si la sucesión es creciente, de términos positivos, $a_h = a_{n-1}$.)

Puede elegirse $k' \ / \ |a_h| < k'$.

Luego, $|a_n| < k'$ si $n \leq \delta$ (2).

Sea, por ejemplo, $k > k'$; de (1) y (2) resulta $\forall n$: $|a_n| < k$ y la sucesión está acotada.

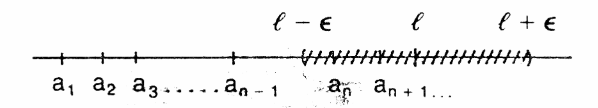
Este teorema es análogo al demostrado en la página 132 para límite funcional y se cumple, aunque la sucesión no sea monótona, de acuerdo con la demostración anterior.

Segunda parte: Si una sucesión monótona está acotada, entonces es convergente. Consideramos el caso de una sucesión creciente acotada superiormente. (Obsérvese que si una sucesión creciente está acotada superiormente, está acotada, pues a_1 es el extremo inferior.)

Demostración

Si la sucesión está acotada superiormente, como sus términos son números reales, por el axioma de continuidad de **R** existe un número real ℓ que es el extremo superior o supremo. Demostraremos que ℓ es, precisamente, el límite de la sucesión.

Consideramos un entorno cualquiera de ℓ de radio $\epsilon \ / \ \ell - \epsilon < \ell < \ell + \epsilon$.



Si ℓ es el supremo de la sucesión, $\forall n$: $a_n \leq \ell < \ell + \epsilon$,

es decir, $\forall n$: $a_n < \ell + \epsilon$ (1)

Además, $\ell - \epsilon$ no es cota superior, pues es menor que el supremo ℓ; luego, existe $\delta \in N \ / \ a_\delta > \ell - \epsilon$.

Como la sucesión es creciente, $n > \delta \Rightarrow a_n \geq a_\delta > \ell - \epsilon$.

Luego, $\ell - \epsilon < a_n$ si $n > \delta$ (2).

Si $n > \delta$ se cumplen simultáneamente las relaciones (1) y (2), es decir, si $n > \delta$, entonces $\ell - \epsilon < a_n < \ell + \epsilon$.

Por lo tanto, ℓ es el límite de la sucesión (a_n).

Para una sucesión decreciente acotada inferiormente, la demostración es análoga respecto del ínfimo.

El número e

Como aplicación del teorema anterior se deduce que la sucesión $(a_n) =$

$$= \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) \text{ es convergente.}$$

Para ello basta probar que es creciente y está acotada. Para demostrar que es una sucesión creciente se aplica la fórmula del binomio de Newton para cualquier número natural n.

Resulta $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} +$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n}.$$

Efectuando operaciones, es:

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots\ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \quad (1).$$

Si $m > n$, en la sucesión resulta $a_m > a_n$, pues cada uno de los sumandos de la expresión (1) es positivo.

Es decir, $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots\ldots < a_n < \ldots\ldots$, y la sucesión (a_n) es estrictamente creciente.

Falta verificar, además, que está acotada superiormente.

De la expresión (1) se deduce:

$$a_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Como $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$ es la suma de los términos de una progresión geométrica de primer término 1, razón $\frac{1}{2}$ y n términos, es:

$$S_n = 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 2.$$

Por lo tanto, $\forall n \in N$: $a_n \leq 1 + S_n < 3$, y la sucesión creciente está acotada superiormente.

Luego, tiene límite finito y puede darse la siguiente definición:

$$e = \text{lím}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (e = 2{,}718281\ldots\ldots).$$

Se ha considerado solamente la sucesión $\left((1 + \frac{1}{n})^n\right)$ con $n \in N$.

Puede demostrarse también, en general, si x varía en el campo real, que

$$\text{lím}_x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

De la expresión anterior se deduce de inmediato que

$$\text{lím}_{x \to \infty}\left(1 + \frac{h}{x}\right)^x = e^h.$$

Para ello basta considerar la variable auxiliar $u = \frac{x}{h}$.

♦ Teorema de los intervalos encajados

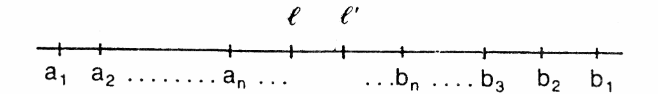
Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones monótonas, la primera creciente y la segunda decreciente, de números reales. Si $\forall n$: $(a_n < b_n)$ y $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 / b_n - a_n < \epsilon$ si $n > \delta$, entonces ambas sucesiones convergen a un único número real ℓ.

Demostración

La sucesión (a_n) es creciente y está acotada superiormente por cualquier b_n. Por un teorema anterior (pág. 338), la sucesión (a_n) converge a su supremo ℓ. Es decir, lím $a_n = \ell$.

Análogamente, como la sucesión (b_n) es decreciente y está acotada inferiormente por cualquier a_n, por el mismo teorema la sucesión (b_n) converge a su ínfimo ℓ'. Es decir, lím $b_n = \ell'$.

En primer lugar probaremos $\ell \leq \ell'$.



Como cualquier b_n es cota superior de la sucesión (a_n) y ℓ es el supremo de esta sucesión, es $\forall n$: $\ell \leq b_n$, pues el supremo es por definición la menor cota superior de (a_n).

Ahora bien, la proposición $\forall n$: $\ell \leq b_n$ indica que el número ℓ es una cota inferior para la sucesión (b_n). Como ℓ' es el ínfimo de esta sucesión, es $\ell \leq \ell'$, pues el ínfimo es por definición la mayor cota inferior.

Luego, es $\ell \leq \ell'$ y $\ell' - \ell \geq 0$.

Se ha visto también $\forall n$: $(b_n \geq \ell' \wedge a_n \leq \ell)$. Restando estas desigualdades de sentido contrario resulta:

$$\forall n: b_n - a_n \geq \ell' - \ell > 0 \qquad (1).$$

Pero, por hipótesis, $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 / (n > \delta \Rightarrow b_n - a_n < \epsilon)$ (2).

Luego, $\forall \epsilon > 0$, resulta $|\ell' - \ell| < \epsilon$ por (1) y (2).

Por lo tanto, como ℓ y ℓ' son números reales, es $\ell = \ell'$, y el teorema queda probado.

Obsérvese que las sucesiones (a_n) y (b_n) determinan una colección de intervalos cerrados encajados: $[a_1; b_1] \supseteq [a_2; b_2] \supseteq [a_3; b_3] \supseteq \ldots \supseteq [a_n; b_n] \supseteq \ldots$, cuyas longitudes tienden a cero. El teorema asegura que la intersección de los infinitos intervalos es un único punto ℓ.

O sea, $\ell = \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_n; b_n]$.

Este importante teorema es equivalente al postulado del extremo superior o axioma de continuidad de R, como se ha indicado en la página 16.

♦ Límite inferior y límite superior

Ya se ha observado que una sucesión de números reales que no tiene límite puede tener varios puntos de aglomeración.

Si la sucesión está acotada, puede probarse que el conjunto de sus puntos de aglomeración también está acotado. Puede demostrarse que el supremo de este conjunto es, además, su máximo, y se lo llama límite superior de la sucesión. Análogamente, el mínimo del conjunto de los puntos de aglomeración se denomina límite inferior de la sucesión.

Por ejemplo, la sucesión acotada $(a_n) = (1; 0; -1; 1; 0; -1; \ldots\ldots)$ tiene límite superior 1 y límite inferior -1.

Se indica de la siguiente manera:

$$\overline{\lim}\, a_n = 1 \quad \text{y} \quad \underline{\lim}\, a_n = -1.$$

Las propiedades mencionadas pueden demostrarse a partir de la siguiente definición.

Definición

El número $\overline{\ell}$ es el límite superior de la sucesión (a_n) si y sólo si se verifican las dos condiciones siguientes:

1) $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \,/\, \forall n: (n \in N \ \wedge\ n > \delta \Rightarrow a_n < \overline{\ell} + \epsilon)$;

2) $\forall \epsilon > 0$ existen infinitos valores de n para los cuales $a_n > \overline{\ell} - \epsilon$.

La primera condición exige que *todos* los términos de la sucesión, a partir de uno de ellos, sean menores que $\overline{\ell} + \epsilon$.

Esto indica que, elegido cualquier número positivo ϵ, hay solamente un número finito de subíndices n para los cuales se verifica $a_n > \overline{\ell} + \epsilon$.

La segunda condición exige que haya, además, infinitos subíndices n para los cuales se cumple $a_n > \overline{\ell} - \epsilon$.

Análogamente, $\underline{\ell}$ es el límite inferior de (a_n) si y sólo si:

1) $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \,/\, \forall n: (n \in N \ \wedge\ n > \delta \Rightarrow a_n > \underline{\ell} - \epsilon)$;

2) $\forall \epsilon > 0$ existen infinitos valores de n para los cuales $a_n < \underline{\ell} + \epsilon$.

Por lo tanto, si $\underline{\ell}$ es el límite inferior de (a_n), *todos* los términos de la sucesión, a partir de uno de ellos, son mayores que $\underline{\ell} - \epsilon$.

Además, sólo puede haber un número finito de subíndices n para los cuales se verifica $a_n < \underline{\ell} - \epsilon$.

♦ Teorema

Si la sucesión numérica (c_n) está acotada, entonces tiene límite inferior y límite superior.

Hallaremos el límite superior por intervalos encajados, y en forma análoga se puede encontrar el límite inferior.

Demostración

Como (c_n) está acotada, los infinitos c_n pertenecen a un intervalo $[a; b]$.

c

$a = a_1 \quad a_2 \ldots a_n \ldots b_n \ldots b_1 = b_2 \qquad b$

Consideramos el punto medio del intervalo $[a; b]$. Elegimos, de los dos subintervalos en que queda dividido $[a; b]$, el intervalo $[a_1; b_1]$, para el cual se verifican las dos condiciones siguientes: 1) hay infinitos valores de n para los cuales se cumple $c_n \in [a_1; b_1]$; 2) hay solamente un número finito de valores de n para los cuales se cumple $c_n > b_1$ (puede no haber ninguno).

Se subdivide luego el intervalo $[a_1; b_1]$ y de la misma forma anterior se elige el intervalo $[a_2; b_2]$.

Prosiguiendo de la misma manera se selecciona una sucesión de intervalos encajados cuyas longitudes tienden a cero:

$$[a_1; b_1] \supseteq [a_2; b_2] \supseteq [a_3; b_3] \supseteq \ldots\ldots \supseteq [a_n; b_n] \supseteq \ldots\ldots$$

y tales que, para cualquier punto b_i, a la derecha de b_i hay, a lo sumo, un número finito de términos de la sucesión (c_n).

Por el teorema de intervalos encajados, la intersección de los intervalos anteriores es un único número real c. Probaremos que c es el límite superior de (c_n).

En primer lugar, c es punto de aglomeración de la sucesión. En efecto, en cualquier entorno de c está incluido uno de los intervalos $[a_i; b_i]$ de la colección. Por la forma en que fueron elegidos dichos intervalos, hay infinitos subíndices n para los cuales se verifica $c_n \in [a_i; b_i]$ y, por lo tanto, también hay infinitos n para los cuales c_n pertenece al entorno elegido.

Falta probar que no hay ningún punto de aglomeración de (c_n) a la derecha de c.

Lo haremos por el absurdo.

Sea c_1 un punto de aglomeración de (c_n) tal que $c < c_1$.

c $\qquad$ c_1

$a \qquad b_i \quad c_1 - \epsilon \qquad c_1 + \epsilon$

Como la longitud de $[a_n; b_n]$ tiende a cero, es posible hallar $[a_i; b_i] \,/\, b_i < c_1$.

Por la manera en que se han seleccionado los intervalos de la colección, a la derecha de b_i solamente puede haber un número finito de términos de (c_n).

Luego, eligiendo $\epsilon < c_1 - b_i$, solamente hay un número finito de valores de n para los cuales $c_n \in (c_1 - \epsilon; c_1 + \epsilon)$. Por lo tanto, c_1 no es punto de aglomeración.

Teorema

Si una sucesión tiene límite superior y límite inferior y ambos coinciden, entonces la sucesión es convergente.

O sea, $\ell = \overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n \Rightarrow \lim a_n = \ell$.

Demostración

Por ser ℓ límite superior, para cualquier $\epsilon > 0$ hay, a lo sumo, un número finito de valores de n para los cuales $a_n > \ell + \epsilon$.

Por ser ℓ límite inferior, para cualquier $\epsilon > 0$ hay, a lo sumo, un número finito de valores de n para los cuales $a_n < \ell - \epsilon$.

Luego, $\forall \epsilon > 0$ hay solamente un número finito de valores de n para los cuales no se cumple $a_n \in (\ell - \epsilon ; \ell - \epsilon)$. Es decir, $\forall \epsilon > 0$ es posible encontrar un número natural δ tal que $n > \delta \Rightarrow a_n \in (\ell - \epsilon; \ell + \epsilon)$. Por lo tanto, de acuerdo con la definición, ℓ es el límite de la sucesión (a_n).

Aplicando la definición de límite finito de una sucesión, puede probarse que el teorema recíproco también es válido.

EJERCICIOS

1) Verificar que $(a_n) = \left(\frac{n-1}{n^2+3}\right)$ es estrictamente decreciente.

2) Verificar que $(a_n) = \left(\frac{n^3}{n^2-2}\right)$ es estrictamente creciente.

3) Verificar que $(a_n) = \left(\frac{n^2+2}{3n-1}\right)$ no es monótona.

4) Verificar que $(a_n) = \left(\frac{2^n}{n!}\right)$ decrece estrictamente si $n \geq 2$.

5) Dar ejemplos de:
   a) sucesión monótona acotada e indicar sus extremos;
   b) sucesión monótona no acotada;
   c) sucesión acotada no convergente.

6) Demostrar que si una sucesión monótona decreciente está acotada inferiormente, dicha sucesión converge a su extremo inferior.

7) Hallar límite superior y límite inferior, si existen, para cada una de las siguientes sucesiones:

$(a_n) = \left((-1)^n \frac{5}{n}\right)$ $\qquad (b_n) = (2; 3; 0; 2; 3; 0, 2; \ldots)$

$(c_n) = \left((-1)^n \frac{n+1}{2n-1}\right)$ $\qquad (d_n) = \left(\frac{1}{2^n} + (-1)^n \frac{2n+1}{n+2}\right)$

$(e_n) = (0; 1; 0; 1; 2; 0; 1; 3; 0; 1; 4; \ldots)$ $\qquad (g_n) = (5; 5; \ldots 5; \ldots)$

$(h_n) = (3; 0; 3; -1; 3; -2; 3; -3; \ldots)$ $\qquad (j_n) = (1; -1; 2; -2; 3; -3 \ldots)$

V. Subsucesiones o sucesiones parciales

En la sucesión $(a_n) = (a_1; a_2, a_3; \ldots; a_n; \ldots)$ pueden considerarse infinitos términos: $a_h, a_r, a_s, \ldots$, y formar con ellos una nueva sucesión.

Por ejemplo, si $(n) = (1; 2; 3; 4; 5; \ldots\ldots)$,
la sucesión $(2n) = (2; 4; 6; 8; 10 \ldots\ldots)$ está contenida en la primera o es una subsucesión de la primera.

Si se considera la sucesión $(a_n) = (a_1; a_2; a_3; \ldots\ldots)$ y un subconjunto del conjunto de los números naturales: $\{k_1, k_2, k_3, \ldots k_n \ldots\}$, donde $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots < k_n < \ldots$ y $k_1 \geq 1$, se obtiene la siguiente subsucesión de (a_n):

$$(b_n) = (a_{k_n}) = (a_{k_1}; a_{k_2}; \ldots; a_{k_n}; \ldots),$$

donde $k_1 \geq 1$

$k_2 > k_1 \Rightarrow k_2 > 1 \Rightarrow k_2 \geq 2$

$k_3 > k_2 \Rightarrow k_3 > 2 \Rightarrow k_3 \geq 3$

....

En general, resulta $\forall n \in N: k_n \geq n$.

Hay, por supuesto, infinitas subsucesiones de la misma sucesión.

Ejemplo

Sea $(a_n) = \left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \ldots; \frac{1}{n}; \ldots\right)$.

$(b_n) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; \frac{1}{8}; \ldots\ldots; \frac{1}{2n}; \ldots\ldots\right)$

$(c_n) = \left(1; \frac{1}{3}; \frac{1}{5}; \frac{1}{7}; \ldots\ldots; \frac{1}{2n-1}; \ldots\ldots\right)$

$(d_n) = \left(1; \frac{1}{4}; \frac{1}{9}; \frac{1}{16}; \ldots\ldots; \frac{1}{n^2}; \ldots\right)$

En este caso, (b_n), (c_n) y (d_n) son subsucesiones de (a_n).

Consideremos en especial (b_n).

Es $b_1 = a_{k_1} = a_2; b_2 = a_{k_2} = a_4; b_3 = a_{k_3} = a_6 \ldots b_n = a_{k_n} = a_{2n} \ldots$

◆ *Nota:* Las subsucesiones pueden definirse como funciones compuestas. Consideremos el ejemplo anterior, con la sucesión $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ y la subsucesión $(b_n) = \left(\frac{1}{2n}\right)$.

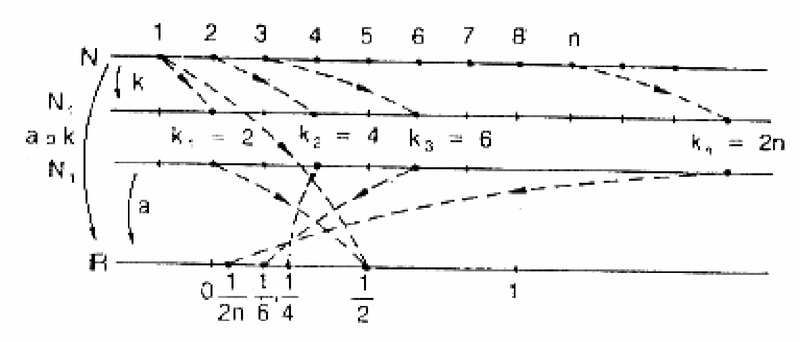
Recordemos, en primer lugar, que una sucesión es una función cuyo dominio es N y cuyo recorrido es una parte de R.

Definimos, ahora, una función k de N en N tal que $\forall n: k(n) = 2n$.
Obsérvese que k es una función estrictamente creciente.
Aplicamos después una restricción de a al recorrido de k, al cual llamamos N_1.
Es decir, consideramos ahora una restricción de

$a: N_1 \rightarrow R \,/\, \forall n \in N_1: a(n) = \frac{1}{n}$.

La función compuesta $a \circ k: N \rightarrow R \,/\, \forall n \in N: (a \circ k)(n) = a[k(n)] = \frac{1}{2n}$

es una subsucesión de a.



En general, sea $a: N \rightarrow R$ una sucesión cualquiera de números reales. Sea k otra sucesión estrictamente creciente cuyo recorrido es un subconjunto de N al cual llamamos N_1.

Es $k: N \rightarrow N_1 \,/\, \forall m \in N\, \forall\, n \in N: (m < n \Rightarrow k(m) < k(n))$.

Consideremos ahora una restricción de la función a, cuyo dominio es N_1. Si aplicamos primero la función k y luego al recorrido de k le aplicamos la restricción de la función a, obtenemos la función compuesta

$$a \circ k: N \rightarrow R \,/\, \forall n \in N: (a \circ k)(n) = a[k(n)].$$

La función compuesta $(a \circ k)$ es una subsucesión de la sucesión a.
Suele indicarse $a[k(n)] = a_{k_n}$, como ya se ha visto.

Propiedades

Puede demostrarse de inmediato, aplicando la definición, que si una sucesión está acotada, cualquier subsucesión también está acotada y cualquier cota superior de la sucesión es cota superior de la subsucesión. Lo mismo sucede con cualquier cota inferior.

Además, si una sucesión converge, cualquier subsucesión también converge al mismo límite, de acuerdo con el siguiente teorema.

Teorema

Si una sucesión numérica converge, entonces cualquier subsucesión también converge al mismo límite.

Demostración

Sea (a_n) una sucesión convergente y $(b_n) = (a_{k_n})$ una subsucesión cualquiera de (a_n).

Por definición de límite, si la sucesión (a_n) converge al número ℓ, entonces

$$\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0 \,/\, (n > \delta \Rightarrow |a_n - \ell| < \epsilon) \; (1).$$

Es decir, los únicos a_n para los cuales no se cumple necesariamente la desigualdad (1) son aquellos a_n para los cuales $n \leq \delta$.

Demostrar el teorema consiste en verificar que

$$\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0 \,/\, (n > \delta \Rightarrow |b_n - \ell| < \epsilon).$$

Ahora bien, por definición de subsucesión, $\forall n \in N: k_n \geq n$, y, por lo tanto, el término a_{k_n} es un término coincidente con a_n o posterior a él. Luego, la condición exigida se verifica también para los términos a_{k_n} si $n > \delta$.

Es decir, $\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0 \,/\, (n > \delta \Rightarrow |a_{k_n} - \ell| < \epsilon)$.

O sea, $\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0 \,/\, (n > \delta \Rightarrow |b_n - \ell| < \epsilon)$.

Un razonamiento análogo vale para sucesiones divergentes, es decir, cualquier subsucesión de una sucesión divergente también diverge.

Ejemplo

Consideremos la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)$ cuyo límite es 0. Como se ha visto en la página 331, $\forall \epsilon > 0\, \exists \delta = \frac{1}{\epsilon} \,/\, (n > \delta \Rightarrow |a_n| < \epsilon)$.

En la subsucesión $\left(\frac{1}{2n}\right)$, para cada $\epsilon > 0$ vale el mismo $\delta = \frac{1}{\epsilon}$, pues $n > \delta \Rightarrow$ $\Rightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < \epsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{2n}\right| < \epsilon$.

Si, por ejemplo, se elige $\epsilon = 0{,}001$, puede elegirse $\delta = 1000$.

En $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$: $n > 1000 \Rightarrow |a_n - 0| < 0{,}001$ y en $(b_n) = \left(\frac{1}{2n}\right)$:

$n > 1000 \Rightarrow |b_n - 0| < 0{,}0005 < 0{,}001$.

El recíproco del teorema anterior no es válido, pues una subsucesión puede ser convergente y no serlo la sucesión correspondiente.

Por ejemplo, sea $(a_n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 2k - 1 \\ \frac{1}{n} \text{ si } n = 2k \end{cases} \quad (k \in N)$

Es decir, $(a_n) = \left(1; \frac{1}{2}; 1; \frac{1}{3}; 1; \ldots\ldots\right)$.

La sucesión (a_n) es oscilante, la subsucesión $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge a 0 y la subsucesión (1) converge a 1.

◆ VI. Sucesiones de Cauchy

Al considerar una sucesión de números reales interesa conocer si es convergente o no. En algunos casos puede aplicarse el teorema fundamental de convergencia para sucesiones monótonas acotadas (pág. 338). Si una sucesión está acotada y además es monótona, el límite coincide con el supremo si la sucesión es creciente, o con el ínfimo si es decreciente.

Puede suceder, en cambio, que la sucesión esté acotada pero no sea monótona. En este caso es posible recurrir a la definición de sucesión convergente, pero su aplicación requiere conocer de antemano cuál es el límite supuesto y luego demostrar que efectivamente lo es. Esta situación presenta dificultades, pues exige, en cierta forma, conocer por anticipado el número que se quiere hallar.

Este inconveniente desaparece si se encuentra una condición necesaria y suficiente para determinar la convergencia de una sucesión, que no está referida directamente al valor del límite.

Esta condición se conoce con el nombre de *condición de Cauchy* y las sucesiones numéricas que la verifican se denominan sucesiones convergentes según Cauchy, sucesiones de Cauchy o sucesiones fundamentales.

Definición

Una sucesión numérica (a_n) es una *sucesión de Cauchy* si y sólo si, prefijado cualquier número positivo ϵ, existe un número positivo $\delta(\epsilon)$ tal que, para cualquier par de enteros positivos m y n, ambos mayores que δ, se verifica $|a_m - a_n| < \epsilon$.

Es decir,

(a_n) sucesión de Cauchy $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 / (m > \delta \wedge n > \delta \Rightarrow |a_m - a_n| < \epsilon)$.

El teorema siguiente asegura que cualquier sucesión convergente de números reales es una sucesión de Cauchy y, recíprocamente, que cualquier sucesión de Cauchy es convergente.

Teorema de Cauchy

Una sucesión de números reales es convergente si y sólo si es una sucesión de Cauchy.

Primera parte: (a_n) converge $\Rightarrow$

$\Rightarrow (\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 / m > \delta \wedge n > \delta \Rightarrow |a_m - a_n| < \epsilon)$.

Demostración

Si la sucesión converge, existe $\ell = \lim a_n$.

Luego, prefijado $\epsilon > 0$, por definición de límite finito de una sucesión.

$$\exists \delta > 0 / \left[\left(n > \delta \Rightarrow |a_n - \ell| < \frac{\epsilon}{2}\right) \wedge \left(m > \delta \Rightarrow |a_m - \ell| < \frac{\epsilon}{2}\right)\right].$$

Pero $|a_m - a_n| = |(a_m - \ell) + (\ell - a_n)| \le |a_m - \ell| + |\ell - a_n| =$

$= |a_m - \ell| + |a_n - \ell| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$

Luego, $m > \delta \wedge n > \delta \Rightarrow |a_m - a_n| < \epsilon$, y se cumple la tesis.

Segunda parte: $(\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 / m > \delta \wedge n > \delta \Rightarrow |a_m - a_n| < \epsilon) \Rightarrow$ (a_n) converge.

Demostración

Por propiedades 3 y 10 del valor absoluto (pág. 17) y por hipótesis, es:

$|a_n| - |a_m| \le ||a_n| - |a_m|| \le |a_n - a_m| < 1$ si $\epsilon = 1 \wedge m > \delta \wedge n > \delta$.

Luego, $|a_n| < |a_m| + 1$ si $m > \delta \wedge n > \delta$.

Fijando un número cualquiera $m > \delta$, sea $k' = |a_m| + 1$.

Resulta, entonces, $\forall n > \delta : |a_n| < k'$.

Además, si entre los términos de subíndice menor o igual que δ que forman un conjunto finito es a_h el que tiene mayor valor absoluto. $\forall n: [(n \le \delta \Rightarrow |a_n| \le |a_h|) \wedge$ $\wedge (n > \delta \Rightarrow |a_n| \le k')]$.

Luego, si k es el mayor entre los números $|a_h|$ y k', se cumple $\forall n: |a_n| \le k$, y la sucesión (a_n) está acotada.

Por un teorema anterior (pág. 342) (a_n) tiene límite superior $\overline{\ell}$ y límite inferior $\underline{\ell}$. Si se prueba que ambos límites son iguales, la sucesión converge, según el teorema demostrado en la página 344.

a_n — a_m

$\underline{\ell} - \epsilon$ $\quad \underline{\ell} \quad$ $\underline{\ell} + \epsilon$ $\qquad$ $\overline{\ell} - \epsilon$ $\quad \overline{\ell} \quad$ $\overline{\ell} + \epsilon$

Supongamos que el límite superior y el límite inferior son distintos, es decir, $\overline{\ell} > \underline{\ell}$.

Elegimos sendos entornos de $\overline{\ell}$ y $\underline{\ell}$, cada uno de radio $\epsilon < \frac{\overline{\ell} - \underline{\ell}}{3} \wedge \epsilon > 0$.

Como $\overline{\ell}$ es punto de aglomeración, hay infinitos valores de n para los cuales a_n pertenece al entorno de radio $\epsilon < \frac{\overline{\ell} - \underline{\ell}}{3}$. Sea δ el valor correspondiente a dicho ϵ, de acuerdo con la hipótesis.

Entre los a_n que pertenecen al entorno elegido nos interesan aquellos de subíndice mayor que δ. Elegimos entre ellos un subíndice m para el cual a_m pertenece al entorno mencionado. Análogamente, elegimos un subíndice $n > \delta$ tal que a_n pertenece al entorno de $\underline{\ell}$ de radio ϵ.

Es decir, hemos encontrado $m > \delta / |a_m - \overline{\ell}| < \frac{\overline{\ell} - \underline{\ell}}{3}$ (1)

y $n > \delta / |a_n - \underline{\ell}| < \frac{\overline{\ell} - \underline{\ell}}{3}$ (2).

Ahora bien, $\overline{\ell} - \underline{\ell} = (\overline{\ell} - a_m) + (a_m - a_n) + (a_n - \underline{\ell})$

y $\overline{\ell} - \underline{\ell} \leq |a_m - \overline{\ell}| + |a_m - a_n| + |a_n - \underline{\ell}|$.

Por (1) y (2), es $\overline{\ell} - \underline{\ell} < \frac{2}{3}(\overline{\ell} - \underline{\ell}) + |a_m - a_n|$ con $m > \delta$ y $n > \delta$.

Pasando términos, resulta $|a_m - a_n| > \frac{\overline{\ell} - \underline{\ell}}{3} \geq \epsilon$ con $m > \delta$ y $n > \delta$, que contradice la hipótesis.

Queda probado, entonces, que (a_n) converge.

RESPUESTAS A EJERCICIOS

CAPITULO 9

Sección I

1) $(a_n) = (0; 1; 2; 3; \ldots\ldots)$ $\quad (b_n) = \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{4}; \frac{3}{2}; \frac{15}{8}; \ldots\ldots\right)$

$(c_n) = \left(-\frac{1}{4}; \frac{2}{7}; -\frac{1}{4}; \frac{4}{19}; \ldots\ldots\right)$

2) $(a_n) = ((-3)^{n+1})$; $\quad (b_n) = \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$; $\quad (c_n) = ((-1)^n)$

3) a) ínfimo: 0 supremo: $\frac{1}{3}$ b) ínfimo: -1 supremo: $\frac{1}{2}$

c) ínfimo: $-\frac{1}{2}$ supremo: $\frac{1}{4}$ d) ínfimo: 1 supremo: 2

e) ínfimo: -1 supremo: $\frac{1}{2}$

Sección II

1) a: 1 b: no hay c: -1 y 1 d: 0 e: -1 y 1 f: 0 g: 0 h: $\frac{3}{2}$ j: 0

k: no hay

2) a, b y e: no hay c: -1 y 1 d: 0 f: 0 g: 0 h: $\frac{3}{2}$ j: 0 k: no hay

3) Ejemplos:

a) $((-1)^n 2)$ 2 y -2 puntos de aglomeración

b) $(0; -1; 0; -2; 0; -3; 0; -4; \ldots\ldots)$ 0 punto de aglomeración

c) $\left((-1)^n \frac{n+1}{n}\right)$ 1 y -1 puntos de acumulación del recorrido

d) $\left(2; 1; 1; 2; 2; \frac{1}{2}; 2; 3; \frac{1}{3}; 2; 4; \frac{1}{4}; 2; 5; \frac{1}{5}; \ldots\ldots\right)$

2 y 0 puntos de aglomeración

0 punto de acumulación del recorrido

4) Verdadero: $(0; 1; 0; 1; 2; 0; 1; 2; 3; 0; 1; 2; 3; 4; \ldots\ldots)$ tiene como puntos de aglomeración a 0 y a todos los números naturales.

Sección III

3) a) $\delta = \frac{1}{\epsilon} - 1$ si $\epsilon < 1$. Se puede tomar $\delta \geq \frac{1}{\epsilon}$ b) $\delta \geq 1 + \frac{2}{\epsilon}$

c) $\delta \geq \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$ d) $\delta \geq \sqrt{\frac{1-\epsilon}{\epsilon}}$ e) $\delta \geq \frac{3}{\epsilon}$ f) $\delta \geq \frac{2}{\epsilon}$

g) $\delta \geq \frac{4}{\epsilon}$ h) $\delta \geq \frac{\epsilon}{3}$ i) $\delta \geq \sqrt{\epsilon}$ j) $\delta \geq \sqrt[3]{5-\epsilon}$

4) a: 0 b: 1 c: e^3 d: 0 e: 2 f: 1 g: $\frac{3}{2}$

h: 0 t: ∞ s: 3 r: 2 j: 1

5) (a_n) converge a $\frac{1}{3}$ $\quad (b_n)$ oscila $\quad (c_n)$ converge a 2

6) a) Falso: (n) no tiene punto de aglomeración.

b) Verdadero (véase pág. 331).

c) Falso: $(0; 2; 0; 4; 0; 8; 0; 16; \ldots)$ tiene a 0 como único punto de aglomeración y es oscilante.

Sección IV

3) $a_1 > a_2 \wedge a_2 < a_3$

5) a) $\left(\frac{n-5}{2n+3}\right)$ decrece ínfimo $\frac{1}{2}$ supremo $\frac{6}{5}$

b) $\left(\frac{n^2+7}{n+3}\right)$ crece

c) $(\cos n\pi)$

7) a: $\underline{\ell} = \overline{\ell} = 0$ $\quad$ b: $\underline{\ell} = 0$ $\overline{\ell} = 3$ $\quad$ c: $\underline{\ell} = -\frac{1}{2}$ $\overline{\ell} = \frac{1}{2}$

d: $\underline{\ell} = -2$ $\overline{\ell} = 2$ $\quad$ e: $\underline{\ell} = 0$ $\overline{\ell}$ no existe $\quad$ g: $\underline{\ell} = \overline{\ell} = 5$

h: $\overline{\ell} = 3$ $\underline{\ell}$ no existe $\quad$ j: no existen

10. SERIES NUMÉRICAS

Sea la siguiente una sucesión de números reales:

$$(a_n) = (a_1; a_2; a_3; a_4; \ldots; a_n; a_{n+1}; \ldots).$$

Consideremos las sumas parciales de sus términos:

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

....

....

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$

Formemos una nueva sucesión con las sumas parciales de la sucesión inicial (a_n).

Es decir, $(S_n) = (S_1; S_2; S_3; \ldots; S_n; \ldots)$.

Esta nueva sucesión (S_n), obtenida a partir de las sumas parciales de la primera sucesión, se llama serie numérica asociada a la sucesión (a_n).

Los números $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ son *términos de la serie* y los números $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ son sus *sumas parciales*.

Por ejemplo, siendo la sucesión inicial

$$(a_n) = \left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots; \frac{1}{n}; \ldots\right)$$

las sumas parciales de la misma son:

$$S_1 = 1;\ S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2};\ S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}\ \ldots$$

$$\ldots\ S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\ \ldots$$

y la sucesión $(S_n) = \left(1; \frac{3}{2}; \frac{11}{6}; \ldots\right)$ es la serie numérica asociada a la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)$.

Obsérvese que la sucesión inicial $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge a cero (pág. 331), mientras que la sucesión (S_n) es divergente, como se probará más adelante.

Para facilitar la notación de una serie y poner en evidencia sus términos suele llamarse serie a la suma formal

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

La serie anterior, por lo tanto, puede indicarse $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ o, más simplemente, $\sum \frac{1}{n}$.

Una serie es convergente, divergente u oscilante si y sólo si la sucesión de sumas parciales que la define es, respectivamente, convergente, divergente u oscilante.

Si la serie es convergente, el límite de la sucesión de sumas parciales se llama *suma de la serie*: $\lim (S_n) = S$, y en ese caso se asigna dicho número como valor de la suma formal:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = S.$$

Ejemplo

Sea la sucesión numérica:

$$(a_n) = \left(\frac{1}{1.2}; \frac{1}{2.3}; \frac{1}{3.4}; \ldots; \frac{1}{n(n+1)}; \ldots\right).$$

Consideremos la suma formal o serie numérica asociada a la sucesión anterior:

$$\sum a_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

Para determinar si la serie es convergente debemos saber si es convergente la sucesión de sumas parciales.

Descomponiendo en fracciones, es:

$$\forall n: \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

y, por lo tanto,

$$S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Luego, $\lim S_n = 1$, y la serie dada resulta una serie convergente cuya suma es igual a 1.

EJERCICIOS

1) Escribir el término general de las siguientes series:

$$\sum a_n = 3 - 6 + 9 + 12 - \ldots$$

$$\sum b_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} - \frac{1}{5.7} + \ldots$$

$$\sum c_n = 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} - \ldots$$

$$\sum d_n = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt[3]{a}} + \frac{1}{\sqrt[4]{a}} + \ldots (a > 0)$$

2) Escribir cuatro términos de cada una de las series siguientes:

$$\sum a_n = \sum \frac{n^{2n+1}}{2n} \qquad \sum b_n = \sum (-1)^n \frac{n+2}{(n+1)!}$$

$$\sum c_n = \sum (-1)^{n+1} \frac{3}{(n+1)!} \qquad \sum d_n = \sum \frac{2n-1}{n^2-1}$$

I. Serie geométrica

Una serie del tipo $\sum ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$ se llama serie geométrica, pues sus términos corresponden a una progresión geométrica de razón r $(r \neq 0)$.

Para hallar S_n, sabemos que:

$$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$$
$$r \cdot S_n = \qquad ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n$$

Restando, resulta: $S_n(1 - r) = a - ar^n$.

Si $r \neq 1$, es $S_n = a\,\frac{1 - r^n}{1 - r}$.

Para determinar el carácter de la serie geométrica propuesta basta calcular $\lim S_n$. Se presentan varios casos, pues dicho límite depende del valor de la razón r.

Primer caso: $-1 < r < 1$

Si $|r| < 1$, entonces $\lim r^n = 0$

y $\lim S_n = \lim \frac{a}{1-r} - \lim \frac{ar^n}{1-r} = \frac{a}{1-r}$

En este caso, entonces, la serie converge y su suma es $S = \frac{a}{1-r}$.

Ejemplo

$$\sum a_n = 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{3}{2^{n-1}} + \ldots$$

$$r = \frac{1}{2} \Rightarrow |r| < 1 \Rightarrow S = \frac{3}{1 - \frac{1}{2}} = 6.$$

Segundo caso: $r > 1$

Si $r > 1$, entonces $\lim r^n = +\infty$.

Luego, resulta $\lim S_n = +\infty$ si $a > 0$

o $\lim S_n = -\infty$ si $a < 0$.

En ambos casos la serie geométrica diverge

Ejemplo

$$\sum b_n = 1 + 3 + 9 + 27 + \ldots + 3^{n-1} + \ldots$$

$$r = 3 \Rightarrow r > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ diverge.}$$

Tercer caso: $r < -1$

Si $r < -1$, entonces $\lim r^n = \infty$ y la serie resulta divergente.

Ejemplo

$$\sum c_n = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - \ldots + (-2)^{n-1} + \ldots$$

$$r = -2 \Rightarrow r < -1 \Rightarrow \sum c_n \text{ diverge.}$$

Cuarto caso: $r = 1$

Si $r = 1$, es $S_n = a \cdot n$.

Luego, $\lim S_n = +\infty$ si $a > 0$ ó $\lim S_n = -\infty$ si $a < 0$.

En ambos casos la serie geométrica resulta divergente.

Quinto caso: $r = -1$

En esta situación, $S_n = 0$ si n es número par

y $S_n = a$ si n es número impar.

Luego, la sucesión (S_n) no tiene límite y la serie geométrica es oscilante.

Ejemplo

$$\sum d_n = 5 - 5 + 5 - 5 + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot 5 + \ldots$$

$S_{2k} = 0$ y $S_{2k-1} = 5$. Luego, $\sum d_n$ oscila

En resumen, para saber el carácter de una serie geométrica basta conocer el valor de su razón:

$|r| < 1 \Rightarrow \sum a\,r^{n-1}$ converge y $S = \dfrac{a}{1-r}$.

$|r| > 1 \Rightarrow \sum a\,r^{n-1}$ diverge.

$r = 1 \Rightarrow \sum a\,r^{n-1}$ diverge.

$r = -1 \Rightarrow \sum a\,r^{n-1}$ oscila.

EJERCICIOS

1) Indicar el carácter de las siguientes series geométricas y, en los casos de convergencia, dar la suma.

$\sum a_n = 3 + 9 - 27 + 81 - \dots$ $\qquad \sum b_n = 1 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} - \dots$

$\sum c_n = 3 + \dfrac{3}{7} + \dfrac{3}{49} + \dots$ $\qquad \sum d_n = 1 - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{36} - \dots$

II. Álgebra de series

Consideramos a continuación algunas propiedades de las series numéricas:

1) Si se multiplica cada término de una serie convergente $\sum a_n$ de suma S por un número real k, entonces la nueva serie $\sum ka_n$ también es convergente y su suma es $S' = k \cdot S$.

Sea S'_n la suma enésima de la serie $\sum ka_n$ y S_n la de la serie $\sum a_n$.

Sacando factor común es $S'_n = k \cdot S_n$.

Luego, $\lim S'_n = k(\lim S_n) = k \cdot S$.

Análogamente, si $\sum a_n$ diverge y $k \neq 0$, entonces $\sum ka_n$ diverge.

2) Si $\sum a_n$ es una serie convergente de suma A y $\sum b_n$ es una serie convergente de suma B, entonces $\sum (a_n \pm b_n)$ también es convergente y su suma es $S' = A \pm B$.

En efecto, $S'_n = A_n \pm B_n$

y $\lim S'_n = \lim(A_n \pm B_n) = A \pm B$.

3) Si $\sum a_n$ es una serie convergente de suma A, $\sum b_n$ es una serie convergente de suma B y k_1 y k_2 son dos números reales, entonces la serie $\sum c_n = \sum (k_1 a_n + k_2 b_n)$ es convergente de suma $C = k_1 A + k_2 B$ (propiedad lineal).

Esta propiedad es consecuencia de las dos anteriores.

4) Si $\sum a_n$ es una serie convergente y $\sum b_n$ es una serie divergente, entonces $\sum (a_n \pm b_n)$ es una serie divergente.

Nada puede decirse, en cambio, si las dos series son divergentes.

5) Si en una serie se suprime un número finito de términos iniciales, de suma K, entonces la nueva serie tiene el mismo carácter que la primera, y si aquélla es convergente, de suma A, la nueva serie tiene suma A − K.

Sea $\sum a_n$ una serie convergente y $\sum b_n$ la serie formada suprimiendo en $\sum a_n$ los k primeros términos, es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k+n}.$$

Luego, si llamamos A_n a la suma enésima de la primera serie y B_n a la de la segunda, es

$$B_n = A_{k+n} - A_k$$

$$\text{y} \quad \lim B_n = \lim(A_{k+n} - A_k) =$$

$$= \lim A_{k+n} - \lim A_k = A - K.$$

Esta propiedad se generaliza de la siguiente manera: si una serie numérica es convergente o divergente y se suprime en ella un número finito de términos, no se altera el carácter de la misma.

III. Condiciones de convergencia

La convergencia de una serie numérica se reduce a la convergencia de la sucesión (S_n) de sumas parciales que la define. Interesa, sin embargo, relacionar la convergencia de la serie con el comportamiento de sus términos a_n.

Para ello se deduce de inmediato que si $\sum a_n$ es una serie convergente, entonces a_n tiende a cero. Es decir, se puede demostrar la siguiente condición necesaria para que una serie sea convergente.

Condición necesaria de convergencia

Si la serie $\sum a_n$ converge, entonces $\lim a_n = 0$.

Demostración

Si la serie $\sum a_n$ converge, la sucesión (S_n) de sumas parciales tiene límite finito S.

Por definición de límite finito de una sucesión, $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 / (m > \delta \Rightarrow |S_m - S| < \epsilon)$.

Luego, $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 / m > \delta \Rightarrow |S_{m+1} - S| < \frac{\epsilon}{2} \wedge |S - S_m| < \frac{\epsilon}{2}$.

Por lo tanto, $|S_{m+1} - S| + |S - S_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Por la desigualdad triangular:

$$|(S_{m+1} - S) + (S - S_m)| \leq |S_{m+1} - S| + |S - S_m| < \epsilon.$$

Luego, $|S_{m+1} - S_m| = |a_{m+1}| < \epsilon$.

Se verifica, entonces, $\lim a_{m+1} = 0$.

Haciendo $m + 1 = n$ queda la tesis.

Esta condición de convergencia es necesaria pero no suficiente. La serie $\sum \frac{1}{n}$ (llamada serie armónica) cumple la condición, pues $\lim \frac{1}{n} = 0$, y, sin embargo, es una serie divergente, como se demostrará más adelante.

En realidad, esta condición proporciona más bien un test para determinar la "no convergencia" de una serie. En efecto, si el término general tiende a cero, nada puede afirmarse sobre el carácter de la serie. En cambio, si $\lim a_n \neq 0$, puede asegurarse que la serie no converge.

Por ejemplo, la serie $\sum \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots\ldots$ *no converge*, pues

$a_n = \frac{n}{n+1}$ y $\lim \frac{n}{n+1} = 1$.

♦ Condición necesaria y suficiente de convergencia

El criterio de Cauchy para convergencia de sucesiones proporciona una condición necesaria y suficiente para convergencia de series numéricas.

En efecto, si la sucesión (S_n) de sumas parciales es una sucesión de Cauchy, sabemos por un teorema anterior (pág. 348) que es una sucesión convergente.

Es decir, si prefijado cualquier número positivo ϵ existe $\delta > 0$ tal que $|S_m - S_n| < \epsilon$ si $m > \delta \wedge n > \delta$, entonces la sucesión de sumas parciales (S_n) converge, y recíprocamente.

Si $m > n$, es la diferencia $S_m - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_m$.

Siendo $p = m - n$, resulta $S_{n+p} - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}$, y la condición de Cauchy para convergencia de series numéricas suele enunciarse de la siguiente manera:

La serie $\sum a_n$ converge si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ y para todo $p \in N$ existe $\delta > 0 / |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \epsilon$ si $n > \delta$.

EJERCICIOS

1) Aplicando la condición necesaria de convergencia, indicar cuáles de las siguientes series no pueden ser convergentes:

$$\sum a_n = \sum \frac{1}{2^n} \qquad \sum b_n = \sum \frac{3n}{n-2} \qquad \sum c_n = \sum \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\sum d_n = \sum \frac{n}{3n+2} \qquad \sum e_n = \sum \frac{n^2}{n+1} \qquad \sum h_n = \sum \frac{2n^2-3}{5n^2+4}$$

IV. Series de términos no negativos

La serie $\sum a_n$ es una serie de términos no negativos si, como lo indica su nombre, para todo número natural n es $a_n \geq 0$.

Teorema

Una serie de términos no negativos converge si y sólo si la sucesión de sus sumas parciales está acotada.

Demostración

Como $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$ y $a_{n+1} \geq 0$, resulta $\forall n$: $S_n \leq S_{n+1}$.

Por lo tanto, la sucesión (S_n) es una sucesión monótona creciente. Por un teorema anterior (pág. 338), esta sucesión converge si y sólo si está acotada.

Como consecuencia de esta propiedad resulta que una serie de términos no negativos no puede ser oscilante, pues si la sucesión (S_n) no está acotada, entonces diverge a $+\infty$.

Aplicación

La serie $\sum \frac{1}{n}$ (serie armónica) diverge.

Demostración

Consideremos, para cualquier $n \in N$, las sumas parciales S_{2n} y S_n.

$$\text{Es } S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots\ldots + \frac{1}{2n} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots\ldots + \frac{1}{2n} = n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Luego, $\forall n$: $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$ (1).

La condición de Cauchy asegura, si la serie fuera convergente, que para

$\epsilon = \frac{1}{2}\ \exists\delta > 0/\left(n > \delta \Rightarrow S_{2n} - S_n < \frac{1}{2}\right)$.

Luego, por (1), la serie armónica no puede ser convergente. Como además es una serie de términos positivos, si no es convergente, diverge.

Es decir, la serie $\sum \frac{1}{n}$ es una serie divergente.

• V. Convergencia absoluta y condicional

Se puede considerar, para cada serie $\sum a_n$, la serie $\sum |a_n|$ formada con los valores absolutos de sus términos.

Si la serie $\sum |a_n|$ converge, la serie inicial es *absolutamente convergente*.

Si la serie $\sum a_n$ converge, pero no converge la serie de los módulos, la serie inicial *converge condicionalmente*.

Puede demostrarse fácilmente que una serie absolutamente convergente es convergente.

Teorema

Si $\sum |a_n|$ converge, entonces $\sum a_n$ también converge.

Demostración

Por la condición de Cauchy (pág. 358), como $\sum |a_n|$ es convergente,

$\forall\epsilon > 0\ \forall p \in N\ \exists\delta > 0/\big(n > \delta \Rightarrow \big||a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots\dots + |a_{n+p}|\big| =$

$= |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots\dots + |a_{n+p}| < \epsilon\big)$.

Por la propiedad triangular:

$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| \le |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}| < \epsilon$.

Luego, es $|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \epsilon$. Pero esta última es la condición de Cauchy para la serie $\sum a_n$ y, por lo tanto, asegura su convergencia.

Como ya se ha indicado, el teorema recíproco del anterior no es válido.

Ejemplo 1

La serie $\sum \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ es absolutamente convergente, pues la serie de módulos $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ es convergente (pág. 353).

Ejemplo 2

La serie $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ es condicionalmente convergente, pues la serie de módulos $\sum \frac{1}{n}$ (serie armónica) es divergente mientras converge la serie inicial, como se probará más adelante.

Consideremos la serie numérica $\sum a_n$, con infinitos términos positivos e infinitos términos negativos. Designamos b_1 al primer término positivo, b_2 al segundo, etc. Sea $-c_1$ el primer término negativo, $-c_2$ el segundo, etcétera.

Luego, cualquier suma $S_n = \sum_{h=1}^{n} a_h = \sum_{h=1}^{r} b_h - \sum_{h=1}^{s} c_h\ (r + s = n)$.

Teorema 1

Si $\sum a_n$ es condicionalmente convergente, entonces $\sum b_n$ y $\sum c_n$ son ambas divergentes.

Demostración

Si $\sum b_n$ y $\sum c_n$ fuesen ambas convergentes, $\sum (b_n + c_n)$ también sería convergente, por una propiedad anterior (pág. 356).

Pero $\sum (b_n + c_n) = \sum |a_n|$, y la serie dada resulta absolutamente convergente, en contra de la hipótesis.

Si una de ellas fuese convergente y la otra divergente, entonces $\sum (b_n - c_n)$ es divergente y la serie $\sum a_n$ resulta divergente contra la hipótesis de que converge condicionalmente.

Luego, $\sum b_n$ y $\sum c_n$ son ambas divergentes. (No pueden ser oscilantes porque $\sum b_n$ y $\sum c_n$ son ambas de términos positivos.)

Consecuencia

Si la serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente, las series $\sum b_n$ y $\sum c_n$ son ambas convergentes.

Si una de ellas fuese divergente, la serie de módulos $\sum |a_n| = \sum (b_n + c_n)$ también sería divergente, contra la hipótesis supuesta.

Reordenamiento de los términos de una serie

Si a partir de la serie $\sum a_n$ se forma otra serie $\sum h_n$ cuyos términos son los mismos números a_n, pero ubicados en distinto orden, la segunda serie es un reordenamiento de la primera.

Teorema 2

Si una serie es absolutamente convergente, entonces cualquier reordenamiento también lo es y su suma es la misma.

En primer lugar, lo demostraremos para una serie que tiene todos sus términos positivos. (Obsérvese que si una serie de términos positivos converge, converge absolutamente, pues la serie de módulos es la misma serie.)

Demostración

Sea $\sum a_n$ la serie considerada y $\sum h_n$ un reordenamiento cualquiera de la misma.

Sea, además, (A_n) la sucesión de sumas parciales de la primera serie y (H_n) la de la segunda. Ambas sucesiones (A_n) y (H_n) son sucesiones monótonas (estrictamente crecientes) de términos positivos.

Como $\sum a_n$ converge, $\lim (A_n) = \text{supremo } (A_n) = A$.

Ahora bien, para cualquier suma $H_n = h_1 + h_2 + \dots + h_n$, los términos $h_1, h_2, \dots, h_n$ son términos de la serie $\sum a_n$ y, por lo tanto, cada suma parcial H_n aparece contenida en alguna suma A_s de (A_n), que puede contener, eventualmente, otros términos a_i. Es decir, $\forall n \, \exists s / H_n \le A_s$.

Por lo tanto, como A es el supremo de (A_n), se verifica $\forall n: H_n \le A$.

Luego, la sucesión creciente (H_n) tiene límite finito y es

$$\lim (H_n) \le A \qquad (1).$$

Ahora bien, por definición de reordenamiento, cada suma A_n está contenida en alguna suma H_r, a la cual pueden pertenecer, eventualmente, otros términos h_i. Es decir, $\forall n \; \exists r / A_n \le H_r$ (2).

Como (H_r) es una subsucesión de (H_n) y ésta converge, también converge (H_r). Por un teorema anterior (pág. 346), ambas tienen el mismo límite. O sea, $\lim (H_n) = \lim (H_r)$.

Además, por (2), $\lim (H_r) \ge \lim (A_n) = A$.

Luego, es $\lim (H_n) \ge A$ (3).

De (1) y (3) resulta: $\lim (H_n) = A$ y $\sum h_n$ converge con suma A.

En segundo lugar, si la serie $\sum a_n$ tiene infinitos términos positivos e infinitos términos negativos, basta considerar las dos series convergentes de términos positivos $\sum b_n$ y $\sum c_n / \sum a_n = \sum b_n - \sum c_n$ (pág. 361).

Cualquier reordenamiento de $\sum a_n$ origina un reordenamiento de $\sum b_n$ y de $\sum c_n$. Por la primera parte de este teorema, ningún reordenamiento de una serie convergente de términos positivos altera su carácter ni su suma.

Luego, $\sum b_n = B$, $\sum c_n = C$ y se mantiene $\sum a_n = B - C$.

La propiedad anterior, propiedad conmutativa, es válida en series cualesquiera solamente si dichas series son absolutamente convergentes. Si la serie sólo converge condicionalmente, es decir, si no converge la serie de módulos, entonces, reordenando la serie inicial, pueden obtenerse nuevas series convergentes de suma prefijada, divergentes u oscilantes.

Por ejemplo, la serie

$$\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots\dots$$

converge sólo condicionalmente, pues $\sum \frac{1}{n}$ diverge (serie armónica).

Trataremos de reordenar sus términos para que su suma sea el número 1,2.

El procedimiento a utilizar es la base para la demostración del próximo teorema.

Sea S_1 la primera suma de términos positivos que resulte mayor que 1,2. Esto es posible, pues la serie formada exclusivamente con los términos positivos es divergente.

$$S_1 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

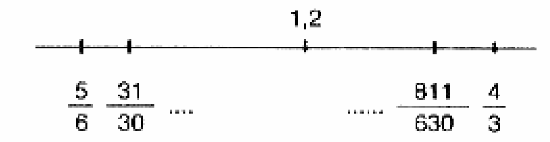
Se agrega ahora el número necesario de términos negativos para que la nueva suma sea menor que 1,2:

$$S_2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

Se suman luego términos positivos hasta obtener el primer valor mayor que 1,2:

$$S_3 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} = \frac{811}{630}.$$

Se restan ahora términos hasta conseguir la suma siguiente, próxima a 1,2 por defecto, etc.:



La nueva serie, cuyos términos se obtienen de la manera propuesta:

$$\sum d_n = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{4} \dots$$

es un reordenamiento de la serie inicial que resulta convergente, con suma 1,2.

Sus sumas parciales son:

$$D_1 = 1 \quad D_2 = \frac{4}{3} \quad D_3 = \frac{5}{6} \quad D_4 = \frac{31}{30} \quad D_5 = \frac{247}{210} \quad D_6 = \frac{811}{630} \dots$$

Como la serie inicial es convergente (condicionalmente), es $\lim a_n = 0$ y, por lo tanto, $\lim b_n = 0$ y $\lim c_n = 0$.

Para probar que 1,2 es el límite de la sucesión de sumas (D_n), basta probar que, prefijado cualquier $\epsilon > 0$, se puede determinar un n a partir del cual la diferencia $|D_n - 1{,}2| < \epsilon$. Como (b_n) y (c_n) tienden a cero, $\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0$ tal que $|b_n| < \epsilon$ y $|c_n| < \epsilon$ si $n > \delta$. Por la forma en que fueron ordenados los términos, existe m tal que $|D_m - 1{,}2| < |b_n| < \epsilon$ o $|D_m - 1{,}2| < |c_n| < \epsilon$ si $m > \delta$. Luego, $\lim (D_m) = 1{,}2$.

Teorema de Riemann

Si $\sum a_n$ converge condicionalmente y k es un número real cualquiera, entonces existe un reordenamiento de $\sum a_n$ que converge al número k.

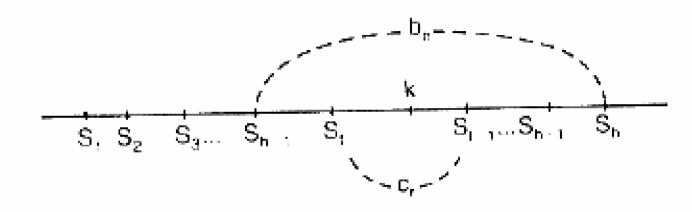
Demostración

Sean $\sum b_n$ y $\sum c_n$ las dos series divergentes, formadas respectivamente con los términos positivos y los módulos de los términos negativos de $\sum a_n$.

Se eligen términos sucesivos de $\sum b_n$ hasta obtener la primera suma parcial que supere a k. Esta suma existe por tratarse de las sumas parciales de una serie divergente.

Sea S_h dicha suma. Resulta $|S_h - k| \leq |S_h - S_{h-1}| = b_h$.

Se restan, ahora, términos sucesivos de $\sum c_r$ hasta obtener la primera suma parcial menor que k. Sea S_i dicha suma. Para las sumas $S_{h+1}, S_{h+2}, \ldots, S_{i-1}$ la diferencia con el número k es menor que b_h. Además, $|S_i - k| \leq c_r$.



Continuando de esa manera se forma una serie de sumas parciales S_n. Por la forma en que se han elegido estas sumas, y recordando que $\lim b_n = \lim c_n = 0$, prefijado cualquier $\epsilon > 0$ es posible hallar $\delta > 0$ tal que $|S_n - k| < \epsilon$ si $n > \delta$. Luego, $\lim (S_n) = k$ y la sucesión (S_n) converge al número k.

Por un procedimiento similar se puede obtener, con los términos de la serie inicial, un reordenamiento que sea divergente a $+\infty$, divergente a $-\infty$, oscilante entre números reales prefijados o divergente a ∞.

EJERCICIOS

1) Convergencia absoluta o condicional de las series siguientes:

$$\sum a_n = \sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2+1} \qquad \sum b_n = \sum (-1)^n \frac{a}{2^n}$$

$$\sum c_n = \sum (-1)^n \frac{1}{n^3} \qquad \sum d_n = \sum (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^3}$$

2) Dar un reordenamiento de la serie siguiente, cuya suma sea 1,5:

$$\sum a_n = \sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

VI. Criterios de convergencia para series de términos no negativos

Como consecuencia del teorema que asegura la convergencia de una serie si converge la de sus módulos, que son números no negativos, en muchas ocasiones interesa conocer el comportamiento exclusivo de las series de este tipo.

Por otra parte, ninguna de las condiciones de convergencia consideradas hasta ahora sirve, en la práctica, para determinar de manera simple el carácter de una serie.

Para ello recurriremos a criterios de convergencia cuya aplicación es inmediata. Estos criterios son válidos exclusivamente para series de términos no negativos y, en algunos casos, solamente para series de términos positivos.

Criterios de comparación

Hemos visto ya algunas series cuyo carácter es fácil determinar, como las series geométricas y la serie armónica. Estas series se utilizan para determinar el carácter de otras series por comparación.

1) Convergencia

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series numéricas, ambas de términos no negativos. Si $\forall n \in N: a_n \leq b_n$ y, además, $\sum b_n$ converge con suma B, entonces $\sum a_n$ también converge y su suma no supera a B. ($\sum b_n$ es una serie *mayorante* de $\sum a_n$.)

Demostración

Considerando las sumas parciales de ambas series, resulta

$$\forall n: A_n \leq B_n \qquad (1).$$

Como (B_n) es una sucesión creciente de límite B, dicho número B es el extremo superior de (B_n).

Por (1), B también es cota para la sucesión creciente (A_n) y, por lo tanto, existe $\lim (A_n)$ y dicho límite es menor o igual que B.

Nota: En la hipótesis de este teorema se ha exigido que la desigualdad $a_n \leq b_n$ se verifique para todo número natural n. Esta condición es más fuerte que la siguiente, con la cual la tesis del teorema también se cumple en lo relativo al carácter de las series: basta que exista un número natural r tal que $a_n \leq b_n$ si $n > r$. En efecto, si la desigualdad no se verifica para $n \leq r$, pueden suprimirse los r primeros términos en ambas series, con lo cual el carácter de las mismas no varía (pág. 357).

Ejemplo

Trataremos de determinar el carácter de la siguiente serie de términos positivos:

$$\sum a_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

Consideremos la serie geométrica:

$$\sum b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots\dots$$

Esta última serie es convergente, pues su razón es $\frac{1}{2}$.

Además se observa que: $\frac{1}{n!} = \frac{1}{1.2.3...n} \leq \frac{1}{1.2.2...2} = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Luego, $\forall n$: $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, o sea, $a_n \leq b_n$, y $\sum a_n$ es serie convergente por comparación.

2) **Divergencia**

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series de términos no negativos. Si para cualquier número natural n es $a_n \geq b_n$ y, además, $\sum b_n$ diverge, entonces $\sum a_n$ también diverge. $\left(\sum b_n\right.$ es una serie *minorante* de $\left.\sum a_n.\right)$

Demostración

Si la sucesión (B_n) de sumas parciales de $\sum b_n$ diverge, $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0/$ $B_n > \epsilon$ si $n > \delta$, por definición de límite infinito positivo de una sucesión.

Como $\forall n$ y $\forall \epsilon > 0$: $A_n \geq B_n > \epsilon$ si $n > \delta$, la sucesión de sumas (A_n) también diverge.

Ejemplo

Consideremos la serie siguiente:

$$\sum a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots\dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots\dots$$

y tratemos de probar que es divergente.

Para ello buscamos una serie minorante; por ejemplo, la serie armónica

$$\sum b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\dots + \frac{1}{n} + \dots\dots$$

Resulta $\forall n$: $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$, o sea, $\forall n$: $a_n \geq b_n$.

Como $\sum b_n$ diverge, también diverge $\sum a_n$.

Análogamente, la serie $\sum \frac{1}{n^r}$ diverge si $r < 1$, pues, comparando con la serie armónica, $\forall n$: $\frac{1}{n^r} \geq \frac{1}{n}$

Obsérvese que si la serie conocida es convergente, los términos de la serie por investigar deben ser menores que los de aquélla, y que en cambio nada puede asegurarse si son mayores. Nada puede asegurarse, tampoco, de una serie cuyos términos son menores que los de una serie divergente.

Consecuencias del criterio de comparación

1) Dadas dos series numéricas $\sum a_n$ y $\sum b_n$, ambas de términos no negativos, si $\sum b_n$ converge y $\exists r \in N / n \geq r \Rightarrow a_n \leq kb_n$, donde k es un número positivo, entonces $\sum a_n$ también converge.

Demostración

Si $\sum b_n$ converge, también converge $\sum kb_n$ (pág. 356). Luego, basta aplicar el criterio de comparación a las series $\sum a_n$ y $\sum kb_n$.

Análogamente, si $\sum b_n$ diverge y $a_n \geq kb_n$ $(k > 0)$, entonces $\sum a_n$ también diverge.

2) Dadas dos series numéricas $\sum a_n$ y $\sum b_n$, ambas de términos *positivos*, si $\sum b_n$ converge y $\exists r \in N / \left(n \geq r \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}}\right)$, entonces $\sum a_n$ también converge.

♦ *Demostración*

La condición de la hipótesis se verifica para $n = r$. Es decir,

$$\frac{a_r}{a_{r-1}} \leq \frac{b_r}{b_{r-1}} \quad (1) \quad \Leftrightarrow \quad a_r \leq \frac{a_{r-1}}{b_{r-1}} \cdot b_r$$

Sea $k = \frac{a_{r-1}}{b_{r-1}} > 0$. Probaremos que la relación $a_n \leq k \cdot b_n$ se verifica también para *todo* $n > r$.

Consideremos la condición de la hipótesis para $n = r + 1$.

Resulta $\quad a_{r+1} \leq \frac{a_r}{b_r} \cdot b_{r+1} \qquad (2).$

Como $\frac{a_r}{b_r} \leq \frac{a_{r-1}}{b_{r-1}} = k$ por (1), si en la relación (2) se sustituye el cociente $\frac{a_r}{b_r}$ por el número k, la desigualdad se mantiene y resulta $a_{r+1} \leq k \cdot b_{r+1}$.

La misma relación puede probarse por inducción para cualquier subíndice n posterior a (r + 1).

Es decir, $\forall n$: $n \geq r \Rightarrow a_n \leq k \cdot b_n$, donde $k = \frac{a_{r-1}}{b_{r-1}}$.

Aplicando la primera consecuencia del criterio de comparación, $\sum a_n$ es una serie convergente.

Aunque el criterio de comparación y sus consecuencias son más accesibles que las condiciones de convergencia vistas anteriormente, tampoco es fácil, en la práctica, encontrar la serie que resulta conveniente para la comparación.

El criterio siguiente, en cambio, es de aplicación mecánica y simple, si bien no da conclusiones para todos los casos.

Criterio de D'Alembert*

Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos. Si existe el límite ℓ del cociente de cada término sobre el anterior y $\ell < 1$, entonces la serie es convergente. Si $\ell > 1$, entonces la serie es divergente. (Si $\ell = 1$ nada puede asegurarse sobre el carácter de la serie.)

Primera parte: $\lim \frac{a_n}{a_{n-1}} = \ell$ y $\ell < 1$

Demostración

Por propiedad del conjunto de los números reales, $\exists k > 0$ tal que $\ell < k < 1$.

Además, por propiedad del límite finito de una sucesión (pág. 335), si

$\lim \frac{a_n}{a_{n-1}} < k$, entonces

$$\exists r \in N / \left(n > r \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} < k\right).$$

Luego, $\frac{a_n}{a_{n-1}} < \frac{k^n}{k^{n-1}}$ si $n > r$.

Pero $\sum k^n$ es una serie geométrica de razón k y es convergente, pues $0 < k < 1$.

Aplicando la segunda consecuencia del criterio de comparación, $\sum a_n$ resulta convergente.

Segunda parte: $\lim \frac{a_n}{a_{n-1}} = \ell$ y $\ell > 1$

Demostración

Por propiedad de límite finito de una sucesión (pág. 335),

$$\exists r \in N / \left(n > r \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} > 1\right)$$

y, por lo tanto, $a_n > a_{n-1}$ si $n > r$.

* Jean D'Alembert (1717-1783), científico y matemático que integró el grupo de filósofos franceses que publicaron la *Enciclopedia*. Es conocido, en especial, por sus trabajos sobre mecánica.

Es decir, como los términos de la serie son positivos y forman una sucesión estrictamente creciente, es $\lim a_n \neq 0$.

Pero en una serie de términos positivos, si el término general no tiende a cero, la serie diverge.

Ejemplo 1

Aplicando el criterio de D'Alembert, averiguar el carácter de la serie siguiente:

$$\sum \frac{n}{5^n}$$

$$\lim \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim \frac{\frac{n}{5^n}}{\frac{n-1}{5^{n-1}}} = \lim \frac{n}{5(n-1)} = \frac{1}{5} < 1 \Rightarrow \sum \frac{n}{5^n} \text{ converge.}$$

Ejemplo 2

Averiguar el carácter de la serie $\sum \frac{3^n}{n}$

$$\lim \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim \frac{\frac{3^n}{n}}{\frac{3^{n-1}}{n-1}} = \lim \frac{3(n-1)}{n} = 3 > 1 \Rightarrow \sum \frac{3^n}{n} \text{ diverge.}$$

Ejemplo 3

Determinar el carácter de la serie $\sum \frac{1}{n^2+1}$

$$\lim \frac{\frac{1}{n^2+1}}{\frac{1}{(n-1)^2+1}} = \lim \frac{n^2-2n+2}{n^2+1} = 1.$$

En este caso el criterio de D'Alembert no informa sobre el carácter de la serie.

Obsérvese que en la serie armónica $\lim \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}} = 1$ y $\sum \frac{1}{n}$ diverge. En cambio, en la serie $\sum \frac{1}{n^2}$, también $\lim \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n-1)^2}} = 1$, y puede probarse que $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Nota: El criterio de D'Alembert exige que $\lim \frac{a_n}{a_{n-1}} = \ell < 1$, y no basta la condición $\frac{a_n}{a_{n-1}} < 1$ para que la serie sea convergente.

En la serie armónica, por ejemplo,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}} = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1,$$

y la serie armónica diverge.

Si no se desea aplicar límite, la condición de convergencia de D'Alembert exige que el cociente $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ se conserve menor que un número $k < 1$.

O sea, si $\exists r \in N / \left(n > r \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} < k < 1\right)$, entonces $\sum a_n$ converge.

El criterio de D'Alembert puede completarse demostrando que si

$$\lim \frac{a_n}{a_{n-1}} = +\infty,$$

entonces la serie diverge.

Criterio de la raíz (Cauchy)

Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos. Si existe $\ell = \lim \sqrt[n]{a_n}$ y $\ell < 1$, entonces, $\sum a_n$ converge. Si $\ell > 1$, entonces $\sum a_n$ diverge. (Si $\ell = 1$ nada puede asegurarse.)

La demostración es análoga a la del criterio de D'Alembert.

Primera parte: $\lim \sqrt[n]{a_n} = \ell$ y $\ell < 1$

Demostración

Por propiedad del conjunto $\mathbb{R}$, si $\ell < 1$, entonces existe un número real k tal que $\ell < k < 1$.

Por propiedad del límite finito de una sucesión, existe un número natural r tal que: $(n > r \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} < k)$.

Luego, $a_n < k^n$, y como $\sum k^n$ es una serie geométrica convergente, la serie $\sum a_n$ converge.

Segunda parte: $\lim \sqrt[n]{a_n} = \ell$ y $\ell > 1$

Demostración

Por propiedades anteriores existe un número natural r tal que: $(n > r \Rightarrow a_n > 1)$.
Luego, $\lim a_n \neq 0$ y la serie $\sum a_n$ diverge.

Ejemplo

Aplicando el criterio de la raíz, averiguar el carácter de las siguientes series:

1) $\sum \frac{1}{n^n}$

$$\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim \frac{1}{n} = 0 < 1 \Rightarrow \sum \frac{1}{n^n} \text{ converge.}$$

2) $\sum \left(\frac{1}{\ln 2}\right)^n$

$$\lim \sqrt[n]{\left(\frac{1}{\ln 2}\right)^n} = \frac{1}{\ln 2} > 1 \Rightarrow \sum \left(\frac{1}{\ln 2}\right)^n \text{ diverge.}$$

Criterio de Raabe*

Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos. Si existe $\ell = \lim \left[n\left(1 - \frac{a_n}{a_{n-1}}\right)\right]$ y $\ell > 1$, entonces $\sum a_n$ converge. Si $\ell < 1$, entonces $\sum a_n$ diverge. (Si $\ell = 1$ nada puede asegurarse.)

Primera parte: $\lim \left[n\left(1 - \frac{a_n}{a_{n-1}}\right)\right] = \ell$ y $\ell > 1$

Demostración

Si $\ell > 1$, entonces $\exists c > 0 / \ell > 1 + c > 1$.
Además, por una propiedad de las sucesiones convergentes (pág. 335),

$$\exists r \in N / n > r \Rightarrow n\left(1 - \frac{a_n}{a_{n-1}}\right) > 1 + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \frac{a_{n-1} - a_n}{a_{n-1}} > 1 + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n\, a_{n-1} - n\, a_n > a_{n-1} + c\, a_{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n-1)a_{n-1} - n\, a_n > c\, a_{n-1} \qquad (1).$$

* José Luis Raabe (1801-1895), matemático y astrónomo alemán, profesor de la Universidad de Zurich. Es autor de varias obras sobre cálculo diferencial y sobre astronomía.

La demostración no pierde generalidad si se supone $r = 1$, pues si $r > 1$ basta suprimir los r términos iniciales y el carácter de la serie no cambia (pág. 357).

Por lo tanto, la relación (1) es válida para todo número natural $n > r = 1$.

$$\begin{array}{lll} \text{Si } n = 2, \text{ es} & a_1 - 2a_2 > c\,a_1 \\ n = 3 & 2a_2 - 3a_3 > c\,a_2 \\ n = 4. & 3a_3 - 4a_4 > c\,a_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ n = h & (h-1)a_{h-1} - ha_h > c\,a_{h-1} \end{array}$$

Sumando, al cancelar términos resulta:

$$a_1 - ha_h > c(a_1 + a_2 + \ldots + a_{h-1}).$$

Luego, $a_1 + a_2 + \ldots + a_{h-1} < \frac{a_1 - ha_h}{c} < \frac{a_1}{c} = k$, donde k no depende de h.

Es decir, existe un número positivo k tal que $\forall h$: $S_{h-1} < k$. O sea, la sucesión de sumas parciales está acotada, lo cual implica que la serie es convergente.

Segunda parte: $\lim n\left(1 - \frac{a_n}{a_{n-1}}\right) = \ell$ y $\ell < 1$

Demostración

Por propiedad del límite finito de una sucesión,

$$\exists r \in N / n > r \Rightarrow n\left(1 - \frac{a_n}{a_{n-1}}\right) < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow | n - n\frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow | n < 1 + n\frac{a_n}{a_{n-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow | n - 1 < n\frac{a_n}{a_{n-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow | \frac{n-1}{n} < \frac{a_n}{a_{n-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow | \frac{a_n}{a_{n-1}} > \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}}$$

El segundo miembro de la desigualdad anterior es el cociente de dos términos

consecutivos de la serie armónica. Por la segunda consecuencia del criterio de comparación, $\sum a_n$ resulta divergente.

Ejemplo

Aplicando el criterio de Raabe, determinar el carácter de la serie $\sum \frac{1}{n^2}$

$$\lim\left[n\left(1 - \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n-1)^2}}\right)\right] = \lim\left[n\left(1 - \frac{(n-1)^2}{n^2}\right)\right] =$$

$$= \lim\left[n\left(\frac{2n-1}{n^2}\right)\right] = \lim\frac{2n-1}{n} = 2 > 1 \Rightarrow \sum\frac{1}{n^2} \text{ converge.}$$

Obsérvese que el criterio de D'Alembert no proporciona información sobre el carácter de la serie,

$$\text{pues } \lim\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n-1)^2}} = 1.$$

EJERCICIOS

1) Aplicar el criterio de comparación para demostrar que la serie $\sum\frac{1}{n^h}$ converge si $h > 1$.

2) Aplicar el criterio de comparación para determinar el carácter de las series siguientes:

a) $\sum\frac{1}{n^2+1}$ b) $\sum\frac{1}{n\,2^n}$ c) $\sum\frac{1}{2^{n-1}+1}$

d) $\sum\frac{n^2+1}{n^3+1}$ e) $\sum\frac{1}{7\sqrt{n}}$ f) $\sum\frac{1}{n^n}$

3) Aplicar el criterio de D'Alembert:

a) $\sum\frac{1}{n!(n+1)!}$ b) $\sum\frac{n+2}{3^n}$ c) $\sum\frac{(n+1)(n-2)}{n!}$

d) $\sum\frac{1}{n!}$ e) $\sum\frac{n^2+1}{n^3+1}$ f) $\sum\frac{5^n}{n!}$

g) $\sum\frac{n!}{n+1}$ h) $\sum\frac{n}{2^n}$ i) $\sum\frac{n^2}{(n+1)!}$

j) $\sum\frac{n^2}{4^{n-1}}$ k) $\sum\frac{n!}{5\,n^n}$ l) $\sum\frac{(n-1)(n+2)}{n^3}$

m) $\sum \frac{2^n\, n!}{n^n}$ n) $\sum \frac{(n+3)!}{3!\,n!\,3^n}$ o) $\sum \frac{n(n+1)}{5^n}$

q) $\sum \frac{n!}{(n+1)^n}$

4) ¿Para qué valores de a converge la serie $\sum \frac{a^n}{n!}$?

5) Aplicar el criterio de la raíz:

a) $\sum \frac{1}{n^n}$ b) $\sum \left(\frac{a}{n}\right)^n (a>0)$ c) $\sum \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ d) $\sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$

6) Aplicar el criterio de Raabe:

a) $\sum \frac{a}{(2n+1)(2n-1)}$ b) $\sum \frac{1}{n^2+1}$ c) $\sum \frac{1}{n(n+1)}$

d) $\sum \frac{5}{n^2}$ e) $\sum \frac{n^2-1}{2n^2-1}$ f) $\sum \frac{n-1}{2n^2+1}$

VII. Series alternadas

Si los términos de una serie de números reales son alternadamente positivos y negativos, la serie recibe el nombre de serie alternada.

Por ejemplo, $\sum (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots \ (a_n > 0)$ es una serie alternada.

Criterio de convergencia

Si (a_n) es una sucesión de números reales positivos que decrece estrictamente, entonces $\sum (-1)^{n+1} a_n$ converge si y sólo si $\lim a_n = 0$.

Primera parte: Si la serie alternada converge, entonces $\lim a_n = 0$.
Es la condición necesaria de convergencia para cualquier serie numérica (pág. 357).

Segunda parte: Si $\lim a_n = 0$, entonces la serie indicada converge.
a) Las sumas de índice par forman una sucesión estrictamente creciente.

$$S_{2n+2} = S_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2})$$
$$S_{2n+2} = S_{2n} + \epsilon \ (\epsilon > 0, \text{ pues } a_{2n+1} > a_{2n+2}, \text{ ya que } (a_n) \text{ es estrictamente decreciente})$$

Luego, $\forall n$: $S_{2n} < S_{2n+2}$ y $S_2 < S_4 < S_6 < \dots < S_{2n} < S_{2n+2} < \dots$
O sea, (S_{2n}) es estrictamente creciente.
b) Las sumas de índice impar forman una sucesión estrictamente decreciente.

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} - (a_{2n} - a_{2n+1})$$
$$S_{2n+1} = S_{2n-1} - \epsilon \qquad (\epsilon > 0)$$

Luego, $\forall n$: $S_{2n-1} > S_{2n+1}$ y $S_1 > S_3 > S_5 > \dots > S_{2n-1} > S_{2n+1} > \dots$
O sea, (S_{2n+1}) es estrictamente decreciente.

c) Cualquier suma de índice impar es mayor que la correspondiente suma de índice par.

$$\forall n: S_{2n} = S_{2n+1} - a_{2n+1} \Rightarrow \forall n: S_{2n} < S_{2n+1}.$$

Ahora bien, la sucesión creciente de sumas pares está acotada superiormente por cualquier suma impar y, análogamente, la sucesión decreciente de sumas impares está acotada inferiormente por cualquier suma par.

$$S_2 < S_4 < \dots < S_{2n} < \dots < S_{2n+1} < \dots < S_3 < S_1.$$

Por el teorema fundamental de sucesiones monótonas acotadas (pág. 338), ambas sucesiones tienen límite finito.
Es decir,

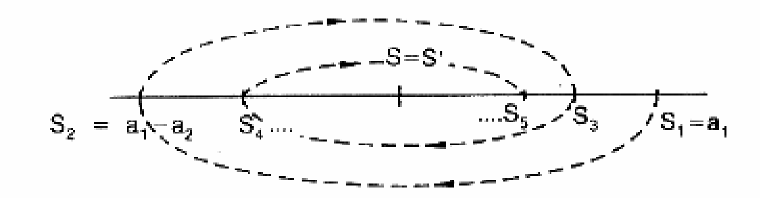
$$\exists S / \lim S_{2n} = S \ \text{ y } \ \exists S' / \lim S_{2n+1} = S'.$$

Ahora bien, $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$.
$\lim S_{2n+1} = \lim S_{2n} + \lim a_{2n+1}$.

Como por hipótesis es $\lim a_{2n+1} = 0$, resulta:

$$S' = S + 0.$$

Luego, la sucesión (S_n) de sumas parciales (pares e impares) tiene un límite único y la serie considerada es convergente.
Gráficamente:



Ejemplo

La serie alternada $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ es convergente.

En efecto, la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)$ de sus términos es estrictamente decreciente, pues $\forall n: \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$. Además es $\lim \frac{1}{n} = 0$.

EJERCICIOS

Indicar el carácter de las siguientes series alternadas:

a) $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ b) $\sum (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n}$

c) $\sum (-1)^n \frac{n-2}{3n}$ d) $\sum (-1)^n \frac{2}{n^2+1}$

• VIII. Series de funciones

Hasta ahora se han estudiado solamente sucesiones y series numéricas. Pueden considerarse también sucesiones y series funcionales, es decir, sucesiones y series cuyos términos son funciones escalares.

Sucesión de funciones es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales y cuyo recorrido es un conjunto de funciones escalares.

$(f_n) = (f_1; f_2; f_3; \ldots; f_n; \ldots)$ es una sucesión numerable de funciones reales.

Serie de funciones o serie funcional asociada a una sucesión de funciones es la sucesión de sumas parciales de la misma.

Es decir, valen definiciones análogas a las de sucesiones y series numéricas. Pero si bien la definición puede parecer similar, el concepto es diferente y mucho más amplio.

Sea la siguiente una serie de funciones:

$$\sum f_r = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n + \ldots$$

Si x es un punto que pertenece simultáneamente al dominio de cada una de las funciones consideradas, entonces

$$\sum f_r(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

es una serie numérica.

Es decir, para cada número x que pertenece a la intersección de los dominios de las n funciones, la serie de funciones se transforma en una serie numérica que puede o no ser convergente.

Por ejemplo, si la serie $\sum f_n(x)$ es convergente en el punto x_1, por definición de serie convergente existe un *número real* que es su suma y al cual designamos $f(x_1)$.

O sea, $\exists f(x_1) / f(x_1) = \sum f_r(x_1)$.

Se cumple:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta (\epsilon, x_1) > 0 / \left| \sum_{r=1}^{r} f_r(x_1) - f(x_1) \right| < \epsilon \text{ si } n > \delta.$$

Análogamente, si la serie converge para x_2,

$$\exists f(x_2) / \sum f_n(x_2) = f(x_2) \qquad \text{y}$$

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta' (\epsilon, x_2) > 0 / \left| \sum_{n=1}^{n} f_n(x_2) - f(x_2) \right| < \epsilon \text{ si } n > \delta'.$$

Aunque se elija el mismo número ϵ para ambas series, en general $\delta \neq \delta'$, pues cada uno de ellos depende, respectivamente, de x_1 y x_2, además de depender de ϵ.

Si consideramos el conjunto $I = \{x_1, x_2\}$, la serie $\sum f_n(x)$ es convergente en I, y para cada ϵ basta elegir el mayor entre δ y δ' que resulta válido para ambas series.

Si el conjunto $I = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ es un conjunto finito de n elementos, y la serie de funciones converge simultáneamente para los n valores de x, el mayor entre los valores de δ es válido para todos los casos y la serie $\sum f_n(x)$ converge en I.

Si se trata, en cambio, de un conjunto I de infinitos elementos, no siempre es posible encontrar un número δ que dependa de ϵ y no dependa, además, de cada valor de x.

Si ello es posible, se dice que la serie de funciones es *uniformemente convergente*. Puede probarse que la convergencia uniforme es una propiedad más fuerte que la convergencia, pues implica la convergencia de la serie funcional, pero el recíproco es falso.

Definiciones

1) La serie de funciones $\sum f_n$ es *convergente* en el conjunto I si y sólo si, para todo $x \in I$, la serie numérica $\sum f_n(x)$ es convergente.

O sea,

$$\forall x \in I: \left[\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 / \left(n > \delta \Rightarrow \left| \sum_{h=1}^{n} f_h(x) - f(x) \right| < \epsilon \right) \right].$$

2) La serie de funciones $\sum f_n$ converge uniformemente en el conjunto I si

$$\forall \epsilon > 0: \left[\exists \delta > 0 / \forall x \in I: \left(n > \delta \Rightarrow \left| \sum_{h=1}^{n} f_h(x) - f(x) \right| < \epsilon \right) \right].$$

La diferencia fundamental entre ambas definiciones está, como ya se ha indicado, en que la convergencia uniforme exige, además de la convergencia, que el número δ que se determina para cada ϵ sea independiente del número x.

En el caso de series numéricas, convergencia y convergencia uniforme son equivalentes, pues hay un solo valor x.

Las series de funciones uniformemente convergentes definen, a su vez, nuevas funciones.

Puede demostrarse, por ejemplo, que la suma de una serie uniformemente convergente de funciones continuas en un conjunto I es también una función continua en I. Esta propiedad no es válida si la serie de funciones converge pero su convergencia no es uniforme.

Entre las series de funciones, las más simples son las series de potencias, que se utilizan para el desarrollo en serie de funciones según las fórmulas de Taylor o de Maclaurin.

Series de potencias

La serie

$$\sum a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots + a_n(x-c)^n + \dots$$

es una serie de potencias. Los números reales $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ son los coeficientes de la serie.

En particular, si $c = 0$, se obtiene la serie de potencias

$$\sum a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

Nos referiremos exclusivamente a series de potencias de este último tipo, pues cualquier serie $\sum a_n(x-c)^n$ puede llevarse a la forma $\sum a_n x'^n$ haciendo $x' = x - c$.

Como ya se ha visto, sólo para valores de x que hacen convergente a la respectiva serie numérica, la expresión $\sum a_n x^n$ define una función escalar.

Es decir, si la serie es convergente para cada número real x de un conjunto I, existe una función cuyo dominio es I y cuyo recorrido se obtiene asignando como imagen, para cada número x, la suma de la serie numérica correspondiente.

Veamos ahora distintos casos de convergencia para una serie $\sum a_n x^n$.

Se presentan tres situaciones posibles: series que convergen solamente para $x = 0$; series que convergen para cualquier número real x, y series que convergen para algunos valores de x y no convergen para otros.

Primer caso

Puede observarse que la serie $\sum a_n x^n$ converge si $x = 0$. Esto se comprueba sustituyendo x por 0 en la serie dada.

Ahora bien, toda serie $\sum a_n x^n$ converge para $x = 0$, pero algunas de ellas solamente convergen para ese valor.

Por ejemplo, la serie $\sum n!\, x^n$ solamente converge si $x = 0$. En efecto, si elegimos cualquier número $x_0 \neq 0$, el término general de la serie numérica $\sum n! x_0^n$ tiende a infinito y no se cumple la condición necesaria de convergencia. Por lo tanto, la serie dada no converge para ningún número $x \neq 0$.

Segundo caso

Hay series que convergen para cualquier valor de x. Consideremos la serie

$$\sum \frac{x^n}{n!}.$$

Elijamos cualquier número $x_0 \neq 0$ y consideremos la serie de términos positivos

$$\sum \frac{|x_0^n|}{n!}.$$

Si aplicamos el criterio de D'Alembert a la serie numérica de términos positivos $\sum \frac{|x_0^n|}{n!}$, resulta:

$$\lim \frac{\frac{|x_0^n|}{n!}}{\frac{|x_0^{n-1}|}{(n-1)!}} = \lim \frac{|x_0|}{n} = 0 < 1.$$

Luego, la serie $\sum \frac{|x^n|}{n!}$ converge para cualquier número x y lo mismo sucede con la serie $\sum \frac{x^n}{n!}$, que es absolutamente convergente (pag. 360)

Tercer caso

Otras series, en cambio, convergen solamente para algunos valores de x.

La serie $\sum x^n$, por ejemplo, sólo converge si $|x| < 1$, pues para cada x la serie indicada es una serie geométrica de razón x.

Teorema 1

Si la serie de potencias $\sum a_n x^n$ converge para el valor $x_0 \neq 0$, entonces converge absolutamente para cualquier valor de x tal que $|x| < |x_0|$.

Demostración

Si $\sum a_n x_0^n$ converge, entonces el término general de la serie tiende a cero.

Si elegimos $\epsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que para todo número natural $n > \delta$ resulta $|a_n x_0^n| < 1$ (1).

Ahora bien,

$$|a_n x^n| = \left|a_n x_0^n \cdot \frac{x^n}{x_0^n}\right| \Rightarrow |a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \quad (2).$$

Por (1), $|a_n x_0^n| < 1$ si $n > \delta$.

Reemplazando en (2): $|a_n x^n| < 1 \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ si $n > \delta$.

O sea, $|a_n x^n| < \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ si $n > \delta$.

Si x es un número que cumple la condición $|x| < |x_0|$, es $q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$.

Luego, si $n > \delta$, entonces es $|a_n x^n| < q^n$, y la serie $\sum |a_n x^n|$ converge por comparación con la serie geométrica $\sum q^n$. Por lo tanto, $\sum a_n x^n$ converge absolutamente.

Teorema 2

Si una serie de potencias $\sum a_n x^n$ no converge para el valor x_0, entonces tampoco converge para un número x si $|x| > |x_0|$.

Demostración

Suponemos que existe un número x_1 para el cual $|x_1| > |x_0|$ y la serie $\sum a_n x_1^n$ converge.

Ahora bien, la serie $\sum a_n x_1^n$ converge, de acuerdo con nuestra suposición, y no converge para el número x_0, siendo $|x_0| < |x_1|$.

Esto contradice al teorema 1 y, por lo tanto, la suposición inicial es falsa.

Luego, $\sum a_n x^n$ no converge en las condiciones dadas si $|x| > |x_0|$.

Radio e intervalo de convergencia

Definiremos ahora radio e intervalo de convergencia para los tres casos propuestos en la página 378.

1) Si la serie $\sum a_n x^n$ converge solamente para $x = 0$, el radio de convergencia y el intervalo de convergencia son ambos nulos.

2) Si la serie $\sum a_n x^n$ converge para cualquier número real x, el intervalo de convergencia es **R**. En este caso el radio de convergencia es infinito $(+\infty)$.

3) Si la serie $\sum a_n x^n$ converge solamente para algunos valores de x y no converge para otros, sea A el conjunto formado con los módulos de los valores de x para los cuales la serie es convergente.

El número positivo r es el radio de convergencia de la serie $\sum a_n x^n$ si y sólo si r es el supremo del conjunto A.

Si r es el radio de convergencia de la serie, el intervalo $(-r;r)$ es su intervalo de convergencia.

Puede probarse, si la serie $\sum a_n x^n$ tiene radio de convergencia r, que la serie converge absolutamente para cualquier número x si $|x| < r$ y que no converge si $|x| > r$. (Obsérvese que nada se afirma sobre el comportamiento de la serie para $|x| = r$, que depende de cada caso en particular.)

Cálculo del radio de convergencia

Consideremos la serie $\sum a_n x^n$. Sabemos que esta serie converge si $\sum |a_n x^n|$ converge.

Si existe $\lim \left|\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\right| = \ell$, para cada número x es $\lim \left|\dfrac{a_n\, x^n}{a_{n-1}\, x^{n-1}}\right| = \ell \cdot |x|$.

Aplicando el criterio de D'Alembert, para cada x resulta:

$$\ell \cdot |x| < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum a_n x^n \text{ converge y}$$

$$\ell \cdot |x| > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum a_n x^n \text{ diverge.}$$

Es decir, para $\lim \left|\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\right| = \ell \neq 0$, la serie $\sum a_n x^n$ converge si $|x| < \dfrac{1}{\ell}$ y diverge si $|x| > \dfrac{1}{\ell}$.

Si es $\ell = 0$, la serie converge para cualquier valor de x.
En efecto, $\forall x: \ell \cdot |x| = 0 < 1$.

Aplicación

Hallar el radio de convergencia de cada una de las series siguientes:

1) $\sum n\, x^n$

$$a_n = n \wedge a_{n-1} = n - 1 \quad \Rightarrow \quad \ell = \lim \left|\frac{n}{n-1}\right| = 1.$$

Luego, $r = \dfrac{1}{\ell} \Rightarrow r = 1$ y la serie converge si $|x| < 1$.

2) $\sum \dfrac{x^n}{n!}$

$$a_n = \frac{1}{n!} \wedge a_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} \quad \Rightarrow \quad \ell = \lim \left|\frac{(n-1)!}{n!}\right| = 0.$$

Luego, $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge para cualquier número real x.

Serie de Maclaurin

Ya se ha visto en el capítulo 8 la fórmula para el desarrollo de una función utilizando el polinomio de Taylor o el de Maclaurin.

Si f tiene derivada finita continua de orden (n+1) en el origen, la fórmula de Maclaurin es (pág. 309):

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)\, x^n}{n!} +$$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(z)\, x^{n+1}}{(n+1)!} \quad (z \text{ entre x y c}).$$

O sea, $f(x) = \displaystyle\sum_{h=0}^{n} \frac{f^{(h)}(0)\, x^h}{h!} + r_{n+1}(x)$ (1), donde $r_{n+1}(x)$ es el término complementario.

Si la función f tiene, para todo n, n derivadas finitas en el intervalo (−r;r), la siguiente serie de potencias se llama serie de Maclaurin correspondiente a f:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{f^{(h)}(0)\,x^h}{h!} = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)\,x^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(h)}(0)\,x^h}{h!} + \ldots \quad (2) \quad (\text{para } |x| < r).$$

Interesa saber en qué condiciones las expresiones (1) y (2) coinciden, o sea, en qué condiciones es $f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{f^{(h)}(0)\,x^h}{h!}$.

En primer lugar, la igualdad anterior sólo tiene sentido si la serie de potencias es convergente para cada número x que se considera, es decir, si r es el radio de convergencia de la serie debe ser $|x| < r$.

En segundo lugar, el término complementario debe tender a cero cuando $n \to \infty$.

En efecto, por (1), $f(x) - \sum_{h=0}^{n} \frac{f^{(h)}(0)\,x^h}{h!} = r_{n+1}(x)$.

Luego, $\lim_{n\to\infty} \left[f(x) - \sum_{h=0}^{n} \frac{f^{(h)}(0)\,x^h}{h!} \right] = \lim_{n\to\infty} \left[r_{n+1}(x) \right]$.

O sea, $\lim_{n\to\infty} \left[f(x) - \sum_{h=0}^{n} \frac{f^{(h)}(0)\,x^h}{h!} \right] = f(x) - \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{h=0}^{n} \frac{f^{(h)}(0)\,x^h}{h!} \right] =$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[r_{n+1}(x) \right].$$

Si $\lim_{n\to\infty} \left[r_{n+1}(x) \right] = 0$, entonces $f(x) = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{h=0}^{n} \frac{f^{(h)}(0)\,x^h}{h!} \right]$.

Por lo tanto, si f es derivable indefinidamente en un intervalo (−r;r) y, además, $\lim_{n\to\infty} [r_{n+1}(x)] = 0$, entonces, para cualquier x del intervalo considerado, es

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{f^{(h)}(0)\,x^h}{h!}.$$

Obsérvese que la condición exigida de que el término complementario tienda a cero implica la convergencia de la serie de potencias en el intervalo (−r;r), pues su suma es finita e igual a f(x). El recíproco, sin embargo, es falso, pues la serie de potencias puede ser convergente y el término complementario no tener límite nulo para $n \to \infty$.

En ese caso la función correspondiente no puede desarrollarse en serie de Maclaurin.

Un contraejemplo lo proporciona la siguiente función, conocida como función de Cauchy:

$$f: x \to \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Puede demostrarse que esta función tiene n derivadas finitas en **R** que se anulan en el origen.

Por lo tanto, los coeficientes de la serie de Maclaurin son nulos, y para cualquier x la suma de la serie correspondiente da cero.

Estos valores no coinciden con los valores de f, que solamente se anula en el origen.

Aplicación

Si una función es derivable indefinidamente, las consideraciones anteriores permiten desarrollarla en serie de potencias.

Para ello debe escribirse, en cada caso, la fórmula de Taylor o de Maclaurin correspondiente, y verificar que el término complementario tiende a cero. Esto no siempre es fácil, pues no se conoce z, pero algunas veces es posible acotar el resto y probar, entonces, que su límite es cero.

Trataremos de desarrollar en serie la función seno.

Aplicando la fórmula de Maclaurin, es:

$$\text{sen}\,x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\ldots + \text{sen}\left(z + n\frac{\pi}{2}\right) \frac{x^n}{n!}.$$

$$\lim \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| = \lim \left| \frac{(2n-1)!}{(2n+1)!} \right| = \lim \frac{1}{2n(2n+1)} = 0.$$

Luego, la serie converge para cualquier número real x.

Además, $\lim_{n\to\infty} \left| \text{sen}\left(z + n\frac{\pi}{2}\right) \frac{x^n}{n!} \right| \le \lim \frac{|x^n|}{n!} = 0$ (pues es el término general de la serie $\sum \frac{x^n}{n!}$ que converge [pág. 381])

Por lo tanto, $\forall x$: $\text{sen}\,x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \pm \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \mp \ldots$

EJERCICIOS

1) Hallar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ c) $\sum (-1)^{n+1} \frac{x^n}{(2n)!}$

d) $\sum \frac{x^n}{3^n}$ e) $\sum \frac{n\,x^n}{n+1}$ f) $\sum n!\,x^n$

2) Desarrollar en serie de Maclaurin, si es posible:

a) $\cos x$ b) $\ln(1+x)$ c) e^x

RESPUESTAS A EJERCICIOS

CAPÍTULO 10

Sección I

1) $\sum a_n$ diverge $\sum b_n = \frac{4}{5}$ $\sum c_n = \frac{7}{2}$ $\sum d_n = \frac{6}{7}$

Sección III

1) $\sum b_n$, $\sum d_n$, $\sum e_n$ y $\sum h_n$ no convergen

Sección V

1) Las cuatro series convergen absolutamente

2) $\sum b_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{4} + \ldots$

Sección VI

1) Serie mayorante $\sum a_n = 1 + \frac{1}{2^h} + \frac{1}{2^h} + \frac{1}{4^h} + \frac{1}{4^h} + \frac{1}{4^h} + \frac{1}{4^h} + \frac{1}{8^h} + \ldots$

2) a) Converge. Comparar con $\sum \frac{1}{n^2}$

b) Converge. Comparar con $\sum \frac{1}{2^n}$

c) Converge. Comparar con $\sum \frac{1}{2^{n-1}}$

d) Diverge. Comparar con $\sum \frac{1}{n}$

e) **Diverge** $\left(k \cdot \sum \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

f) **Converge. Comparar con** $\sum \frac{1}{n^2}$

3) g) Diverge. Las restantes convergen (Para e y ℓ el criterio de D'Alembert no informa.)

4) Converge para todo número real a

5) c diverge. Las restantes convergen

6) a, b, c y d convergen; e diverge

Sección VII

1) a y d convergen

Sección VIII

1) a) $r = 1$ b) $r = +\infty$ c) $r = +\infty$ d) $r = \frac{1}{3}$ e) $r = 1$ f) $r = 0$

2) a) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$ b) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$

c) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$

11. PRIMITIVAS

El análisis elemental incluye dos procesos fundamentales: el cálculo de derivadas y el cálculo de integrales.

El primer proceso, derivación o diferenciación, conduce, como ya se ha visto, a definir la recta tangente al gráfico de una función derivable en cualquier punto del mismo. El segundo proceso, la integración, permite hallar el área de regiones limitadas por el gráfico de funciones continuas.

Ambos problemas, el de la recta tangente y el del área, se resuelven por caminos totalmente independientes, pero terminan vinculándose entre sí, pues el cálculo de áreas se reduce finalmente al cálculo de antiderivadas o primitivas.

De acuerdo con las consideraciones anteriores, debe darse primero el concepto de integral definida y una definición conveniente de área. Más tarde, mediante el teorema fundamental del cálculo integral, se relacionan ambos conceptos con la derivada, o mejor dicho con las antiderivadas.

Dedicamos este capítulo solamente a la antiderivación o "cálculo inverso" de la derivación. Para ello definiremos previamente función primitiva o antiderivada de una función f y luego estableceremos cierta "técnica de integración" basada en el cálculo de derivadas ya conocido.

I. Primitiva o antiderivada

Si f es una función definida en un conjunto D, la función F, definida en el mismo conjunto, es una *primitiva* de f si y sólo si F es derivable en D y f es su derivada.

Es decir,

$$F \text{ primitiva de } f \text{ en } D \iff \forall x \in D: F'(x) = f(x).$$

Obsérvese que F es una primitiva de f y no la primitiva, pues hay infinitas funciones diferentes cuya derivada es f (en el caso en que haya por lo menos una).

La función F es una primitiva o antiderivada de f, o también integral indefinida de f.

Ejemplos

1) Sea $f: x \to 4x^3$.

$F_0: x \to x^4$ es una primitiva de f, pues $\forall x: F'(x) = 4x^3 = f(x)$.

También $F_1: x \to x^4 - 3$

$F_2: x \to x^4 + \sqrt{2}$ son otras dos funciones primitivas de f.

En general, $F: x \to x^4 + k$ es una primitiva de f para cualquier número real k.

2) Sea $g: x \to \cos x$.

$G: x \to \operatorname{sen} x + k$ es una primitiva de f, pues $\forall x: G'(x) = \cos x = g(x)$.

Por lo tanto, recordando las fórmulas que dan las derivadas, se pueden hallar las primitivas.

Se comprende inmediatamente que no todas las funciones tienen primitivas. Además su cálculo no es simple en general, pues funciones elementales pueden tener primitivas de cálculo muy complicado.

Teorema

Una función f que admite, en un conjunto, una función primitiva F, admite infinitas funciones primitivas, todas ellas de la forma F + k, donde k es un número real cualquiera.

Demostración

Si F es primitiva de f en D, por definición: $\forall x \in D: F'(x) = f(x)$.

Si k es un número real cualquiera, la función $F_k = F + k$ es derivable y su derivada es $F'_k = F' + 0 = f$.

Por lo tanto, existen infinitas funciones que son primitivas de f. Si el dominio es un intervalo I, todas ellas difieren en una constante y f no admite otra primitiva fuera de ellas.

En efecto, si F y G son dos primitivas cualesquiera de la función f en el intervalo I, por definición, $\forall x \in I: F'(x) = f(x)$ y $G'(x) = f(x)$.

Luego, F y G son funciones que tienen la misma derivada. Por una consecuencia del teorema del valor medio del cálculo diferencial (pág. 249), F y G difieren en una constante.

O sea, $\exists k \in R / G = F + k$.

Para designar una primitiva cualquiera de la función f suele utilizarse el símbolo $\int f$, que se lee *"primitiva de f o antiderivada de f o integral indefinida de f"*.

La función f es el *integrando* en la integral indefinida $\int f$.

Es más común el símbolo $\int f(x)\,dx$, que designa también una primitiva cualquiera de f y fue introducido por Leibniz* en el año 1675.

Por razones prácticas, los símbolos $\int f$, $\int f(x)$, $\int f(x)\,dx$ serán utilizados en forma equivalente.

* Godofredo Guillermo, barón de Leibniz (1646-1716), filósofo y matemático alemán, con profundos conocimientos de física, historia, derecho, teología y política. Se lo considera "descubridor" del cálculo diferencial, pues publicó sus ideas antes que Newton.

Por ejemplo, si $f: x \to x^3$, las siguientes expresiones son equivalentes: $\int f$, $\int x^3$, $\int x^3\,dx$.

Por otra parte, también son equivalentes las expresiones

$$\int x^3 dx, \quad \int t^3 dt, \quad \int r^3 dr.$$

Prescindiremos de la notación diferencial mientras la expresión considerada tenga una sola variable y no se puedan originar confusiones.

II. Integración inmediata

Los teoremas siguientes, basados en conocidas propiedades de las derivadas, facilitan el cálculo de primitivas en los casos más simples.

Teorema 1

Si f y g son dos funciones definidas en un conjunto D, F es una primitiva de f y G es una primitiva de g, entonces $F \pm G$ es una primitiva de $f \pm g$.

Demostración

Para probar que $F \pm G$ es una primitiva de $f \pm g$ debe verificarse que $(F \pm G)' = f \pm g$.

Ahora bien, aplicando derivada de la suma (o resta) de dos funciones derivables, es $(F \pm G)' = F' \pm G'$ (1).

Como F es primitiva de f, por definición es $F' = f$, y como G es primitiva de g, es $G' = g$.

Reemplazando en (1), es $(F \pm G)' = f \pm g$, y el teorema queda probado.

Este teorema se generaliza fácilmente por inducción completa para n sumandos:

$$\int \sum_{h=1}^{n} f_h = \sum_{h=1}^{n} \int f_h.$$

Ejemplo

$$\int (x^2 + \operatorname{sen} x + e^{-x}) = \int x^2 + \int \operatorname{sen} x + \int e^{-x} =$$

$$= \frac{x^3}{3} + (-\cos x) + (-e^{-x}) + k =$$

$$= \frac{x^3}{3} - \cos x - e^{-x} + k.$$

Teorema 2

Si f es una función definida en D, c un número real y F una primitiva de f en D, entonces cF es una primitiva de cf en D.

Demostración

Probar que cF es una primitiva de cf significa verificar que $(cF)' = cf$.

Ahora bien, aplicando derivada del producto de una constante por una función derivable, resulta $(cF)' = cF'$ (1).

Como F es primitiva de f, por definición es $F' = f$.

Reemplazando F' por f en (1), queda la tesis.

Ejemplo

$$\int (3x^4) = 3\int x^4 = 3\,\frac{x^5}{5} + k.$$

Teorema 3

Para todo número real $n \neq -1$ es $\int x^n = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$.

Demostración

Por la fórmula obtenida para derivar una función potencial:

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + k\right)' = \frac{(n+1)\,x^n}{n+1} = x^n;$$

Luego, $\int x^n = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$ si $n \neq -1$.

Ejemplos

1) $\int x^7 = \dfrac{x^8}{8} + k$, pues $\left(\dfrac{x^8}{8} + k\right)' = \dfrac{8x^7}{8} = x^7$.

2) $\int x^{-1/3} = \dfrac{3}{2}x^{2/3} + k$, pues $\left(\dfrac{3}{2}x^{2/3} + k\right)' = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2}{3}x^{-1/3} = x^{-1/3}$.

Teorema 4

$$\int \frac{1}{x} = \ln|x| + k.$$

Para verificar la igualdad anterior aplicamos fórmulas de derivación:

1) Si $x > 0$, entonces $\ln|x| = \ln x$.

Luego, $(\ln x + k)' = \dfrac{1}{x}$

2) Si $x < 0$, entonces $\ln|x| = \ln(-x)$.

Luego, $(\ln(-x)+k)' = \dfrac{1}{-x}\cdot(-1) = \dfrac{1}{x}$

Por lo tanto,

$$\forall x: \left(x \neq 0 \Rightarrow \int \frac{1}{x} = \ln |x| + k\right).$$

Obsérvese que no hay error en la expresión

$$\int \frac{1}{x} = \ln x + k$$

si el integrando es positivo.

En cambio, la fórmula

$$\int \frac{1}{x} = \ln |x| + k$$

admite integrando negativo.

Obsérvese también que la función $f / f(x) = \ln x$ es una restricción de $g / g(x) = \ln |x|$, pues $Df = R^+$ mientras $Dg = R - \{0\}$.

Con la notación diferencial indicada en la página 387 la expresión de los teoremas anteriores es:

Teorema 1: $\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

Teorema 2: $\int c \cdot f(x)\, dx = c \int f(x)\, dx$

Teorema 3: $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$ si $n \neq -1$

Teorema 4: $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln |x| + k$

Mediante teoremas similares, cuya demostración consiste en verificar simplemente que la función obtenida admite como derivada a la función inicial, se obtienen otras fórmulas para antiderivadas.

EJERCICIOS

1) $\int \frac{1}{x^7}$

2) $\int (x^4 + x^3 + \operatorname{sen} x)$

3) $\int \frac{1}{x - a}$

4) $\int \left(2 x^{3/5} - \sqrt{x^5} - 6\right)$

5) $\int \frac{x^7}{3}$

6) $\int (3 x^4 + 5 x^9)$

7) $\int \left(7 x^{3/5} - \sqrt{x^7}\right)$

8) $\int \left(\ln 2 - \frac{1}{x}\right)$

III. Integración por regla de la cadena (sustitución)

Teorema

Si f tiene derivada finita en D, entonces, para todo número real $n \neq -1$, es:

$$\int (f^n \cdot f') = \frac{f^{n+1}}{n+1} + k.$$

Demostración

Si se aplica la regla de la cadena a la función f:

$$\left(\frac{f^{n+1}}{n+1} + k\right)' = \frac{(n+1)\, f^n}{n+1} \cdot f' = f^n \cdot f',$$

que justifica la tesis.

Ejemplo 1

$$\int [(3x^2 + 5x)^6 \cdot (6x + 5)] = \frac{(3x^2 + 5x)^7}{7} + k,$$

pues $\left(\frac{(3x^2 + 5x)^7}{7} + k\right)' = \frac{7\,(3x^2 + 5x)^6}{7}\,(6x + 5) =$

$$= (3x^2 + 5x)^6\,(6x + 5).$$

Este tipo de integración puede utilizarse en otras funciones compuestas, además del caso anterior en que se consideró especialmente una función de tipo potencial.

El método se apoya en la aplicación de la regla de la cadena para derivar funciones compuestas.

Ejemplo 2

Consideremos $\int \left[\cos (\ln x) \cdot \frac{1}{x}\right]$.

En este caso, cos (ln x) indica una función compuesta, y la función exterior coseno tiene primitiva inmediata seno.

Además, está multiplicada por la derivada de ln x, que es $\frac{1}{x}$.

O sea, puede escribirse

$$\int \left[\cos (\ln x) \cdot \frac{1}{x}\right] = \int [\operatorname{sen} (\ln x)]',$$

pues, aplicando la regla de la cadena, es

$$[\operatorname{sen} (\ln x)]' = \left[\cos (\ln x) \cdot \frac{1}{x}\right]$$

Por lo tanto, $\int \left[\cos (\ln x) \cdot \frac{1}{x}\right] = \operatorname{sen} (\ln x) + k.$

En general, $\int \left(f\,[g(x)] \cdot g'(x)\right) = F\,[g(x)] + k$, donde $F' = f$.

Para comprobarlo:

$$(F\,[g(x)] + k)' = F'\,[g(x)] \cdot g'(x) = f\,[g(x)] \cdot g'(x).$$

El cálculo de este tipo de integrales parece complicado en sus comienzos, pues su éxito depende de poder indicar la función compuesta en forma tal que la función exterior tenga primitiva inmediata y figure la derivada de la función interior.

Ejemplo 3

Consideremos $\int [\text{sen}(x^5) \cdot x^4]$.

La expresión sen (x^5) corresponde a una función compuesta, donde la función exterior seno tiene primitiva inmediata y, aunque no aparece la derivada de x^5, basta agregar la constante requerida.

En efecto:

$$\int [\text{sen}(x^5) \cdot x^4] = \frac{1}{5} \int [\text{sen}(x^5) \cdot 5x^4] = -\frac{1}{5} \cos(x^5) + k.$$

Para comprobarlo:

$$\left(-\frac{1}{5} \cos(x^5) + k\right)' = \frac{1}{5} \text{sen}(x^5) \cdot 5x^4 = \text{sen}(x^5) \cdot x^4.$$

Se ha visto también, al enunciar el teorema anterior, que la fórmula

$$\int (f^n \cdot f') = \frac{f^{n+1}}{n+1} + k \quad \text{no es válida} \quad \text{si } n = -1.$$

Recordando que si $y = \ln f(x)$ es $y' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$,

resulta $\int (f^{-1} \cdot f') = \int \left(\frac{1}{f} \cdot f'\right) = \ln|f| + k.$

Ejemplo 4

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x} = \ln x^2 + x + k$$

Ejemplo 5

$$\int \frac{x^2+2}{x^3+6x+1} = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2+6}{x^3+6x+1} = \frac{1}{3} \ln|x^3+6x+1| + k$$

La habilidad para este tipo de integración sólo se adquiere con la práctica. Una forma mecánica de iniciarse es aplicar una sustitución conveniente de variable, que resulta más sencilla si se utiliza la notación diferencial.

Consideremos los mismos ejemplos anteriores:

1) $\int (3x^2 + 5x)^5 (6x + 5)\, dx$. Hagamos $t = 3x^2 + 5x$.

Luego, $dt = (6x + 5)dx$.

Sustituyendo, es: $\int (3x^2 + 5x)^6 (6x + 5)\, dx =$

$$= \int t^6 \cdot dt = \frac{t^7}{7} + k = \frac{(3x^2 + 5x)^7}{7} + k.$$

2) $\int \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx$. Hagamos $t = \ln x$.

Luego, $dt = \frac{1}{x} dx$.

Sustituyendo, es: $\int \cos(\ln x) \frac{1}{x} dx = \int \cos t \, dt =$

$$= \text{sen } t + k = \text{sen}(\ln x) + k.$$

3) $\int \text{sen}(x^5) \cdot x^4 \, dx$. Hagamos la sustitución $t = x^5$.

Luego, $dt = 5x^4 dx$ y $x^4 dx = \frac{1}{5} dt$.

Sustituyendo, es:

$$\int \text{sen}(x^5) \cdot x^4 \, dx = \int \text{sen } t \frac{1}{5} dt = \frac{1}{5} \int \text{sen } t \, dt =$$

$$= \frac{1}{5} (-\cos t) + k = -\frac{1}{5} \cos(x^5) + k.$$

4) $\int \frac{2x+1}{x^2+x} dx$. Hagamos $t = x^2 + x$.

Luego, $dt = (2x + 1)\, dx$.

Sustituyendo: $\int \frac{2x+1}{x^2+x} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + k = \ln|x^2 + x| + k.$

5) $\int \frac{x^2 + 2}{x^3 + 6x + 1} dx$. Hagamos $t = x^3 + 6x + 1$.

Luego, $dt = (3x^2 + 6)\, dx$

$dt = 3(x^2 + 2)\, dx$

$\frac{dt}{3} = (x^2 + 2)\, dx.$

Sustituyendo: $\int \frac{x^2+2}{x^3+6x+1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3} \ln|t| + k =$

$$= \frac{1}{3} \ln|x^3 + 6x + 1| + k.$$

Otros ejemplos

6) $\int \frac{3x^2+5}{\sqrt{x^3+5x}} dx$. Sea $t = x^3 + 5x$.

$dt = (3x^2 + 5)dx.$

Luego, $\int \frac{3x^2+5}{\sqrt{x^3+5x}} dx = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-\frac{1}{2}} dt = 2t^{\frac{1}{2}} + k =$

$$= 2\sqrt{x^5 + 5x} + k.$$

7) $\int \text{sen}^5 x \cdot \cos x\, dx.$ $\qquad t = \text{sen}\, x \Rightarrow dt = \cos x\, dx.$

$$\int \text{sen}^5 x \cdot \cos x\, dx = \int t^5\, dt = \frac{t^6}{6} + k = \frac{\text{sen}^6 x}{6} + k.$$

8) $\int \frac{x^4 + 2x}{x^5 + 5x^2}\, dx.$ $\qquad t = x^5 + 5x^2 \Rightarrow dt = (5x^4 + 10x)\, dx =$

$$= 5(x^4 + 2x)dx.$$

$$\int \frac{x^4 + 2x}{x^5 + 5x^2}\, dx = \int \frac{\frac{1}{5}dt}{t} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{5}\ln|t| + k =$$

$$= \frac{1}{5}\ln|x^5 + 5x^2| + k = \ln\sqrt[5]{|x^5 + 5x^2|} + k.$$

EJERCICIOS

1) $\int \frac{1}{a - x}$

2) $\int \text{tg}\, x$

3) $\int [(x^5 + 7)^8 \cdot 3x^4]$

4) $\int [\text{sen}^3 x(-\cos x)]$

5) $\int [(2x^6 - 3x)^{2/5}\, (4x^5 - 1)]$

6) $\int \frac{2x^4}{x^5 + 3}$

7) $\int \frac{\text{sen}\, 2x}{1 + \text{sen}^2 x}$

8) $\int [(\cos^3 x - x^3)\, (\cos^2 x\, \text{sen}\, x - x^2)]$

9) $\int \left[(3x^5 - 2x)^{7/5} \left(\frac{15}{2}x^4 - 1\right)\right]$

10) $\int \frac{3}{1 + 64x^2}$

11) $\int \frac{\frac{1}{5}\text{sen}\, x + x^4}{\cos x - x^5}$

12) $\int [(3x^2 + 2x)^{-1}\, (3x + 1)]$

13) $\int [\cos^6 (3x) \cdot \text{sen}(3x)]$

14) $\int (x^3 \sqrt{x^4 + 3})$

15) $\int \frac{1 + 3x}{(2x + 3x^2)^5}$

16) $\int (5x + 3)^6$

17) $\int [\text{sen}\, x \cos^8 x]$

18) $\int (6x + 7)^{12}$

19) $\int [x^4 \text{sen}(x^5 + 3)]$

20) $\int \frac{x^2 + 1}{x^3 + 3x}$

21) $\int \left[x\sqrt{x^2 + 3}\right]$

22) $\int \frac{x + 1}{x^2 + 2x}$

23) $\int [x \cos(1 - x^2)]$

24) $\int \frac{x^2}{x^3 + 1}$

25) $\int \left[(3x^7 + 2)^9\, \frac{x^6}{2}\right]$

26) $\int \left[\text{sen}\, (2x) \sqrt{\cos (2x)}\right]$

27) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$

28) $\int [3^{(e^x)} \cdot e^x]$

29) $\int \left(2^{\text{tg}\, x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\right)$

30) $\int [\text{tg}^3 x \cdot \sec^2 x]$

IV. Integración por partes

Si observamos los ejemplos que se han resuelto por sustitución (pág. 393), vemos que el integrando está formado en todos los casos por el producto de dos funciones.

Ahora bien, no hay fórmula para hallar la primitiva de un producto, ~~ya que~~ la derivada de un producto no es el producto de las derivadas. Por lo tanto, en todos los casos presentados en la sección anterior, para aplicar la regla de la cadena debimos descubrir primero si uno de los factores correspondía a una función compuesta y el otro a la derivada de la función interior.

Es común al resolver ejercicios que se presente la integral de un producto, donde no se cumplen las condiciones anteriores y no puede, por lo tanto, recurrirse a la regla de la cadena.

En esos casos, si una de las funciones es integrable en forma inmediata, se recurre al método de integración por partes, que utiliza el cálculo inverso al de la derivada de un producto de dos factores.

Sabemos, por regla de derivación del producto, que

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Si todos los términos son integrables, es:

$$\int (fg)' = \int (f'g) + \int (fg'),$$

o sea,

$$fg + k = \int (f'g) + \int (fg')$$

y

$$\int (f'g) = fg - \int (fg') + k,$$

que es la fórmula de integración por partes.

Obsevemos que en el primer miembro de la fórmula aparece como integrando el producto de dos funciones, una de las cuales, f', tiene primitiva inmediata f.

Nota: Para abreviar la notación, al buscar primitivas agregaremos la constante k recién al finalizar los cálculos.

Ejemplo 1

$$\int (x \cdot \ln x)$$

Al observar el integrando se ve que no puede aplicarse la regla de la cadena, pero uno de los factores, x, tiene primitiva inmediata $\frac{x^2}{2}$.

Luego, se puede intentar el procedimiento de integración por partes.

$$\int (\underbrace{x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{g(x)}) \qquad f'(x) = x \qquad f(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$g(x) = \ln x \qquad g'(x) = \frac{1}{x}$$

Aplicando la fórmula,

$$\int (x \cdot \ln x) = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{f(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{g(x)} - \int \left(\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'(x)} \right) =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + k.$$

Ejemplo 2

$$\int (e^x \cdot x^2)$$

En este caso tampoco puede aplicarse directamente la regla de la cadena.

Para integrar por partes hay dos posibilidades, pues ambas funciones tienen primitivas inmediatas. Es necesario, sin embargo, elegir $x^2 = g(x)$, pues de lo contrario, si hacemos $f'(x) = x^2$, es $f(x) = \frac{x^3}{3}$ y el ejercicio se complica.

Luego, $f'(x) = e^x \qquad f(x) = e^x$

$g(x) = x^2 \qquad g'(x) = 2x$

Resulta:

$$\int (e^x \cdot x^2) = e^x \cdot x^2 - \int (e^x \cdot 2x) = e^x \cdot x^2 - 2 \int (e^x \cdot x) \qquad (1).$$

Debe recurrirse nuevamente al método de integración por partes para resolver $\int (e^x \cdot x)$.

$f'(x) = e^x \qquad f(x) = e^x$

$g(x) = x \qquad g'(x) = 1$

$$\int (e^x \cdot x) = e^x \cdot x - \int e^x = e^x \cdot x - e^x + k'.$$

Reemplazando en (1), es:

$$\int (e^x \cdot x^2) = e^x \cdot x^2 - 2(e^x \cdot x - e^x + k') = e^x \cdot x^2 - 2\,e^x \cdot x + 2\,e^x + k.$$

Ejemplo 3

$$\int \text{sen}(\ln x) \cdot 1$$

$f'(x) = 1 \qquad f(x) = x$

$g(x) = \text{sen}(\ln x) \qquad g'(x) = \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$

$$\int \text{sen}(\ln x) = x\,\text{sen}(\ln x) - \int \left[x \cdot \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \right] =$$

$$= x\,\text{sen}(\ln x) - \int \cos(\ln x) \qquad (1).$$

Aplicamos nuevamente integración por partes para resolver

$$\int \cos(\ln x)$$

$f'(x) = 1 \qquad f(x) = x$

$g(x) = \cos(\ln x) \qquad g'(x) = -\,\text{sen}(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$

$$\int \cos(\ln x) = x \cos(\ln x) + \int \left[x \cdot \text{sen}(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \right] =$$

$$= x \cos(\ln x) + \int \text{sen}(\ln x).$$

Reemplazando en (1), es:

$$\int \text{sen}(\ln x) = x\,\text{sen}(\ln x) - x \cos(\ln x) - \int \text{sen}(\ln x).$$

En este ejemplo, continuar la integración por partes significa iniciar un círculo vicioso. En cambio, si se pasa el último término al primer miembro, es:

$$2 \int \text{sen}(\ln x) = x\,\text{sen}(\ln x) - x \cos(\ln x).$$

$$\int \text{sen}(\ln x) = \frac{1}{2}\,x\,[\text{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)] + k.$$

EJERCICIOS

1) $\int (a^x\, e^x)$ 2) $\int (x^2 \ln x)$

3) $\int (x\, e^x)$ 4) $\int \text{arc sen } x$

5) $\int (x^2\, e^{\;x})$ 6) $\int (x \text{ sen } x)$

7) $\int (e^x \text{ sen } x)$ 8) $\int (e^x \cos x)$

9) $\int \cos(\ln x)$

10) $\int \operatorname{arc\,tg} x$

11) $\int \left[e^{\frac{x}{2}} \cos(2x)\right]$

12) $\int [x \cos(5x)]$

13) $\int \operatorname{arc\,sen}(bx)$

14) $\int [e^{2x} \operatorname{sen}(4x)]$

15) $\int \operatorname{arc\,cos}(ax)$

16) $\int [x^3 \operatorname{arc\,tg}(3x)]$

17) $\int (x^2\, 5^x)$

18) $\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}$

19) $\int [\cos(3x) a^x]$

20) $\int \ln(x^2 + 1)$

21) $\int [3^x \operatorname{sen}(3x)]$

22) $\int [5^x \cos(5x)]$

23) $\int (2^x\, x^2)$

24) $\int \left[e^{-\frac{x}{3}} \cos(3x)\right]$

25) $\int (x\, e^{-4x})$

26) $\int (5^x e^{3x})$

27) $\int [e^x \cos(5x)]$

28) $\int \left[3^{2x} \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]$

29) $\int x^3 \sqrt{x^2 + 5}$

30) $\int x^3 \sqrt[4]{9 + x^2}$

V. Integración de funciones trigonométricas

Para integrar potencias y productos de potencias de funciones trigonométricas se recurre a fórmulas conocidas de trigonometría.

Recordemos que $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$

y $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos 2x.$

Sumando, $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

y restando, $2\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos 2x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

Primer caso: potencia impar de seno o coseno

1) $\int \operatorname{sen}^3 x = \int (\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}^2 x) = \int [\operatorname{sen} x (1 - \cos^2 x)] =$

$= \int \operatorname{sen} x - \int (\operatorname{sen} x \cos^2 x)$

$\int \operatorname{sen} x$ es integral inmediata, y en $\int (\operatorname{sen} x \cos^2 x)$ se aplica la regla de la cadena.

Resulta $\int \operatorname{sen} x = -\cos x + k$ y $\int (\operatorname{sen} x \cos^2 x) = -\frac{\cos^3 x}{3} + k.$

Luego, $\int \operatorname{sen}^3 x = -\cos x - \frac{\cos^3 x}{3} + k.$

2) $\int \operatorname{sen}^5 x = \int (\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}^4 x) = \int [\operatorname{sen} x (1 - \cos^2 x)^2] =$

$= \int [\operatorname{sen} x (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)] =$

$= \int \operatorname{sen} x - 2\int (\operatorname{sen} x \cos^2 x) + \int (\operatorname{sen} x \cos^4 x) =$

$= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + k$

En general conviene recurrir al siguiente factoreo:

$$\int \operatorname{sen}^{2p+1} x = \int (\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}^{2p} x) = \int [\operatorname{sen} x (\operatorname{sen}^2 x)^p] =$$

$$= \int [\operatorname{sen} x (1 - \cos^2 x)^p].$$

Análogamente:

$$\int \cos^{2p+1} x = \int (\cos x \cdot \cos^{2p} x) = \int [\cos x (\cos^2 x)^p] =$$

$$= \int [\cos x (1 - \operatorname{sen}^2 x)^p].$$

Segundo caso: potencia par de seno o coseno

1) $\int \operatorname{sen}^2 x = \int \frac{1 - \cos 2x}{2}$ por fórmula anterior (pág. 398)

$= \int \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int \cos 2x = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + k.$

2) $\int \cos^4 x = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) =$

$= \frac{1}{4}\int 1 + \frac{1}{2}\int \cos 2x + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x =$

$$= \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\text{ sen } 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1 - \cos 4x}{2} =$$

$$= \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\text{ sen } 2x + \frac{1}{8}\int 1 + \frac{1}{8}\int \cos 4x =$$

$$= \frac{x}{4} + \frac{\text{sen } 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\text{sen } 4x}{32} + k =$$

$$= \frac{3x}{8} + \frac{\text{sen } 2x}{4} + \frac{\text{sen } 4x}{32} + k.$$

En general, conviene hacer:

$$\int \text{sen}^{2p} x = \int (\text{sen}^2 x)^p = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^p$$

$$\text{y} \quad \int \cos^{2p} x = \int (\cos^2 x)^p = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^p.$$

Tercer caso: producto de potencias de seno y coseno con un exponente impar

$$\int (\text{sen}^2 x \cos^3 x) = \int [\text{sen}^2 x \cos x\,(1 - \text{sen}^2 x)] =$$

$$= \int (\text{sen}^2 x \cos x) - \int (\text{sen}^4 x \cos x).$$

Las dos últimas integrales se resuelven por regla de la cadena:

$$\int (\text{sen}^2 x \cos x) = \frac{\text{sen}^3 x}{3} + k$$

$$\int (\text{sen}^4 x \cos x) = \frac{\text{sen}^5 x}{5} + k$$

Luego, $\int (\text{sen}^2 x \cos^3 x) = \frac{\text{sen}^3 x}{3} - \frac{\text{sen}^5 x}{5} + k.$

Cuarto caso: producto de potencias de seno y coseno con los dos exponentes pares

$$\int (\text{sen}^2 x \cos^2 x) = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 - \cos^2 2x) = \int \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\int \cos^2 2x,$$

y se recurre al primer caso.

EJERCICIOS

1) $\int \text{sen}^3(7x)$
2) $\int \cos^3 x$
3) $\int (\text{sen}^3 x \cos^{7/2} x)$
4) $\int \cos^5(2x)$
5) $\int \text{sen}^4 x$
6) $\int \cos^2(3x)$
7) $\int (\text{sen}^{3/5} x \cos^3 x)$
8) $\int (\sqrt[3]{\cos^5 x}\,\text{sen}^3 x)$
9) $\int [\text{sen}^2(4x) \cos^2(4x)]$
10) $\int \text{sen}^4(3x)$
11) $\int [\text{sen}^2(5x) \cos^3(5x)]$
12) $\int \left[\text{sen}^3 \frac{x}{2} \sqrt{\cos \frac{x}{2}}\right]$
13) $\int \frac{1}{\cos^4(2x)}$
14) $\int \sec^4 x$
15) $\int \text{sh}^2(3x)$
16) $\int \text{ch}^3(4x)$
17) $\int \frac{1}{2 + 3\cos^2 x}\,dx$
18) $\int \sec x\,dx$ (véase pág. 418)

VI. Integración de funciones racionales

Si se quiere integrar el cociente de dos funciones polinómicas y el grado del numerador es mayor que el del denominador, primero debe efectuarse la división.

Por ejemplo, $\int \frac{x^4}{x + 1} = \int \left(x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{x + 1}\right) =$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \ln |x + 1| + k.$$

Al efectuar la división de dos polinomios llegamos a un polinomio cociente, y el resto, sobre el divisor, da origen a una función racional. En ella, el grado del numerador es inferior en una unidad, por lo menos, al grado del denominador. En el ejemplo anterior, dicha expresión: $\frac{1}{x + 1}$ pudo integrarse inmediatamente.

En otros casos se la debe descomponer en fracciones simples, como se indicará a continuación.

Se ha visto que al efectuar la división resulta:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} \quad \text{y grado } r < \text{grado } g \quad \text{o} \quad r = 0.$$

La integral de q es inmediata, ya que q es un polinomio, y el problema se reduce a integrar el cociente de dos funciones polinómicas cuando el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

El paso básico en este método de integración es la descomposición del cociente en fracciones simples, para lo cual deben hallarse primero las raíces del polinomio correspondiente al denominador.

En álgebra se demuestra que cualquier polinomio de coeficientes reales puede expresarse como producto de polinomios, primos sobre $\mathbb{R}$, lineales o cuadráticos.

Se presentan cuatro casos según que las raíces sean reales o imaginarias, simples o múltiples.

En todos los casos consideraremos solamente la integración de funciones racionales propias, es decir, de funciones racionales en las que el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

Primer caso: Las raíces del denominador son reales y simples
(El denominador se expresa como producto de polinomios lineales diferentes)

Ejemplo 1

$$\int \frac{1}{x^2 - x - 6} \qquad (1)$$

Las raíces del denominador son $r_1 = 3$ y $r_2 = -2$

Luego, $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$, y la expresión (1) admite la siguiente descomposición en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^2 - x - 6} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x+2}.$$

Falta calcular el valor de A_1 y A_2.

Para ello sacamos común denominador en el segundo miembro:

$$\frac{1}{x^2 - x - 6} = \frac{A_1(x+2) + A_2(x-3)}{(x-3)(x-2)}.$$

Igualando numeradores:

$$1 = A_1(x+2) + A_2(x-3).$$

La expresión anterior debe verificarse para cualquier valor de x. Por lo tanto, se procura elegir valores de x que simplifiquen los cálculos.

$$\text{Si } x = -2, \text{ es } 1 = A_2(-5) \text{ y } A_2 = -\frac{1}{5}.$$

$$\text{Si } x = 3, \text{ es } 1 = A_1 \cdot 5 \text{ y } A_1 = \frac{1}{5}.$$

$$\text{Luego, } \int \frac{1}{x^2 - x - 6} = \frac{1}{5}\int \frac{1}{x-3} - \frac{1}{5}\int \frac{1}{x+2} =$$

$$= \frac{1}{5} \ln|x-3| - \frac{1}{5} \ln|x+2| + k =$$

$$= \ln \sqrt[5]{\left|\frac{x-3}{x+2}\right|} + k.$$

Ejemplo 2

$$\int \frac{9x^2 - 16x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x}$$

Las raíces del denominador son $r_1 = 0$, $r_2 = 1$ y $r_3 = 2$.

Luego, $x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-1)(x-2)$

$$\frac{9x^2 - 16x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x-2}$$

Por lo tanto,

$$9x^2 - 16x + 4 = A_1(x-1)(x-2) + A_2x(x-2) + A_3x(x-1).$$

$$x = 0 \Rightarrow 4 = A_1 \cdot 2 \Rightarrow \underline{A_1 = 2}$$

$$x = 1 \Rightarrow -3 = A_2(-1) \Rightarrow \underline{A_2 = 3}$$

$$x = 2 \Rightarrow 8 = A_3 \cdot 2 \Rightarrow \underline{A_3 = 4}$$

$$\text{Luego, } \int \frac{9x^2 - 16x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x} = 2\int \frac{1}{x} + 3\int \frac{1}{x-1} + 4\int \frac{1}{x-2} =$$

$$= 2 \ln|x| + 3 \ln|x-1| + 4 \ln|x-2| + k.$$

Consideremos, en general, la integral $\int \frac{p(x)}{g(x)}$, donde el grado de p es menor que el grado de g.

Sea $g(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, y $r_1, r_2 \dots r_n$ sus n raíces reales.

El polinomio g(x) admite sobre $\mathbb{R}$ la siguiente factorización única:

$$g(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n).$$

$$\text{Luego, } \int \frac{p(x)}{g(x)} = \frac{1}{a_n} \int \left(\frac{A_1}{x - r_1} + \frac{A_2}{x - r_2} + \frac{A_3}{x - r_3} + \dots + \frac{A_n}{x - r_n} \right)$$

$$\text{y } \int \frac{p(x)}{g(x)} = \frac{1}{a_n} \sum_{h=1}^{n} A_h \cdot \ln|x - r_h|.$$

Segundo caso: Las raíces del denominador son reales y múltiples
(El denominador se expresa como producto de polinomios lineales, algunos repetidos).

Ejemplo

$$\int \frac{x^2 - x + 4}{(x-1)^2 (x-2)}$$

La descomposición en fracciones simples exige que

$$\frac{x^2 - x + 4}{(x-1)^2 (x-2)} = \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x-2}.$$

Sacando mínimo común denominador en el segundo miembro, e igualando los numeradores, queda:

$$x^2 - x + 4 = A_1 (x-2) + A_2 (x-1)(x-2) + A_3 (x-1)^2.$$

$x = 2 \Rightarrow 6 = A_3 \cdot 1 \Rightarrow \underline{A_3 = 6}$

$x = 1 \Rightarrow 4 = A_1(-1) \Rightarrow \underline{A_1 = -4}$

Se necesita otra ecuación para encontrar A_2. Como no existe otro valor de x que anule alguno de los sumandos, conviene elegir cualquier valor que facilite los cálculos.

$x = 0 \Rightarrow 4 = -2A_1 + 2A_2 + A_3$. Reemplazando A_1 y A_3 por los valores ya obtenidos, es $4 = 8 + 2A_2 + 6$ $\quad -10 = 2A_2 \Rightarrow \underline{A_2 = -5}$.

Luego, $\displaystyle\int \frac{x^2 - x + 4}{(x-1)^2 (x-2)} = -4 \int \frac{1}{(x-1)^2} - 5 \int \frac{1}{x-1} + 6 \int \frac{1}{x-2} =$

$\displaystyle = -4 \int (x-1)^{-2} - 5 \ln|x-1| + 6 \ln|x-2| = \frac{4}{x-1} - 5 \ln|x-1| +$

$+ 6 \ln|x-2| + k.$

En el ejemplo anterior, la raíz $r_1 = 1$ es una raíz doble (de orden 2). Si aparece una raíz triple, como en el caso siguiente, la descomposición en fracciones simples es:

$$\int \frac{p(x)}{(x-1)^3 (x-3)} = \frac{A_1}{(x-1)^3} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x-1} + \frac{A_4}{x-3}.$$

Si aparece en el denominador una raíz múltiple de orden k, debe hacerse

$$\frac{p(x)}{(x-r)^k} = \sum_{i=1}^{k} \frac{A_i}{(x-r)^i}$$

En general, si el grado del denominador es n, la descomposición debe hacerse en n fracciones simples de la siguiente manera:

$$\frac{p(x)}{a_n (x-r_1)^k (x-r_2)^h \ldots (x-r_p)^e} =$$

$$= \frac{1}{a_n} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{A_i}{(x-r_1)^i} + \sum_{i=1}^{h} \frac{B_i}{(x-r_2)^i} + \ldots + \sum_{i=1}^{e} \frac{P_i}{(x-r_p)^i} \right),$$

donde $k + h + \ldots + e = n$.

Tercer caso: El denominador tiene raíces complejas, no reales, simples
(En el factoreo del denominador aparecen polinomios cuadráticos irreducibles, todos distintos entre sí)

Ejemplo 1

$$\int \frac{1}{1 + 9x^2}$$

El polinomio del denominador es irreducible, pues sus raíces son

$$r_1 = \frac{1}{3} i \quad \text{y} \quad r_2 = -\frac{1}{3} i.$$

En este caso la expresión anterior puede resolverse utilizando la derivada de arco tangente y la regla de la cadena:

$$\int \frac{1}{1 + 9x^2} = \int \frac{1}{1 + (3x)^2} = \frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg} (3x) + k.$$

Como ya se ha dicho anteriormente, la integral anterior puede resolverse también por sustitución, para lo cual es conveniente utilizar la notación diferencial.

Haciendo $u = 3x$, es $du = 3dx$ y resulta:

$$\int \frac{1}{1 + 9x^2} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{1 + u^2} du = \frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg} u + k =$$

$$= \frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg} (3x) + k.$$

Ejemplo 2

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 10}$$

También en este caso las raíces del denominador no son reales y el polinomio es irreducible en R.

Para poner en evidencia la derivada del arco tangente, conviene completar el cuadrado para llegar a una expresión del tipo $u^2 + 1$ (véase pág. 62).

$$x^2 + 2x + 10 = (x^2 + 2x) + 10 = (x^2 + 2x + 1) + 9 =$$

$$= (x+1)^2 + 9 = 9 \left[\frac{(x+1)^2}{9} + 1 \right] =$$

$$= 9 \left[\left(\frac{x+1}{3} \right)^2 + 1 \right].$$

La operación de completar el cuadrado es simple una vez que se ha practicado convenientemente, y la clave está en sumar y restar, en forma adecuada, el cuadrado de un medio del coeficiente de x (si el coeficiente de x^2 es el número 1).

Luego, $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 10} = \int \frac{dx}{9\left[1 + \left(\frac{x+1}{3}\right)^2\right]} = \frac{1}{9} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x+1}{3}\right)^2}$

Haciendo $u = \frac{x+1}{3}$, es $du = \frac{1}{3}\,dx$ y $dx = 3\,du$. Resulta:

$$\frac{1}{9}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{x+1}{3}\right)^2} = \frac{1}{9}\int\frac{3\,du}{1+u^2} = \frac{1}{3}\int\frac{1}{1+u^2}\,du =$$

$$= \frac{1}{3}\,\text{arc tg}\,u + k = \frac{1}{3}\,\text{arc tg}\,\frac{x+1}{3} + k.$$

Ejemplo 3

$$\int\frac{x+2}{x^3-1}$$

$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$, pues tiene raíces $r_1 = 1$,

$r_2 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ y $r_3 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

En este caso la descomposición factorial es del tipo:

$$\frac{p(x)}{(x-r_1)\underbrace{(x^2+bx+c)}_{(x-r_2)(r-r_3)}} = \frac{A_1}{x-r_1} + \frac{A_2x+A_3}{x^2+bx+c}.$$

Es decir, $\frac{x+2}{x^3-1} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2x+A_3}{x^2+x+1}$.

$$x + 2 = A_1(x^2+x+1) + (A_2x+A_3)(x-1)$$

$x = 1 \Rightarrow A_1 \cdot 3 = 3 \Rightarrow \underline{A_1 = 1}$.

$x = 0 \Rightarrow A_1 - A_3 = 2 \Rightarrow A_3 = A_1 - 2 \Rightarrow \underline{A_3 = -1}$

$x = -1 \Rightarrow A_1 + (-A_2 + A_3)(-2) = 1$

$\Rightarrow A_1 + 2A_2 - 2A_3 = 1$

$\Rightarrow 1 + 2A_2 + 2 = 1 \Rightarrow \underline{A_2 = -1}$

Luego, $\int\frac{x+2}{x^3-1} = \int\left(\frac{1}{x-1} + \frac{-x-1}{x^2+x+1}\right) =$

$$= \int\frac{1}{x-1} - \int\frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

La primera integral es inmediata: $\int\frac{1}{x-1} = \ln|x-1| + k$.

La segunda integral se resuelve como suma de dos integrales, una de ellas mediante logaritmo y la otra mediante arco tangente. Para la primera se busca como numerador la derivada del denominador, para que la primitiva sea $\ln(x^2+x+1)$. El numerador buscado es $2x+1$. Para obtenerlo se introducen las constantes necesarias, de la manera siguiente:

$$x + 1 = \frac{1}{2}\cdot 2x + 1 = \frac{1}{2}(2x+1) + \frac{1}{2}.$$

$$\int\frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\int\frac{1}{\frac{3}{4}\left[\frac{\left(\frac{2x+1}{2}\right)^2}{\frac{3}{4}}+1\right]} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{2}{3}\int\frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\,\text{arc tg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + k.$$

En definitiva:

$$\int\frac{x+2}{x^3-1} = \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{\sqrt{3}}{3}\,\text{arc tg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + k.$$

Como se observa en el ejemplo anterior, los cálculos se complican. Por ello es necesario ir graduando los ejercicios y no dar demasiada importancia a las dificultades que sobrevengan antes de haber efectuado una práctica muy intensa.

En general, en este caso, la descomposición es del tipo:

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{A_1x+A_2}{ax^2+bx+c} + \ldots\ldots + \frac{A_{n-1}x+A_n}{mx^2+px+h},$$

donde q es un polinomio de grado n, con n raíces complejas, no reales, diferentes (las raíces complejas se presentan en pares conjugados).

◆ **Cuarto caso: El denominador tiene raíces complejas, no reales, múltiples**
(En el factoreo aparecen factores cuadráticos irreducibles repetidos)

Ejemplo

$$\int \frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 3}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{A_1x + B_1}{(x^2 + 1)^2} + \frac{A_2x + B_2}{x^2 + 1}$$

$$x^3 - 3x^2 + 2x - 3 = (A_1x + B_1) + (A_2x + B_2)(x^2 + 1)$$

$$x^3 - 3x^2 + 2x - 3 = A_2x^3 + B_2x^2 + (A_2 + A_1)x + (B_1 + B_2) \quad (1)$$

Debemos encontrar cuatro ecuaciones que permitan hallar los números A_1, B_1, A_2 y B_2.

$x = 0 \Rightarrow \underline{B_1 + B_2 = -3}$

$x = 1 \Rightarrow A_1 + B_1 + A_2 + B_2 + A_2 + B_2 = -3 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_1 + 2A_2 - 3 + B_2 = -3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{A_1 + 2A_2 + B_2 = 0}$

$x = -1 \Rightarrow -A_1 + B_1 - A_2 + B_2 - A_2 + B_2 = -9 \Rightarrow$

$\Rightarrow -A_1 - 3 - 2A_2 + B_2 = -9 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{A_1 + 2A_2 - B_2 = 6}$

$x = 2 \Rightarrow 2A_1 + B_1 + 8A_2 + 4B_2 + 2A_2 + B_2 = -3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2A_1 + 10A_2 + 4B_2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{A_1 + 5A_2 + 2B_2 = 0}$

Para hallar A_1, B_1, A_2 y B_2 debe resolverse el sistema:

$$\begin{cases} B_1 + B_2 = -3 \\ A_1 + 2A_2 + B_2 = 0 \\ A_1 + 2A_2 - B_2 = 6 \\ A_1 + 5A_2 + 2B_2 = 0 \end{cases}$$

Se obtiene $A_1 = 1$, $B_1 = 0$, $A_2 = 1$ y $B_2 = -3$.
Por lo tanto,

$$\int \frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 3}{(x^2 + 1)^2} = \int \frac{x}{(x^2 + 1)^2} + \int \frac{x - 3}{x^2 + 1} =$$

$$= \int \frac{x}{(x^2 + 1)^2} + \int \frac{x}{x^2 + 1} - \int \frac{3}{x^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{2} \int [2x(x^2 + 1)^{-2}] + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} - 3 \int \frac{1}{x^2 + 1} =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln (x^2 + 1) - 3 \operatorname{arc\,tg} x + k.$$

En este caso, si el polinomio cuadrático irreducible $(x^2 + bx + c)$ se presenta k veces en el denominador, la descomposición correspondiente en fracciones simples es:

$$\frac{p(x)}{(x^2 + bx + c)^k} = \sum_{i=1}^{k} \frac{A_ix + B_i}{(x^2 + bx + c)^i}.$$

Otro método

Planteada la descomposición en fracciones simples según cada caso, el problema de hallar las constantes A_1, A_2, ..., A_n, que suelen llamarse coeficientes indeterminados, se simplifica a veces teniendo en cuenta la definición de polinomios iguales.

En el ejercicio propuesto en la página 408 se llegó a la expresión (1):

$$x^3 - 3x^2 + 2x - 3 = A_2x^3 + B_2x^2 + (A_2 + A_1)x + (B_1 + B_2).$$

Para hallar los números A_1, A_2, B_1 y B_2 se eligieron valores de x que permitieron determinar un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas.

Si tenemos en cuenta la igualdad de funciones polinómicas, los coeficientes en ambos miembros deben ser respectivamente iguales.

O sea, $A_2 = 1 \wedge B_2 = -3 \wedge A_2 + A_1 = 2 \wedge B_1 + B_2 = -3$.

Luego, $A_2 = 1 \wedge B_2 = -3 \wedge A_1 = 1 \wedge B_1 = 0$, valores también encontrados por el método anterior.

Ejemplo

$$\int \frac{x^2 - 5}{x^3 - 2x^2 + x} = \int \left[\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x - 1} + \frac{A_3}{(x - 1)^2} \right]$$

Resulta:

$$(A_1 + A_2)x^2 + (-2A_1 - A_2 + A_3)x + A_1 = x^2 - 5.$$

Igualando coeficientes:

$$A_1 + A_2 = 1 \wedge -2A_1 - A_2 + A_3 = 0 \wedge A_1 = -5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_1 = -5 \wedge A_2 = 6 \wedge A_3 = -4.$$

EJERCICIOS

Caso 1

1) $\int \frac{2x^2 - 3}{x^2 + 5x}$

2) $\int \frac{x^4 + 2x + 1}{x + 2}$

3) $\int \frac{x^4 - 3x^3 + 5}{x^2 + 3x + 2}$

4) $\int \frac{3x - 5}{2x + 1}$

5) $\int \frac{2x^3}{x + 1}$

6) $\int \frac{1}{x^2 - 1}$

7) $\int \frac{1}{5x^2 - 7x - 6}$

8) $\int \frac{8}{x^2 + 6x + 8}$

Caso 2

9) $\int \frac{1}{(x-2)^2(x+3)}$

10) $\int \frac{3x^6 - 3x^5 - 24x^4 + 36x^3 - x}{(x-2)^2(x+3)}$

11) $\int \frac{x}{(x+1)^2(x-2)}$

12) $\int \frac{x^2}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}$

13) $\int \frac{x}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}$

14) $\int \frac{3}{x^4 + 2x^3 + x^2}$

15) $\int \frac{2x - 1}{x^3 + x^2 - 5x + 3}$

16) $\int \frac{x}{(x-5)^2(x+1)}$

17) $\int \frac{5}{x^3 - 6x^2 + 9x}$

18) $\int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2}$

19) $\int \frac{2x + 1}{(x+1)^2(x-3)}$

20) $\int \frac{x^4 - 9x^2 + 2}{x^3 - 3x^2}$

21) $\int \frac{x^5 + x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + x}$

22) $\int \frac{1}{x^3 + 7x^2 - 5x - 75}$

23) $\int \frac{x^5 + 2x^4 - 5x^3 - x^2 + 6x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$

24) $\int \frac{x^4 + x^3 - 10x^2 - 3x + 25}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$

Caso 3

25) $\int \frac{1}{x^2 - 4x + 7}$

26) $\int \frac{x^5 + 7x^3 + 5}{x^2 + 7}$

27) $\int \frac{x^3 + 4x - 1}{x^2 + 4}$

28) $\int \frac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 3}{x^2 + 2}$

29) $\int \frac{1}{x^2 - 2x + 5}$

30) $\int \frac{x^5 + 5x^3 - x}{x^2 + 5}$

31) $\int \frac{1}{7 + 3x^2}$

32) $\int \frac{x^4 - x^2 + x}{x^3 + 1}$

33) $\int \frac{x^4 + 3x^2 - x}{x^2 + 3}$

34) $\int \frac{x^5 + 5x^3 - 3}{x^2 + 5}$

35) $\int \frac{1}{x^2 + x + 1}$

36) $\int \frac{1}{4x^2 - 24x + 37}$

37) $\int \frac{1}{2 + 3x^2}$

38) $\int \frac{1}{2 + 9x^2}$

39) $\int \frac{1}{x^4 - 1}$

40) $\int \frac{2x^3}{x^2 + 1}$

41) $\int \frac{x^2}{(x+1)^2(x^2+1)}$

42) $\int \frac{1}{x^3 - 1}$

43) $\int \frac{1}{x^3 + 2x^2 + x + 2}$

44) $\int \frac{1}{x^3 + 2x^2 + x - 4}$

45) $\int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2 - x + 2}$

46) $\int \frac{x^2 - 3}{x^3 - 2x^2 + x - 2}$

Caso 4

47) $\int \frac{x - 1}{x(x^2 - 2x + 2)^2}$

48) $\int \frac{x^5}{x^4 + 8x^2 + 16}$

49) $\int \frac{1}{(9 + x^2)^3}$

50) $\int \frac{3x + 5}{(2x^2 + x + 1)^2}$

51) Calcular las siguientes integrales:

a) $\int \frac{\ln x}{x^2 - 2x + 1}$ b) $\int \frac{\text{arc tg}\,(2x)}{(x+3)^2}$

•VII. Integración de funciones irracionales

Para integrar funciones irracionales se pueden intentar distintas sustituciones. Consideramos, en especial, la integración de expresiones del tipo:

$\frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, cuyo denominador es la raíz cuadrada de un polinomio de segundo grado.

Estas integrales pueden resolverse mediante cambios de variable que conduzcan a funciones trigonométricas o hiperbólicas inversas.

Las primitivas que se utilizan son:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sen } x + k$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \text{arg sh } x + k$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \text{arg ch } x + k$$

El radicando apropiado se obtiene por el método ya utilizado de completar el cuadrado.

Ejemplo 1

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8+4x-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{8-(4x^2-4x+1)+1}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{9-(2x-1)^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9\left[1-\frac{(2x-1)^2}{9}\right]}} =$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{(2x-1)^2}{3}\right)}}$$

$$t = \frac{2x-1}{3} \Rightarrow dt = \frac{2}{3} \cdot dx \Rightarrow dx = \frac{3}{2} dt$$

Luego, $\frac{1}{3} \int \frac{\frac{3}{2} dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2} \text{ arc sen } t + k =$

$$= \frac{1}{2} \text{ arc sen } \frac{2x-1}{3} + k.$$

Ejemplo 2

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+10x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+10x+25)-25}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+5)^2-25}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{25}\sqrt{\left(\frac{x+5}{5}\right)^2-1}} = \frac{1}{5} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x+5}{5}\right)^2-1}} =$$

$$= \text{arg ch } \frac{x+5}{5} + k$$

Ejemplo 3

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x-90}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-6x+9)+81}} = \int \frac{dx}{9\sqrt{1+\frac{x^2-6x+9}{81}}} =$$

$$= \frac{1}{9} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x-3}{9}\right)^2}} = \text{arg sh } \frac{x-3}{9} + k$$

La integración de expresiones irracionales del tipo $\sqrt{ax^2+bx+c}$ puede resolverse por cambio adecuado de variable, recurriendo de preferencia a fórmulas trigonométricas o a funciones hiperbólicas.

Ejemplo 1

$$\int \sqrt{9-x^2}\, dx$$

Se busca llevar el radicando a la forma $1 - u^2$ para hacer la sustitución $u = \text{sen } t$, de donde resulta $\sqrt{1-\text{sen}^2 t} = \cos t$ (análogamente puede hacerse $u = \cos t$).

$$\int \sqrt{9-x^2}\, dx = \int \sqrt{9\left[1-\left(\frac{x}{3}\right)^2\right]}\, dx = 3 \int \sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}\, dx.$$

Como el integrando es $\sqrt{9-x^2}$, debe ser $|x| \leq 3$. Por lo tanto, tiene sentido en **R** la sustitución:

$$x = 3 \text{ sen } t.$$

Luego, es $dx = 3 \cos t\, dt$.

$$3 \int \sqrt{1-\text{sen}^2 t} \cdot 3 \cos t\, dt = 9 \int \cos^2 t\, dt = 9 \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt =$$

$$= \frac{9}{2} \int dt + \frac{9}{2} \int \cos 2t\, dt = \frac{9}{2} t + \frac{9}{4} \text{ sen } 2t + k.$$

De la sustitución $\frac{x}{3} = \text{sen } t$, resulta $t = \text{arc sen } \frac{x}{3}$

Por lo tanto, $\int \sqrt{9-x^2}\, dx = \frac{9}{2} \text{ arc sen } \frac{x}{3} + \frac{9}{4} \cdot 2 \text{ sen } t \cos t + k =$

$$= \frac{9}{2} \text{ arc sen } \frac{x}{3} + \frac{9}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} + k =$$

$$= \frac{9}{2} \text{ arc sen } \frac{x}{3} - \frac{x}{2} \sqrt{9 - x^2} + k.$$

Ejemplo 2

$$\int \sqrt{5 + x^2}\, dx$$

Para calcular esta integral puede intentarse una sustitución mediante funciones hiperbólicas, recordando que $1 + \text{sh}^2 t = \text{ch}^2 t$.

$$I = \int \sqrt{5 + x^2}\, dx = \sqrt{5} \int \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2}\, dx.$$

Como el dominio del integrando es R y el recorrido de sh también es R, puede hacerse: $\frac{x}{\sqrt{5}} = \text{sh } t$. Luego, es $dx = \sqrt{5} \cdot \text{ch } t\, dt$.

$$I = 5 \int \sqrt{1 + \text{sh}^2 t}\, \text{ch } t\, dt = 5 \int \text{ch}^2 t\, dt.$$

Para resolver esta integral conviene recordar que las funciones hiperbólicas admiten fórmulas similares a las trigonométricas:

$$\text{ch}^2 t + \text{sh}^2 t = \text{ch } 2t$$
$$\text{ch}^2 t - \text{sh}^2 t = 1$$

Sumando: $\quad 2\,\text{ch}^2 t = \text{ch } 2t + 1.$

Restando: $\quad 2\,\text{sh}^2 t = \text{ch } 2t - 1.$

Luego,

$$5 \int \text{ch}^2 t\, dt = \frac{5}{2} \int (\text{ch } 2t + 1)\, dt = \frac{5}{2} \int \text{ch } 2t\, dt + \frac{5}{2} \int dt =$$

$$= \frac{5}{4} \text{ sh } 2t + \frac{5t}{2} + k = \frac{5}{4} \cdot 2\, \text{sh } t \cdot \text{ch } t + \frac{5}{2} \text{ arg sh } \frac{x}{\sqrt{5}} + k =$$

$$= \frac{5x}{2\sqrt{5}} \sqrt{1 + \frac{x^2}{5}} + \frac{5}{2} \text{ arg sh } \frac{x}{\sqrt{5}} + k =$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{5 + x^2} + \frac{5}{2} \text{ arg sh } \frac{x}{\sqrt{5}} + k.$$

EJERCICIOS

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 4x^2}}$ 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x + x^2}}$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x - 1}}$ 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 3}}$

5) $\int \sqrt{9x^2 - 16}\, dx$ 6) $\int \sqrt{x^2 + 4x + 5}\, dx$

7) $\int \sqrt{x^2 - 2x - 7}\, dx$ 8) $\int \frac{\sqrt{4x^2 - 1}}{x}\, dx$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{28 - 12x - x^2}}$ 10) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + x - 10}}$

11) $\int \frac{2x + 5}{\sqrt{9x^2 + 6x + 2}}\, dx$ 12) $\int \frac{8x - 11}{\sqrt{2x - x^2 + 5}}\, dx$

•VIII. Otras integraciones por sustitución

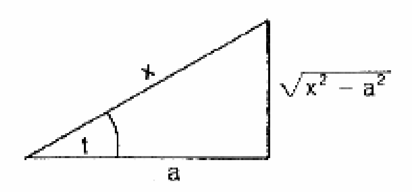
Finalmente vamos a resolver otras integrales de distintos tipos recurriendo a cambios convenientes de variables.

Comenzamos con algunos ejemplos donde vuelven a aparecer funciones irracionales, pero donde necesitamos sustituciones más artificiosas que las empleadas anteriormente.

Ejemplo 1

Calcular $I_1 = \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - a^2}}\, dx.$

Para este tipo de integrales es conveniente elegir una nueva variable, y para ello resulta bastante simple considerar el teorema de Pitágoras en un triángulo rectángulo auxiliar. Pensando en la expresión $\sqrt{x^2 - a^2}$, es lógico asignar a la hipotenusa el valor x y a uno de los catetos el valor a.



Para el ángulo agudo t, es $\cos t = \frac{a}{x}$.

Por lo tanto, $x = \frac{a}{\cos t} \Rightarrow dx = \frac{\text{sen } t}{\cos^2 t}\, dt.$

Además es $\text{sen } t = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}.$

Reemplazando valores, queda:

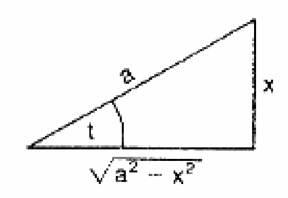
$$I_1 = \int \frac{\cos^2 t}{a^2} \cdot \frac{\cos t}{a \text{ sen } t} \cdot \frac{a \text{ sen } t}{\cos^2 t}\, dt;$$

$$I_1 = \frac{1}{a^2} \int \cos t\, dt \Rightarrow I_1 = \frac{1}{a^2} \text{ sen } t + k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{1}{a^2} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} + k.$$

Ejemplo 2

Calcular $I_2 = \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx.$



$$x = a \text{ sen } t \Rightarrow dx = a \cos t\, dt.$$

Además, $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t.$

$$I_2 = \int \frac{a^2 \text{ sen}^2 t}{a \cos t}\, a \cos t\, dt \Rightarrow I_2 = a^2 \int \text{sen}^2 t\, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_2 = a^2 \int \frac{1 - \cos 2t}{2}\, dt \Rightarrow I_2 = \frac{a^2}{2}\left(t - \frac{\text{sen } 2t}{2}\right) + k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{a^2}{2}(t - \text{sen } t \cos t) + k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{a^2}{2}\left(\text{arc sen } \frac{x}{a} - \frac{x}{a} \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}\right) + k \Rightarrow$$

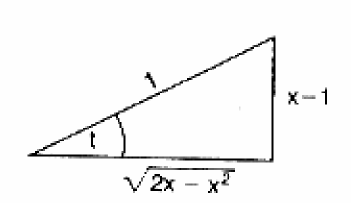
$$\Rightarrow I_2 = \frac{a^2}{2} \text{ arc sen } \frac{x}{a} - \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + k.$$

Ejemplo 3

$$I_3 = \int \frac{x^2}{\sqrt{2x - x^2}}\, dx.$$

Este caso es similar al anterior si previamente completamos el cuadrado en el radicando.

$$I_3 = \int \frac{x^2}{\sqrt{1 - (x-1)^2}}\, dx.$$



$$x - 1 = \text{sen } t \Rightarrow x = 1 + \text{sen } t \Rightarrow dx = \cos t\, dt.$$

También $\cos t = \sqrt{2x - x^2}.$

$$I_3 = \int \frac{(1 + \text{sen } t)^2}{\cos t} \cos t\, dt \Rightarrow I_3 = \int (1 + \text{sen } t)^2\, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_3 = \int (1 + 2 \text{ sen } t + \text{sen}^2 t)\, dt \Rightarrow$$

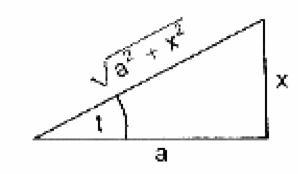
$$\Rightarrow I_3 = t - 2 \cos t + \frac{t}{2} - \frac{\text{sen } 2t}{4} + k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_3 = \frac{3}{2} \text{ arc sen } (x-1) - 2\sqrt{2x - x^2} - \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{2x - x^2} + k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_3 = \frac{3}{2} \text{ arc sen } (x-1) - \frac{x+3}{2}\sqrt{2x - x^2} + k.$$

Ejemplo 4

$$I_4 = \int \frac{1}{x^2\sqrt{a^2 + x^2}}\, dx.$$



$$x = a \text{ tg } t \Rightarrow dx = \frac{a}{\cos^2 t}\, dt.$$

$$\cos t = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} \Rightarrow \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{a}{\cos t}.$$

$$I_4 = \int \frac{\cos t}{a^3 \operatorname{tg}^2 t} \frac{a}{\cos^2 t}\, dt \Rightarrow I_4 = \frac{1}{a^2} \int \frac{\cos t}{\operatorname{sen}^2 t}\, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_4 = \frac{1}{a^2} \int (\operatorname{sen} t)^{-2} \cos t\, dt \Rightarrow I_4 = -\frac{1}{a^2 \operatorname{sen} t} + k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_4 = -\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a^2 x} + k.$$

Ejemplo 5

$$I_5 = \int \frac{1}{x\sqrt{a^2 + x^2}}\, dx.$$

Igual que en el ejemplo anterior, hacemos $x = a \operatorname{tg} t$.

$$dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt \quad y \quad \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{a}{\cos t}.$$

$$I_5 = \int \frac{\cos t}{a^2 \operatorname{tg} t} \frac{a}{\cos^2 t}\, dt \Rightarrow I_5 = \frac{1}{a} \int \frac{1}{\operatorname{sen} t}\, dt.$$

Para calcular la primitiva de cosec t necesitamos primero un artificio trigonométrico y luego un nuevo cambio de variable.

$$I_5 = \frac{1}{a} \int \frac{\operatorname{sen} t}{\operatorname{sen}^2 t}\, dt \Rightarrow I_5 = \frac{1}{a} \int \frac{\operatorname{sen} t}{1 - \cos^2 t}\, dt.$$

$$v = \cos t \Rightarrow dv = -\operatorname{sen} t\, dt.$$

$$I_5 = -\frac{1}{a} \int \frac{1}{1 - v^2}\, dv \Rightarrow I_5 = \frac{1}{a} \int \frac{1}{v^2 - 1}\, dv \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_5 = \frac{1}{a} \int \left(\frac{A_1}{v - 1} + \frac{A_2}{v + 1} \right) dv \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_5 = \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{v - 1} - \frac{1}{v + 1} \right) dv \Rightarrow I_5 = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{v - 1}{v + 1} \right| + k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_5 = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{1 - \cos t}{1 + \cos t} \right|^{1/2} + k$$

Pero $\frac{1 - \cos t}{1 + \cos t} = (\operatorname{cosec} t - \operatorname{cotg} t)^2$.

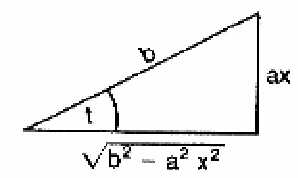
Luego, $I_5 = \frac{1}{a} \ln |\operatorname{cosec} t - \operatorname{cotg} t| + k$.

Reemplazando t obtenemos finalmente:

$$I_5 = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x} - \frac{a}{x} \right| + k.$$

Ejemplo 6

$$I_6 = \int \frac{\sqrt{b^2 - a^2 x^2}}{x}\, dx.$$



$$x = \frac{b}{a} \operatorname{sen} t \Rightarrow dx = \frac{b}{a} \cos t\, dt.$$

$$\sqrt{b^2 - a^2 x^2} = b \cos t.$$

$$I_6 = \int \frac{b \cos t}{\frac{b}{a} \operatorname{sen} t} \frac{b}{a} \cos t\, dt \Rightarrow I_6 = b \int \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen} t}\, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_6 = b \int \frac{1 - \operatorname{sen}^2 t}{\operatorname{sen} t}\, dt \Rightarrow I_6 = b \int \frac{1}{\operatorname{sen} t}\, dt - b \int \operatorname{sen} t\, dt.$$

En el ejemplo anterior vimos que $\int \frac{1}{\operatorname{sen} t}\, dt = \ln |\operatorname{cosec} t - \operatorname{cotg} t| + k'$.

Luego, $I_6 = b \ln |\operatorname{cosec} t - \operatorname{cotg} t| + b \cos t + k$.

Finalmente, $I_6 = b \ln \left| \frac{b - \sqrt{b^2 - a^2 x^2}}{a x} \right| + \sqrt{b^2 - a^2 x^2} + k.$

En los ejemplos siguientes haremos cambios de variable sin utilizar funciones trigonométricas. Si en el integrando aparece $\sqrt[n]{ax + b}$, trataremos de resolver la integral mediante la sustitución $ax + b = t^n$.

Ejemplo 7

$$I_7 = \int \frac{1}{x\sqrt{1 - x}}\, dx.$$

$$t^2 = 1 - x \Rightarrow dx = -2t\, dt.$$

$$I_7 = \int \frac{1}{(1 - t^2)\, t} (-2t)\, dt \Rightarrow I_7 = -2 \int \frac{1}{1 - t^2}\, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_7 = 2 \int \left(\frac{A_1}{t - 1} + \frac{A_2}{t + 1} \right) dt \Rightarrow I_7 = \int \left(\frac{1}{t - 1} - \frac{1}{t + 1} \right) dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_7 = \ln \left| \frac{t - 1}{t + 1} \right| + k \Rightarrow I_7 = \ln \left| \frac{\sqrt{1 - x} - 1}{\sqrt{1 - x} + 1} \right| + k.$$

Ejemplo 8

$$I_8 = \int x \sqrt[3]{a - bx}\, dx.$$

$$a + bx = t^3 \Rightarrow dx = \frac{3t^2}{b}\, dt.$$

$$I_8 = \int \frac{t^3 - a}{b} \cdot t \cdot \frac{3t^2}{b}\, dt \Rightarrow I_8 = \frac{3}{b^2} \int (t^6 - at^3)\, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_8 = \frac{3}{b^2} \left(\frac{t^7}{7} - a \frac{t^4}{4} \right) + k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_8 = \frac{3}{b^2} \left[\frac{(a+bx)^{7/3}}{7} - \frac{a}{4} (a+bx)^{4/3} \right] + k.$$

Finalmente, si en el integrando aparece e^x, puede resultar útil la sustitución $t = e^x$, como sucede en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 9

$$I_9 = \int \frac{1}{1 - e^x}\, dx.$$

$$e^x = t \Rightarrow x = \ln t \Rightarrow dx = \frac{1}{t}\, dt.$$

$$I_9 = \int \frac{1}{1 - t} \cdot \frac{1}{t}\, dt \Rightarrow I_9 = \int \left(\frac{A_1}{t} + \frac{A_2}{1 - t} \right) dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_9 = \int \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{1 - t} \right) dt \Rightarrow I_9 = \ln t - \ln |1 - t| + k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_9 = x - \ln |1 - e^x| + k.$$

Como puede observarse en los ejemplos anteriores, el método de sustituir variables no se agota y puede recurrirse a él en situaciones muy diferentes. Sin embargo, no tiene demasiado sentido complicar los cambios de variables requeridos, pues solamente implican destreza en el manejo de artificios.

Por ello, una vez asimilados los métodos más comunes de integración esbozados en este capítulo, es aconsejable acostumbrarse a manejar tablas de integrales para resolver los casos más complicados.

Al final del capítulo se agrega una tabla con algunas primitivas que puede resultar de utilidad.

EJERCICIOS

1) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}}\, dx$ 2) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx$

3) $\int \frac{1}{x \sqrt{4x^2 + 9}}\, dx$ 4) $\int \frac{1}{(x-2) \sqrt{x - 2}}\, dx$

5) $\int x \sqrt{4 + x}\, dx$ 6) $\int x^3 \sqrt[3]{2 + x^2}\, dx$

*7) $\int x^3 \sqrt{x^2 + 5}\, dx$ *8) $\int x^3 \sqrt[4]{9 + x^2}\, dx$

9) $\int \frac{1}{\sqrt{(b^2 + x^2)^3}}\, dx$ 10) $\int \frac{1}{(x^2 - 2x + 4)^{3/2}}\, dx$

11) $\int \frac{\sqrt{4\sqrt{x} - x - 3}}{2\sqrt{x}}\, dx$ 12) $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx$

* Estas integrales fueron resueltas por partes en la página 398.

IX. Tabla de primitivas

1. $\int x^n\, dx = \frac{1}{n + 1} x^{n+1} + k \quad (n \neq -1)$
2. $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln |x| + k$
3. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln |f(x)| + k$
4. $\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\, dx = \sqrt{f(x)} + k$
5. $\int e^x\, dx = e^x + k$
6. $\int a^{bx}\, dx = \frac{a^{bx}}{b \ln a} + k \quad (a > 0)$
7. $\int (x\, e^{ax})\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1) + k$
8. $\int \ln x\, dx = x \ln x - x + k$
9. $\int \log x\, dx = \log e\, (x \ln x - x) + k$
10. $\int (x^n \ln x)\, dx = x^{n+1} \left(\frac{\ln x}{n + 1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) + k \quad (n \neq -1)$
11. $\int (e^{ax} \operatorname{sen} bx)\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \operatorname{sen} bx - b \cos bx) + k$

12. $\int (e^{ax} \cos bx)\, dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (b \operatorname{sen} bx + a \cos bx) + k$

13. $\int \dfrac{1}{x \ln x}\, dx = - \ln |\ln x| + k$

14. $\int \operatorname{sen} x\, dx = - \cos x + k$

15. $\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + k$

16. $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln |\cos x| + k$

17. $\int \operatorname{cotg} x\, dx = \ln |\operatorname{sen} x| + k$

18. $\int \sec x\, dx = \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + k$

19. $\int \operatorname{cosec} x\, dx = \ln |\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x| + k$

20. $\int \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x + k$

21. $\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = - \operatorname{cotg} x + k$

22. $\int \dfrac{1}{1 + \cos x}\, dx = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} + k$

23. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + k$

24. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + k$

25. $\int \operatorname{th} x\, dx = \ln |\operatorname{ch} x| + k$

26. $\int \operatorname{coth} x\, dx = \ln |\operatorname{sh} x| + k$

27. $\int \operatorname{sech} x\, dx = 2 \operatorname{arc\,tg} (e^x) + k$

28. $\int \operatorname{cosech} x\, dx = \ln \left| \operatorname{th} \dfrac{x}{2} \right| + k$

29. $\int (x \operatorname{sen} x)\, dx = \operatorname{sen} x - x \cos x + k$

30. $\int (x \cos x)\, dx = \cos x + x \operatorname{sen} x + k$

31. $\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + k$

32. $\int \cos^2 x\, dx = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + k$

33. $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx = \operatorname{tg} x - x + k$

34. $\int \operatorname{cotg}^2 x\, dx = - \operatorname{cotg} x - x + k$

35. $\int \operatorname{sh}^2 x\, dx = \dfrac{1}{2} (\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x - x) + k$

36. $\int \operatorname{ch}^2 x\, dx = \dfrac{1}{2} (x + \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x) + k$

37. $\int \operatorname{arc\,sen} x\, dx = x \operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1 - x^2} + k$

38. $\int \operatorname{arc\,cos} x\, dx = x \operatorname{arc\,cos} x - \sqrt{1 - x^2} + k$

39. $\int \operatorname{arc\,tg} x\, dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \ln \sqrt{1 + x^2} + k$

40. $\int \dfrac{1}{e^x + 1}\, dx = x - \ln(1 + e^x) + k$

41. $\int \dfrac{1}{a^2 + x^2}\, dx = \dfrac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{a} + k$

42. $\int \dfrac{1}{a^2 - x^2}\, dx = \dfrac{1}{a} \operatorname{arg\,th} \dfrac{x}{a} + k$

43. $\int \dfrac{1}{x^2 - a^2}\, dx = - \dfrac{1}{a} \operatorname{arg\,coth} \dfrac{x}{a} + k$

44. $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \operatorname{arc\,sen} \dfrac{x}{a} + k$

45. $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}\, dx = \operatorname{arg\,sh} \dfrac{x}{a} + k = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + k$

46. $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx = \operatorname{arg\,ch} \dfrac{x}{a} + k = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + k$

47. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \dfrac{a^2}{2} \operatorname{arc\,sen} \dfrac{x}{a} - \dfrac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + k$

48. $\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx = \dfrac{a^2}{2} \operatorname{arg\,sh} \dfrac{x}{a} + \dfrac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + k$

49. $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \dfrac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \dfrac{a^2}{2} \operatorname{arg\,ch} \dfrac{x}{a} + k$

50. $\int \dfrac{1}{x \sqrt{a x + b}}\, dx = \dfrac{1}{\sqrt{b}} \ln \left| \dfrac{\sqrt{a x + b} - \sqrt{b}}{\sqrt{a x + b} + \sqrt{b}} \right| + k \quad (b>0)$

51. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{a\,x+b}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{-b}}\ \text{arc tg}\sqrt{\frac{a\,x+b}{-b}} + k \quad (b<0)$

52. $\displaystyle\int x\sqrt{a\,x+b}\,dx = \frac{2}{15a^2}\,(3a\,x-2b)\,(a\,x-b)^{3/2} + k$

53. $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \frac{x}{8}\,(2x^2\pm a^2)\,\sqrt{x^2\pm a^2} - \frac{a^4}{8}\,\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + k$

54. $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{5}\,(x^2-a^2)^{5/2} + \frac{a^3}{3}\,(x^2-a^2)^{3/2} + k$

55. $\displaystyle\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{x}{4}\,(a^2-x^2)^{3/2} + \frac{a^2}{4}\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ (véase Nº 47)

56. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2-a^2} - a\ \text{arc cos}\ \frac{a}{x} + k$

57. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2+a^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right| + k$

58. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2\pm a^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2\pm a^2}}{x} + \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + k$

59. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\frac{x}{2}\,\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\ \text{arc sen}\ \frac{x}{a} + k$

60. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right| + k$

61. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,dx = \frac{x}{2}\,\sqrt{x^2\pm a^2} \mp \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + k$

62. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + k$

63. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2\,x} + k$

64. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\ \text{arc cos}\ \frac{a}{x} + k$

65. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x}\,dx = 2\sqrt{ax+b} + b\int\frac{1}{x\sqrt{ax+b}}\,dx$ (véanse Nºs 50 y 51)

66. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2\pm a^2}}\,dx = \mp\frac{\sqrt{x^2\pm a^2}}{a^2x} + k$

67. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2-x^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + k$

68. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \text{arc sen}\ \frac{x}{a} + k$

69. $\displaystyle\int (x^2\pm a^2)^{3/2}\,dx = x\,(x^2\pm a^2)^{3/2} - 3\int x^2\sqrt{x^2\pm a^2}$ (véase Nº 53)

70. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2\pm a^2)^{3/2}}\,dx = \frac{\pm x}{a^2\sqrt{x^2\pm a^2}} + k$

71. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2\pm a^2)^{3/2}}\,dx = \frac{-x}{\sqrt{x^2\pm a^2}} + \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + k$

72. $\displaystyle\int (a^2-x^2)^{3/2}\,dx = \frac{x}{4}\,(a^2-x^2)^{3/2} + \frac{3a^2}{4}\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ (véase Nº 47)

73. $\displaystyle\int \frac{1}{(a^2-x^2)^{3/2}}\,dx = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} + k$

Como trabajo práctico pueden verificarse algunas de las fórmulas anteriores aplicando la definición de primitiva, es decir, la derivada del resultado debe coincidir con el integrando.

♦ Nota

En este capítulo, al considerar funciones primitivas, hemos prescindido muchas veces de la notación diferencial.

Se ha recomendado su uso en los casos de sustitución solamente con el motivo de simplificar los cálculos y prevenir errores.

Pero también en el cálculo de integrales por sustitución puede prescindirse del uso del diferencial. Para ello es necesario siempre, al efectuar un cambio de variable en el integrando, multiplicar la nueva función compuesta por la derivada de la función interior.

O sea, si al buscar una primitiva de f se recurre al cambio de variable $x = g(t)$, donde g es una función derivable, debe escribirse:

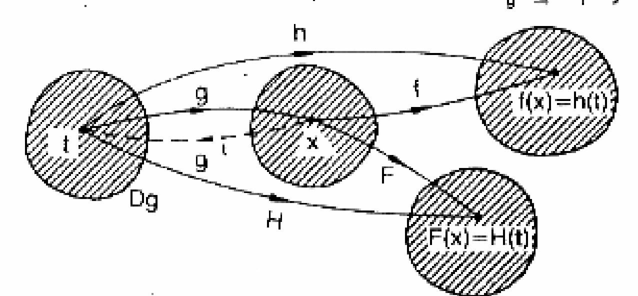
$$\int f(x) = \int \big(f\,[g(t)]\cdot g'(t)\big).$$

Justificaremos la regla anterior, que es, una vez más, la regla de la cadena.

Se trata de calcular una primitiva de la función integrable f.

Si F es una primitiva de f, es $F'(x) = f(x)$ (1).

Hacemos $x = g(t)$. (Verificamos previamente: $Rec_g \subseteq D_f$ y $D_f = D_F$.)



De acuerdo con el diagrama anterior, es

$$h = f \circ g \quad y \quad h(t) = f[g(t)] = f(x).$$

Además, $H = F \circ g$ y $H(t) = F[g(t)] = F(x)$.

Por lo tanto, encontrar la primitiva F se reduce a encontrar la función H, que depende exclusivamente de t.

Por la regla de la cadena:

$$H'(t) = (F \circ g)'(t) = F'[g(t)] \cdot g'(t) = f[g(t)] \cdot g'(t).$$

Por definición de primitiva:

$$H'(t) = f[g(t)] \cdot g'(t) \Rightarrow \int \left(f[g(t)] \cdot g'(t)\right) = H(t) + k.$$

Además es $H(t) + k = F(x) + k = \int f(x)$.

Reemplazando convenientemente resulta:

$$\int f(x) = \int \left(f[g(t)] \cdot g'(t)\right) = H(t) + k.$$

Como el resultado aparece expresado en la variable t, al hacer la elección de g debe asegurarse la existencia de g^{-1} para poder efectuar el reemplazo final $H(t) = F(x)$, donde $t = g^{-1}(x)$.

Insistimos entonces en que puede prescindirse del diferencial si se recuerda, al efectuar un cambio de variable $x = g(t)$, que hay que multiplicar la nueva función compuesta $f \circ g$ por g' en el integrando. Por otra parte, es una situación análoga a la que se presenta al efectuar cambios de variables en integrales múltiples.

Aplicaremos la propiedad anterior para calcular la integral $I = \int \sqrt{9 - x^2}$ resuelta por sustitución en la página 413, con ayuda del diferencial.

Si hacemos $x = g(t) = 3 \operatorname{sen} t$, es $g'(t) = 3 \cos t$.

Luego, es $I = \int \sqrt{9 - 9 \operatorname{sen}^2 t} \cdot 3 \cos t = 9 \int \cos^2 t =$

$$= \frac{9t}{2} + \frac{9 \operatorname{sen} 2t}{4} + k = \frac{9}{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{3} + \frac{x}{2} \sqrt{9 - x^2} + k.$$

RESPUESTAS A EJERCICIOS

CAPÍTULO 11

Sección II

1) $-\frac{1}{6x^6} + k$

2) $\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - \cos x + k$

3) $\ln |x - a| + k$

4) $\frac{5x}{4} \sqrt[5]{x^3} - \frac{2x^3}{7} \sqrt{x} - 6x + k$

5) $\frac{x^8}{24} + k$

6) $\frac{3}{5} x^5 + \frac{x^{10}}{2} + k$

7) $\frac{35}{8} x^{8/5} - \frac{2}{9} x^{9/2} + k$

8) $x \ln 2 + \ln |x| + k$

Sección III

1) $-\ln |a - x| + k$

2) $-\ln(\cos x) + k$

3) $\frac{1}{15} (x^5 + 7)^9 + k$

4) $-\frac{\operatorname{sen}^4 x}{4} + k$

5) $\frac{5}{21} (2x^6 - 3x)^{7/5} + k$

6) $\frac{2}{5} \ln |x^5 + 3| + k$

7) $\ln (1 + \operatorname{sen}^2 x) + k$

8) $-\frac{1}{6} (\cos^3 x + x^3)^2 + k$

9) $\frac{5}{24} (3x^5 - 2x)^{12/5} + k$

10) $\frac{3}{8} \operatorname{arc\,tg} (8x) + k$

11) $-\frac{1}{5} \ln |\cos x - x^5| + k$

12) $\frac{1}{2} \ln |3x^2 + 2x| + k$

13) $-\frac{1}{21} \cos^7 (3x) + k$

14) $\frac{1}{6} (x^4 + 3)^{3/2} + k$

15) $-\frac{1}{8} (2x + 3x^2)^{-4} + k$

16) $\frac{(5x + 3)^7}{35} + k$

17) $-\frac{\cos^9 x}{9} + k$

18) $\frac{(6x + 7)^{13}}{78} + k$

19) $-\frac{\cos (x^5 + 3)}{5} + k$

20) $\frac{1}{3} \ln |x^3 + 3x| + k$

21) $\frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + 3)^3} + k$

22) $\frac{1}{2} \ln |x^2 + 2x| + k$

23) $-\frac{1}{2} \operatorname{sen} (1 - x^2) + k$

24) $\frac{1}{3} \ln |x^3 + 1| + k$

25) $\frac{1}{420} (3x^7 + 2)^{10} + k$

26) $-\frac{1}{3} (\cos 2x)^{3/2} + k$

27) $-e^{\frac{1}{x}} + k$

28) $\frac{3^{(e^x)}}{\ln 3} + k$

29) $\frac{2^{tg\,x}}{\ln 2} + k$

30) $\frac{1}{4}\, tg^4 x + k$

Sección IV

1) $\frac{a^x e^x}{1 + \ln a} + k$

2) $\frac{x^3}{3}\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + k$

3) $e^x (x - 1) + k$

4) $x \operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1 - x^2} + k$

5) $-\, e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + k$

6) $-\, x \cos x + \operatorname{sen} x + k$

7) $\frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x) + k$

8) $\frac{e^x}{2}(\cos x + \operatorname{sen} x) + k$

9) $\frac{x}{2}[\cos(\ln x) + \operatorname{sen}(\ln x)] + k$

10) $x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + k$

11) $\frac{8}{17} e^{x/2}\left(\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{4}\cos 2x\right) + k$

12) $\frac{x}{5}\operatorname{sen}(5x) + \frac{\cos(5x)}{25} + k$

13) $x \operatorname{arc\,sen}(bx) + \frac{\sqrt{1 - b^2x^2}}{b} + k$

14) $\frac{e^{2x}}{10}(\operatorname{sen} 4x - 2\cos 4x) + k$

15) $x \operatorname{arc\,cos}(ax) - \frac{\sqrt{1 - a^2x^2}}{a} + k$

16) $\frac{x^4}{4}\operatorname{arc\,tg}(3x) - \frac{x^3}{36} + \frac{x}{108} - \frac{\operatorname{arc\,tg}(3x)}{324} + k$

17) $\frac{5^x \cdot x^2}{\ln 5} - \frac{2x\,5^x}{\ln^2 5} + \frac{2 \cdot 5^x}{\ln^3 5} + k$

18) $-\cos(\ln x) + k$

19) $\frac{a^x \cos(3x)\ln a + 3a^x \operatorname{sen}(3x)}{9 + \ln^2 a} + k$

20) $x\ln(x^2 + 1) - 2x + 2\operatorname{arc\,tg} x + k$

21) $\frac{3^x \ln 3\operatorname{sen}(3x) - 3^{x+1}\cos(3x)}{\ln^2 3 + 9} + k$

22) $\frac{5^x}{25 + \ln^2 5}[5\operatorname{sen}(5x) + \ln 5\cos(5x)] + k$

23) $\frac{x^2 2^x}{\ln 2} - \frac{2^{x+1}\cdot x}{\ln^2 2} + \frac{2^{x+1}}{\ln^3 2} + k$

24) $\frac{81}{82} e^{-\frac{x}{3}}\left[\frac{\operatorname{sen}(3x)}{3} - \frac{\cos(3x)}{27}\right] + k$

25) $-\frac{x}{4} e^{-4x} - \frac{1}{16} e^{-4x} + k$

26) $\frac{5^x \cdot e^{3x}}{3 + \ln 5} + k$

27) $\frac{e^x}{26}[\cos(5x) + 5\operatorname{sen}(5x)] + k$

28) $\frac{2 \cdot 3^{2x}}{1 + 16\ln^2 3}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + 4\ln 3\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right] + k$

29) $\frac{1}{15}(3x^2 - 10)(x^2 + 5)^{3/2} + k$ $[f'(x) = x(x^2+5)^{1/2} \wedge g(x) = x^2]$

30) $\frac{2}{45}(9 + x^2)^{5/4}(5x^2 - 36) + k$

Sección V

1) $-\frac{\cos(7x)}{7} + \frac{\cos^3(7x)}{21} + k$

2) $\operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + k$

3) $-\frac{2}{9}\cos^{\frac{9}{2}} x + \frac{2}{13}\cos^{\frac{13}{2}} x + k$

4) $\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3(2x) + \frac{1}{10}\operatorname{sen}^5(2x) + k$

5) $\frac{3}{8}x - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + \frac{\operatorname{sen}(4x)}{32} + k$

6) $\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen}(6x)}{12} + k$

7) $\frac{5}{8}\operatorname{sen}^{8/5} x - \frac{5}{18}\operatorname{sen}^{18/5} x + k$

8) $-\frac{3}{8}\cos^{8/3} x + \frac{3}{14}\cos^{\frac{14}{3}} x + k$

9) $\frac{x}{8} - \frac{\operatorname{sen}(16x)}{128} + k$

10) $\frac{3x}{8} - \frac{1}{12}\operatorname{sen}(6x) - \frac{1}{96}\operatorname{sen}(12x) + k$

11) $\frac{\operatorname{sen}^3(5x)}{15} - \frac{\operatorname{sen}^5(5x)}{25} + k$

12) $-\frac{4}{3}\cos^{3/2}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{4}{7}\cos^{7/2}\left(\frac{x}{2}\right) + k$

13) $\frac{tg^3(2x)}{6} + \frac{tg(2x)}{2} + k$

14) $tg\,x + \frac{tg^3 x}{3} + k$

15) $\frac{sh(6x)}{12} - \frac{x}{2} + k$

16) $\frac{sh(4x)}{4} + \frac{sh^3(4x)}{12} + k$

17) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ arc tg $\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\,\text{tg}\,x\right) + k$ (t = tg x)

18) $\ln|\text{tg}\,x + \sec x| + k$ (t = sen x)

Sección VI

1) $2x - \frac{3}{5}\ln|x| - \frac{47}{5}\ln|x+5| + k$

2) $\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 6x + 13\ln|x+2| + k$

3) $\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 16x + 9\ln|x-1| - 45\ln|x-2| + k$

4) $\frac{3}{2}x - \frac{13}{4}\ln|2x+1| + k$

5) $\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 2x - 2\ln|x+1| + k$

6) $\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + k$

7) $\frac{1}{13}\ln|x-2| - \frac{1}{13}\ln\left|x+\frac{3}{5}\right| + k$

8) $4\ln|x+2| - 4\ln|x+4| + k$

9) $-\frac{1}{5(x-2)} - \frac{\ln|x-2|}{25} + \frac{\ln|x+3|}{25} + k$

10) $\frac{3x^4}{4} + \frac{2}{5(x-2)} + \frac{3}{25}\ln|x+3| - \frac{3}{25}\ln|x-2| + k$

11) $-\frac{1}{3(x+1)} - \frac{2}{9}\ln|x+1| + \frac{2}{9}\ln|x-2| + k$

12) $4\ln|x+2| - \frac{1}{x+1} - 3\ln|x+1| + k$

13) $\ln|x-1| - \frac{2}{x-2} - \ln|x-2| + k$

14) $-\frac{3}{x} - \frac{3}{x+1} + \ln\left|\frac{x+1}{x}\right|^6 + k$

15) $-\frac{1}{4(x-1)} + \frac{7}{16}\ln|x-1| - \frac{7}{16}|x+3| + k$

16) $\frac{1}{36}\ln|x-5| - \frac{1}{36}\ln|x+1| - \frac{5}{6(x-5)} + k$

17) $\frac{5}{9}\ln|x| - \frac{5}{3(x-3)} - \frac{5}{9}\ln|x-3| + k$

18) $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + 2\ln|x| - 2\ln|x-1| + k$

19) $-\frac{1}{4(x+1)} - \frac{7}{16}\ln|x+1| + \frac{7}{16}\ln|x-3| + k$

20) $\frac{x^2}{2} + 3x + \frac{2}{3x} - \frac{2}{9}\ln|x| + \frac{2}{9}\ln|x-3| + k$

21) $\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 - x + \ln|x| - \frac{7}{x-1} - \ln|x-1| + k$

22) $\frac{1}{8(x+5)} - \frac{1}{64}\ln|x+5| + \frac{1}{64}\ln|x-3| + k$

23) $\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 - x - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{3}{4}\ln|x-1| - \frac{3}{4}\ln|x+1| + k$

24) $\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{3}{4(x-2)} + \frac{\ln|x-2|}{16} - \frac{\ln|x+2|}{16} + k$

25) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ arc tg $\frac{x-2}{\sqrt{3}} + k$

26) $\frac{x^4}{4} - \frac{5\sqrt{7}}{7}$ arc tg $\frac{x}{\sqrt{7}} + k$

27) $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$ arc tg $\frac{x}{2} + k$

28) $\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$ arc tg $\frac{x}{\sqrt{2}} + k$

29) $\frac{1}{2}$ arc tg $\frac{x-1}{2} + k$

30) $\frac{x^4}{4} - \ln\sqrt{x^2+5} + k$

31) $\frac{\sqrt{21}}{21}$ arc tg $\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{7}} + k$

32) $\frac{x^2}{2} - \frac{\ln|x^3+1|}{3} + k$

33) $\frac{x^3}{3} - \ln\sqrt{x^2+3} + k$

34) $\frac{x^4}{4} - \frac{3\sqrt{5}}{5}$ arc tg $\frac{x}{\sqrt{5}} + k$

35) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ arc tg $\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + k$

36) $\frac{1}{2}$ arc tg $(2x-6) + k$

37) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ arc tg $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,x\right) + k$

38) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ arc tg $\frac{3x}{\sqrt{2}} + k$

39) $\frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}$ arc tg $x + k$

40) $x^2 - \ln(x^2+1) + k$

41) $-\frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + k$

42) $\frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + k$

43) $\frac{2}{5}\operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{5}\ln|x+2| - \frac{1}{10}\ln(x^2-1) + k$

44) $\frac{1}{8}\ln|x-1| - \frac{1}{16}\ln(x^2+3x+4) - \frac{5\sqrt{7}}{56}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+3}{\sqrt{7}}\right) + k$

45) $\frac{x^2}{2} - x + \frac{17}{7}\ln|x-2| + \frac{\sqrt{3}}{21}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{3}{14}\ln(x^2-x+1) + k$

46) $\frac{2}{5}\ln(x^2+1) + \frac{8}{5}\operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{5}\ln|x-2| + k$

47) $\frac{1}{8}\ln(x^2-2x-2) - \frac{1}{4}\ln|x| + \frac{x-2}{4(x^2-2x-2)} + k$

48) $\frac{x^2}{2} - \frac{8}{x^2+4} - 4\ln(x^2+4) + k$

49) $\frac{x}{216(9+x^2)} + \frac{x}{36(9+x^2)^2} + \frac{1}{648}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{3} + k$

50) $\frac{34\sqrt{7}}{49}\operatorname{arc\,tg}\frac{4x+1}{\sqrt{7}} + \frac{17x-1}{14x^2-7x+7} + k$

51) a) $-\frac{\ln x}{x+1} + \ln x - \ln(x+1) + k$

b) $-\frac{\operatorname{arc\,tg}(2x)}{x+3} + \frac{2}{37}\ln|x-3| - \frac{1}{37}\ln(4x^2+1) + \frac{12}{37}\operatorname{arc\,tg}(2x) + k$

Sección VII

1) $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{2x}{\sqrt{3}} + k$

2) $\operatorname{arg\,ch}\left(\frac{2}{3}x+1\right) + k$

3) $\operatorname{arg\,ch}\frac{2x+3}{\sqrt{13}} + k$

4) $\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arg\,sh}\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{3}} + k$

5) $\frac{x}{2}\sqrt{9x^2-16} - \frac{8}{3}\operatorname{arg\,ch}\frac{3x}{4} + k$

6) $\frac{1}{2}\operatorname{arg\,sh}(x+2) + \frac{x+2}{2}\sqrt{x^2+4x+5} + k$

7) $\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x-7} - 4\operatorname{arg\,ch}\frac{x-1}{\sqrt{8}} + k$

8) $\sqrt{4x^2-1} - \operatorname{arc\,sec}(2x) + k \quad (2x = \sec t)$

9) $\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x+6}{8}\right) + k$

10) $\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arg\,ch}\left(\frac{4x+1}{9}\right) + k$

11) $\frac{2}{9}\sqrt{9x^2+6x+2} - \frac{13}{9}\operatorname{arg\,sh}(3x+1) + k$

12) $-8\sqrt{2x-x^2+5} - 3\operatorname{arc\,sen}\frac{x-1}{\sqrt{6}} + k$

Sección VIII

1) $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4} + 2\ln\left|x-\sqrt{x^2-4}\right| + k \quad (x = 2\sec t)$

2) $2\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + k \quad (x = 2\operatorname{sen} t)$

3) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{4x^2+9}-3}{x}\right| + k \quad \left(x = \frac{3}{2}\operatorname{tg} t\right)$

4) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+2}+2}\right| + k \quad (x+2 = t^2)$

5) $\frac{2}{15}(4+x)^{3/2}(3x-8) + k \quad (4+x = t^2)$

6) $\frac{3}{28}(2+x^2)^{4/3}(2x^2-3) + k \quad (2+x^2 = t^3)$

7) $\frac{1}{15}(3x^2-10)(x^2+5)^{3/2} + k \quad (x^2+5 = t^2)$

8) $\frac{2}{45}(9+x^2)^{5/4}(5x^2-36) + k \quad (9+x^2 = t^4)$

9) $\frac{x}{b^2\sqrt{x^2+b^2}} + k \quad (x = b\operatorname{tg} t)$

10) $\frac{x-1}{3\sqrt{x^2-2x-4}} + k \quad (x-1 = \sqrt{3}\operatorname{tg} t)$

11) $\frac{\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{x}-2)}{2} - \frac{(\sqrt{x}-2)\sqrt{4\sqrt{x}-x-3}}{2} + k \quad (\sqrt{x} = t)$

12) $\operatorname{arc\,tg}(e^x) + k \quad (e^x = t)$

12. INTEGRAL DEFINIDA

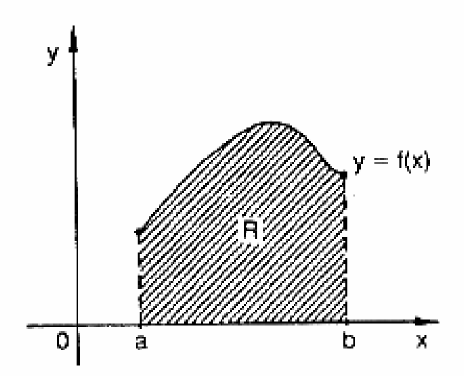
El problema de calcular el área de ciertos recintos planos, los polígonos, se resuelve en geometría elemental. A cada polígono P se le asigna un número real a(P), su área, de acuerdo con la definición inicial de que el área de un cuadrado de lado unidad es el número 1.

Se determina así una función cuyo dominio es el conjunto de los recintos planos poligonales y cuyo recorrido es el conjunto de los números reales no negativos.

El problema se complica fundamentalmente cuando se intenta calcular el área de un círculo y, en general, de cualquier recinto plano no poligonal.

El acceso clásico es aproximar el recinto mediante polígonos adecuados, inscriptos o circunscriptos, y definir el área buscada utilizando conjuntos formados con las áreas de estos polígonos.

En primer lugar interesan especialmente los recintos planos no poligonales más sencillos, limitados por la curva asociada a una función continua.

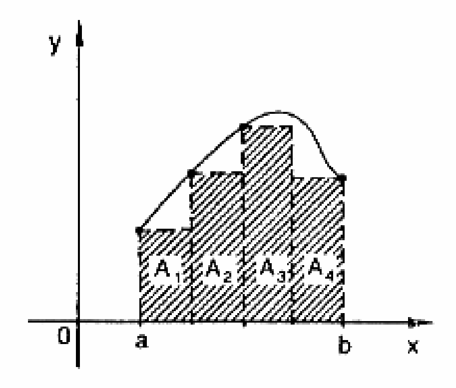


Un ejemplo lo constituye el recinto R, cuya parte superior está limitada por el gráfico de la función continua y positiva f en el intervalo cerrado [a; b] y cuya parte inferior está limitada por el eje de abscisas.

El recinto R se llama *recinto de ordenadas,* pues está cerrado lateralmente por los segmentos de ordenadas correspondientes a las rectas de ecuaciones $x = a$ y $x = b$.

Una forma de aproximar el área del recinto R es considerar rectángulos inscriptos en él.

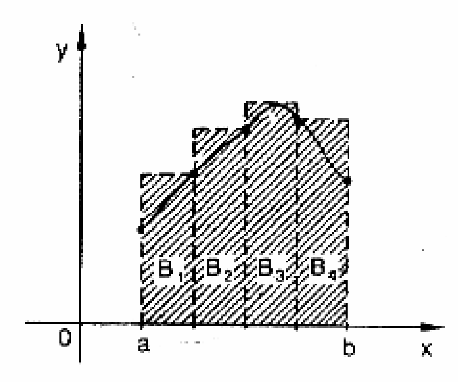
Por ejemplo, si dividimos el intervalo [a; b] en cuatro partes (iguales por simplicidad), un área aproximada de R está dada por la suma de las áreas de los rectángulos A_1, A_2, A_3 y A_4. Los cuatro rectángulos forman un polígono A, totalmente contenido en R.



Se comprende de inmediato que deseamos asignar al recinto R un área tal que: área (A) ≤ área (R), y que la aproximación será mayor si se vuelven a subdividir los subintervalos anteriores.

Los rectángulos A_1, A_2, A_3 y A_4 tienen como base un segmento cuya longitud es la cuarta parte de la longitud del intervalo inicial [a;b], es decir, $\frac{b-a}{4}$, y cuya altura es el valor mínimo que alcanza la función f en cada subintervalo (el valor mínimo existe por haberse elegido el gráfico de una función continua).

De manera similar se puede obtener una aproximación por exceso si se consideran los cuatro rectángulos circunscriptos correspondientes a la misma subdivisión de [a; b].



Si es B el polígono formado por los rectángulos B_1, B_2, B_3 y B_4, el polígono B contiene al recinto R y área (R) ≤ área (B).

También se mejora la aproximación por exceso si se vuelven a subdividir los subintervalos anteriores. Obsérvese además que, en cualquier caso, si A es un polígono inscripto y B uno circunscripto en el recinto R, una definición lógica de área debe permitir que se establezca la siguiente relación:

$$\text{área}\,(A) \leq \text{área}\,(R) \leq \text{área}\,(B).$$

Si se considera el conjunto I formado por las áreas de todos los polígonos inscriptos en R, dicho conjunto está acotado. En especial interesa una cota superior, que puede ser el área de cualquier polígono circunscripto en R.

Si el conjunto I está acotado superiormente, entonces tiene extremo superior o supremo.

De la misma forma, el conjunto C, formado por las áreas de los polígonos circunscriptos en R, está acotado inferiormente por cualquier elemento de I, que es el área de un polígono inscripto en R. Luego, C tiene extremo inferior o ínfimo.

En el caso del gráfico considerado, resulta supremo I = ínfimo C, y ese valor común se define como área del recinto R.

Si la función no es continua, puede suceder que no existan los valores indicados, o que existan ambos y no coincidan. En estos casos tampoco existe el área.

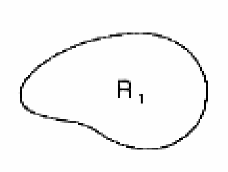
Las ideas anteriores han tratado de esbozar el método seguido para determinar el área de recintos de ordenadas que cumplen ciertos requisitos. En todos los casos, para ampliar el dominio de la función área, ya utilizada en geometría elemental, se busca obtener para los polígonos la misma área que corresponde a fórmulas ya conocidas, y para figuras no poligonales se procura que el área posea las propiedades requeridas anteriormente.

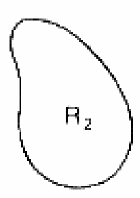
Algunas de ellas son las siguientes:

1) $\forall R$: $a(R) \geq 0$.

2) Si R es un punto o una curva, entonces $a(R) = 0$.

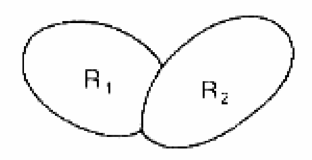
3) Si R_1 y R_2 son recintos planos congruentes, entonces $a(R_1) = a(R_2)$.





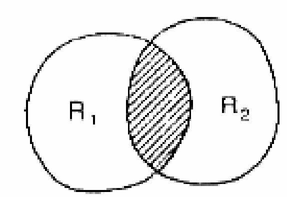
4) Si R_1 y R_2 son recintos planos cuya intersección tiene área nula, entonces

$$a(R_1 \cup R_2) = a(R_1) + a(R_2).$$

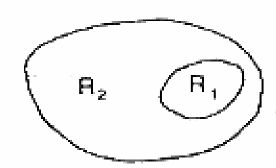


5) Si R_1 y R_2 son dos recintos planos cualesquiera, entonces

$$a(R_1 \cup R_2) = a(R_1) + a(R_2) - a(R_1 \cap R_2).$$



6) Si $R_1 \subset R_2$, entonces $a(R_1) \leq a(R_2)$.



La función área, que cumple las condiciones pedidas, se obtiene mediante la integral definida de funciones integrables en intervalos cerrados.

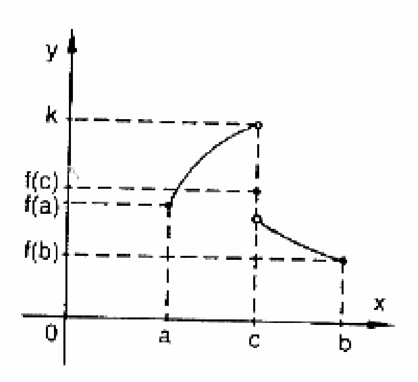
Estudiaremos en este capítulo la integral según Riemann*, quien fue el primero que desvinculó la idea de integral de su base geométrica.

El concepto de integral es puramente analítico y las consideraciones geométricas anteriores sólo ayudan para su interpretación intuitiva.

Una vez definida la integral de una función que reúna ciertas condiciones, se hace una aplicación geométrica de importancia fundamental: la definición de área para recintos de ordenadas.

I. Sumas inferiores y superiores

Consideramos una función acotada f, definida en un intervalo cerrado $[a; b]$. Esta función, al estar acotada, tiene supremo e ínfimo, de acuerdo con el axioma de continuidad de **R**.

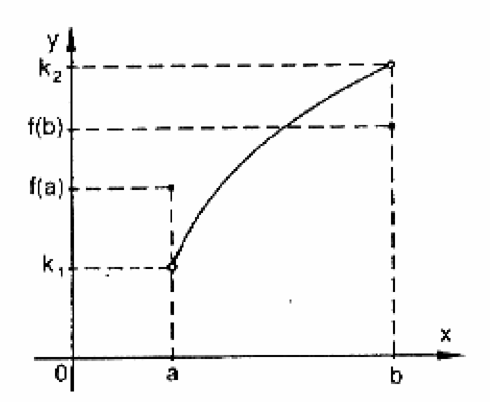


En el gráfico, el supremo de la función es k, que no es el valor de la función en c, pues f no es continua en c. El ínfimo, en este caso, es f(b).

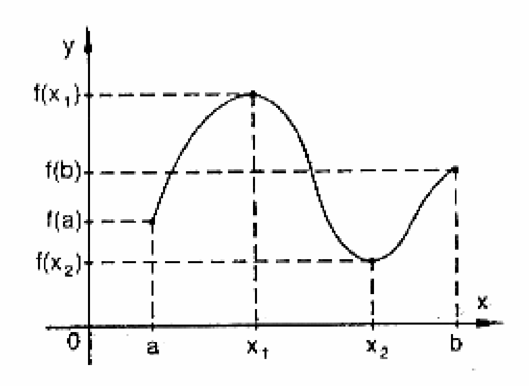
Obsérvese que, como la función no es continua en $[a; b]$, puede no alcanzar un valor máximo, como sucede en el ejemplo anterior.

En el ejemplo siguiente, la función acotada g no tiene máximo ni mínimo absolutos en $[a; b]$. El supremo es k_2 y el ínfimo k_1.

* Jorge Federico Riemann (1826-1866). Fue estudiante y luego profesor en la Universidad de Goettingen (Alemania). Famoso por sus hipótesis para fundamentar la geometría y por sus teorías sobre funciones de variable compleja y sobre topología.



Si la función es continua, en cambio, el ínfimo es el mínimo absoluto y el supremo el máximo absoluto, como sucede en el ejemplo siguiente:



$f(x_1)$ es el supremo de f en $[a; b]$ y es el máximo absoluto.
$f(x_2)$ es el ínfimo de f en $[a; b]$ y es el mínimo absoluto.
Daremos a continuación algunas definiciones.

Subdivisión*

P es una *subdivisión* del intervalo $[a; b]$ si es una sucesión finita, estrictamente creciente, de números reales $x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$, tales que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\ldots < x_{n-1} < x_n = b$.

La subdivisión P se designa $P = [x_0; x_1; x_2; \ldots\ldots; x_n]$.

Los n puntos de la subdivisión P dividen al intervalo $[a; b]$ en n subintervalos parciales $[x_0; x_1], [x_1; x_2], \ldots\ldots, [x_{n-1}; x_n]$.

Designamos I_1 al primer intervalo, I_2 al segundo, etcétera.

El intervalo $I_k = [x_{k-1}; x_k]$ tiene longitud $\Delta_k x = x_k - x_{k-1}$.

* Prefiero emplear el nombre de subdivisión en vez del de partición, de uso más frecuente, para evitar confusiones con el mismo nombre utilizado en teoría de conjuntos para un concepto diferente.

Una subdivisión es "regular" si y sólo si todos los subintervalos tienen igual longitud.

Norma de una subdivisión P es el máximo del conjunto formado con las longitudes de los subintervalos correspondientes. Se designa $||P||$.

Es decir, $||P|| = \text{máx}_p \Delta_k x$.



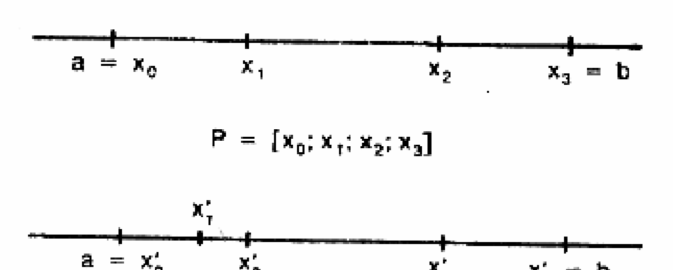
En la subdivisión $P = [x_0; x_1; x_2; x_3; x_4; x_5]$, la norma es el número $||P|| = x_4 - x_3$.

Refinamiento de una subdivisión P, o subdivisión más fina que P, es una subdivisión P' a la que pertenecen todos los puntos de P.

Es decir, la subdivisión $P' = [x'_0; x'_1; \ldots\ldots; x'_h]$ de $[a;b]$ es más fina que $P = [x_0; x_1; \ldots\ldots; x_n]$ de $[a; b]$, si que cumple

$$\forall h: (x_h \in P \Rightarrow x_h \in P').$$

Interesa, en general, el caso en que la nueva subdivisión P' tiene otros puntos adicionales además de los puntos de P.



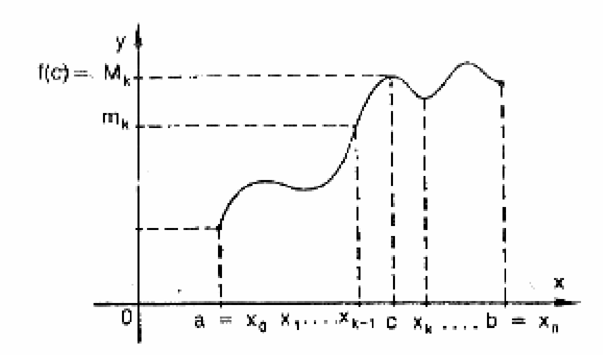
$P' = [x'_0; x'_1; x'_2; x'_3; x'_4] = [x_0; x'_1; x_1; x_2; x_3]$.

P' es más fina que P, pues a los puntos de P se ha agregado el punto x'_1 y el intervalo $[x_0; x_1]$ de P ha sido reemplazado en P' por dos subintervalos $[x_0; x'_1]$ y $[x'_1; x'_2]$.

Obsérvese que el refinamiento de una subdivisión no depende sólo del número de intervalos, pues debe incluir *todos* los extremos de subintervalos de la subdivisión menos fina.

De la definición se deduce de inmediato que si P' es más fina que P, entonces la norma de P' es menor o igual que la norma de P. Es decir, $||P'|| \leq ||P||$.

Estamos considerando exclusivamente funciones acotadas en intervalos cerrados. Si f es una función acotada en $[a; b]$, tiene supremo e ínfimo en $[a; b]$ y también tiene supremo e ínfimo en cualquier subintervalo de $[a; b]$.



En el subintervalo I_k, por ejemplo, M_k es el supremo de f y m_k es el ínfimo, de acuerdo con el gráfico anterior.

Suma inferior de la función f en el intervalo [a; b], correspondiente a la subdivisión P, es la suma de los productos que se obtienen multiplicando el ínfimo de f en cada subintervalo por la longitud del mismo.

Se designa $\underline{S}_P(f)$.

Es decir, si m_k es el ínfimo de f en el intervalo $[x_{k-1}; x_k]$, es:

$$\underline{S}_P(f) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta_k x.$$

O sea, $\underline{S}_P(f) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \ldots\ldots + m_n(x_n - x_{n-1})$.

De la misma manera, *suma superior* es la suma de todos los productos que se obtienen multiplicando el supremo de f en cada subintervalo de P por la longitud del mismo.

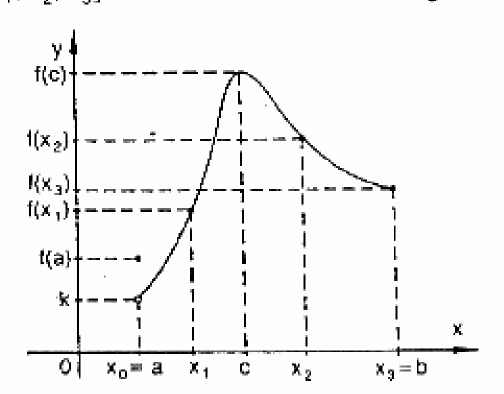
Si M_k es el supremo de f en el intervalo $[x_{k-1}; x_k]$, es:

$$\overline{S}_P(f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Ejemplo 1

Sea el siguiente el gráfico de una función f acotada en el intervalo [a; b].

Sea P = $[x_0; x_1; x_2; x_3]$ la subdivisión señalada en el gráfico.



Es $\underline{S}_P(f) = k(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_3)(x_3 - x_2)$

y $\overline{S}_P(f) = f(x_1)(x_1 - x_0) + f(c)(x_2 - x_1) + f(x_2)(x_3 - x_2)$.

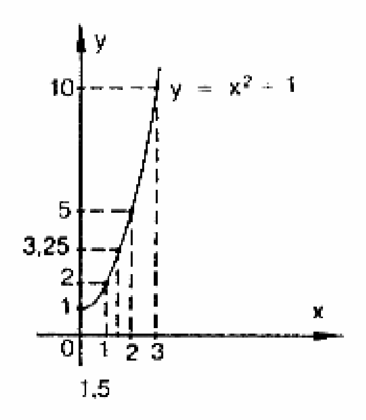
De acuerdo con la idea geométrica dada al comienzo del capítulo, $\underline{S}_P(f)$ corresponde al área de un polígono inscripto en el recinto de ordenadas y $\overline{S}_P(f)$ al área de un polígono circunscripto.

Ejemplo 2

Calcular $\underline{S}$ y $\overline{S}$ para $f: \to x^2 + 1$ en [0; 3] para las subdivisiones siguientes:

1) P = [0; 1; 2; 3]

2) P' = [0; 1; 1,5; 2; 3]



1) $\underline{S}_P(f) = f(0) \cdot 1 + f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = \underline{8}$

$\overline{S}_P(f) = f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 + f(3) \cdot 1 = 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 10 \cdot 1 = \underline{17}$

2) $\underline{S}_{P'}(f) = f(0) \cdot 1 + f(1) \cdot 0{,}5 + f(1{,}5) \cdot 0{,}5 + f(2) \cdot 1 =$

$= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0{,}5 + 3{,}25 \cdot 0{,}5 + 5 \cdot 1 = \underline{8{,}625}$

$\overline{S}_{P'}(f) = f(1) \cdot 1 + f(1{,}5) \cdot 0{,}5 + f(2) \cdot 0{,}5 + f(3) \cdot 1 =$

$= 2 \cdot 1 + 3{,}25 \cdot 0{,}5 + 5 \cdot 0{,}5 + 10 \cdot 1 = \underline{16{,}125}$

Ejemplo 3

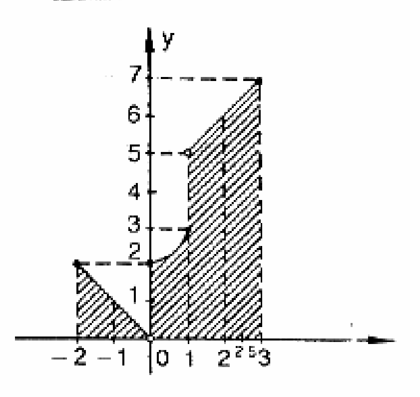
Calcular $\underline{S}$ y $\overline{S}$ en [−2; 3] para:

$$f: x \to \begin{cases} -x & \text{si} \quad -2 \le x < 0 \\ x^2 + 2 & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ x + 4 & \text{si} \quad 1 < x \le 3 \end{cases}$$

y para las subdivisiones:

1) P = [−2; −1; 0; 1; 2; 3]

2) P' = [−2; −1,5; −1; 0; 1; 2; 2,5; 3]



1) $\underline{S}_P = f(-1)\cdot 1 + 0 \cdot 1 - f(0)\cdot 1 + f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 =$

$= 1 + 0 + 2 + 3 + 6 = \underline{12}$

$\overline{S}_P = f(-2)\cdot 1 + f(0)\cdot 1 + f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 + f(3)\cdot 1 =$

$= 2 + 2 + 3 + 6 + 7 = \underline{20}$

2) $\underline{S}_{P'} = f(-1{,}5)\cdot 0{,}5 + f(-1)\cdot 0{,}5 + 0 \cdot 1 - f(0)\cdot 1 + f(1)\cdot 1 - f(2)\cdot 0{,}5 +$

$- f(2{,}5)\cdot 0{,}5 =$

$= 0{,}75 + 0{,}5 + 0 - 2 + 3 + 3 + 3{,}25 = \underline{12{,}5}$

$\overline{S}_{P'} = f(-2)\cdot 0{,}5 + f(-1{,}5)\cdot 0{,}5 + f(-1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 - f(2{,}5)\cdot 0{,}5 + f(3)\cdot 0{,}5 =$

$= 1 + 0{,}75 + 1 + 3 + 6 - 3{,}25 + 3{,}5 = \underline{18{,}5}$

Demostraremos a continuación algunas propiedades de las sumas inferiores y superiores.

Lema 1

Si f está definida y acotada en $[a; b]$, para cualquier subdivisión P la suma inferior no supera a la suma superior.

Es decir, $\forall P: (\underline{S}_P(f) \leq \overline{S}_P(f))$.

Demostración

De acuerdo con las definiciones de suma inferior y superior, en la primera interviene el ínfimo de f en cada subintervalo $[x_{k-1}; x_k]$ de P: m_k, y en la segunda el supremo M_k.

Como $\forall k$: $m_k \leq M_k$, resulta $\sum m_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum M_k(x_k - x_{k-1})$,

o sea, $\underline{S}_P(f) \leq \overline{S}_P(f)$.

Lema 2

Si f es una función definida y acotada en $[a; b]$, P y P' son dos subdivisiones de $[a; b]$ y P' es más fina que P, entonces:

1) $\underline{S}_P(f) \leq \underline{S}_{P'}(f)$; 2) $\overline{S}_P(f) \geq \overline{S}_{P'}(f)$.

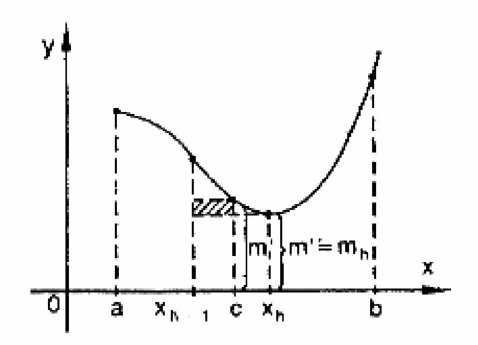
Demostraremos la primera parte. La segunda es análoga.

Demostración

Al considerar la subdivisión P y la subdivisión más fina P', basta comparar los términos de las sumas inferiores que corresponden a los intervalos donde hay nuevos puntos de P'.

Sin restar generalidad a la demostración, suponemos que la subdivisión P' tiene solamente un nuevo punto además de los puntos de P. Sea c ese nuevo punto, que pertenece a un intervalo I_h de P.

Si se comparan $\underline{S}_P$ y $\underline{S}_{P'}$, todos sus términos coinciden, con excepción del término $t_h = m_h(x_h - x_{h-1})$ de $\underline{S}_P$, que ha sido sustituido en $\underline{S}_{P'}$ por la suma de dos términos: $t'h = m'(c - x_{h-1}) + m''(x_h - c)$, donde m' es el ínfimo de f en $[x_{h-1}; c]$ y m'' el ínfimo de f en $[c; x_h]$.



Como m_h es el ínfimo de f en $[x_{h-1}; x_h]$, resulta

$$m_h \leq m' \text{ y } m_h \leq m''.$$

Luego, $t_h = m_h(x_h - x_{h-1}) = m_h(x_h - c) + m_h(c - x_{h-1}) \leq m'(x_h - c) + m''(c - x_{h-1}) = t'_h$.

Es decir, $t_h \leq t'_h$.

Como los demás términos son iguales, es $\underline{S}_P(f) \leq \underline{S}_{P'}(f)$.

Si hubiera más puntos en P' la demostración es análoga, y puede hacerse general por inducción completa.

Gráficamente, este lema indica que las áreas de los polígonos inscriptos crecen al considerarse subdivisiones cada vez más finas.

Mediante consideraciones similares se demuestra que las sumas superiores decrecen al considerarse subdivisiones cada vez más finas que las anteriores.

Lema 3

Si f está definida y acotada en $[a; b]$ y P_1 y P_2 son dos subdivisiones de $[a; b]$, entonces la suma inferior para cualquiera de las subdivisiones no supera a la suma superior de la otra subdivisión. (Obsérvese que el lema 1 se refiere a suma inferior y superior para la misma subdivisión y, en cambio, este lema 3 se refiere a dos subdivisiones *cualesquiera*.)

Debemos probar $\forall P_1 \, \forall P_2$: $(\underline{S}_{P_1}(f) \leq \overline{S}_{P_2}(f))$.

Demostración

Como P_1 y P_2 son dos subdivisiones cualesquiera de $[a; b]$, buscamos otra sub-

división P que sea un refinamiento común a ambas. (Para obtener P basta considerar todos los puntos de ambas subdivisiones P_1 y P_2.) Si P es más fina que P_1 y también más fina que P_2, por el lema 2 es:

$$\underline{S}_{P_1}(f) \leq \underline{S}_P(f) \quad \text{(primera parte);}$$
$$\bar{S}_{P_2}(f) \geq \bar{S}_P(f) \quad \text{(segunda parte).}$$

Vinculando las dos relaciones anteriores mediante el lema 1, es:

$$\underline{S}_{P_1}(f) \leq \underbrace{\underline{S}_P(f) \leq \bar{S}_P(f)}_{\text{lema 1}} \leq \bar{S}_{P_2}(f).$$

Luego, por transitividad:

$$\underline{S}_{P_1}(f) \leq \bar{S}_{P_2}(f).$$

Gráficamente, el lema 3 indica que el área de cualquier polígono inscripto en un recinto no supera al de cualquier polígono circunscripto.

EJERCICIOS

1) Considerando $f: x \to \sqrt{25 - x^2}$ en $[0; 5]$, calcular suma inferior y suma superior para las subdivisiones: 1) P = [0; 3; 4; 5], 2) P' = [0; 1; 3; 4; 5] y 3) P'' = [0; 1; 2; 3; 4; 5].
2) Considerando $f: x \to x^2 + 1$ en $[0; 3]$, calcular suma superior y suma inferior para las subdivisiones: 1) P = [0; 1; 2,5; 3] y 2) P' = [0; 0,5; 1; 2; 2,5; 3].
3 Considerando $f: x \to x^2 + x$ en $[0; 3]$, calcular suma inferior y suma superior para las subdivisiones: 1) P = [0; 1; 2; 3] y 2) P' = [0; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3].
4) Considerando $f: x \to x^2 - 7x + 2$ en $[1; 3]$, calcular suma inferior y suma superior para las subdivisiones: 1) P = [1; 2; 3] y 2) P' = [1; 1,5; 2; 2,5; 3].
5) Considerando $f: x \to x^2 - 6x + 10$ en $[1; 6]$, calcular suma inferior y suma superior para las subdivisiones: P = [1; 3; 4; 6] y P' = [1; 2; 3; 4; 5; 6].
6) Considerando:

$$f: x \to \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 4x + 9 & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ 9 & \text{si } 4 \leq x \leq 5 \end{cases} \quad \text{en } [0; 5],$$

calcular suma inferior y suma superior para la subdivisión P = [0; 1; 2; 3; 4; 5].

II. Integral de Riemann

En resumen, los lemas anteriores puntualizan las siguientes propiedades para las sumas superiores e inferiores de una función definida y acotada en el intervalo [a; b]:

1) para la misma subdivisión P: $\underline{S}_P \leq \bar{S}_P$;
2) si P' es más fina que P: $\underline{S}_P \leq \underline{S}_{P'} \wedge \bar{S}_P \geq \bar{S}_{P'}$;
3) para dos subdivisiones cualesquiera P_1 y P_2: $\underline{S}_{P_1} \leq \bar{S}_{P_2}$.

Si designamos A al conjunto de todas las sumas inferiores de una función f, acotada y definida en [a; b], observamos que A es un conjunto de números reales que está acotado.

En efecto, una cota inferior es la suma correspondiente a la subdivisión "menos" fina de [a; b], es decir, a la subdivisión $[x_0; x_1]$, cuya suma inferior es $\underline{S} = m(b-a)$, donde m es el ínfimo de f en [a; b].

Una cota superior, de acuerdo con el lema 3, es cualquier suma superior.

O sea, $\forall P$: $(m(b-a) \leq \underline{S}_P(f) \wedge \underline{S}_P(f) \leq \bar{S}_{P_1}(f))$, donde el último miembro es una suma superior cualquiera.

Por el axioma de continuidad de **R**, el conjunto A tiene supremo y tiene ínfimo.

Como las sumas inferiores crecen al afinarse las subdivisiones, interesa en especial el supremo del conjunto A. Este extremo superior se llama integral inferior de f en [a; b].

Definición

Integral inferior de f en [a; b] es el supremo del conjunto formado por todas las infinitas sumas inferiores de f en [a; b]. Se la designa $\underline{\int_a^b} f$.

Es decir, $\underline{\int_a^b} f$ = supremo A.

De la misma forma, si B es el conjunto de todas las sumas superiores, B es un conjunto acotado. Por el lema 3, admite como cota inferior a cualquier suma inferior.

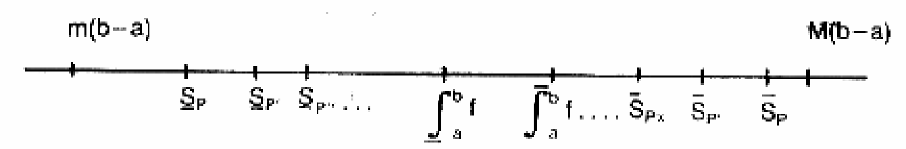
Por lo tanto, tiene ínfimo y ese ínfimo es la integral superior.

Definición

Integral superior de f en [a; b] es el ínfimo del conjunto formado por las sumas superiores de f en [a; b]. Se la designa $\overline{\int_a^b} f$.

Es decir, $\overline{\int_a^b} f$ = ínfimo B.

Gráficamente, para una función f definida y acotada en [a; b].



P' es más fina que P, P'' más fina que P', etcétera.

La propiedad de que $\underline{\int_a^b} f$ no supera a $\overline{\int_a^b} f$ es lógica, pero su demostración no es trivial.

Teorema

Si f está definida y acotada en $[a; b]$, entonces $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$.

Demostración

Como ya se ha visto, el conjunto de las sumas superiores está acotado inferiormente por cualquier suma inferior.

Luego, para cualquier subdivisión P, $\underline{S}_P(f)$ es una cota inferior para el conjunto B de las sumas superiores.

Como $\overline{\int_a^b} f$ es la mayor de las cotas inferiores del conjunto B (ínfimo de B), es

$\forall P: \underline{S}_P(f) \leq \overline{\int_a^b} f.$

Ahora bien, de la relación anterior resulta que $\overline{\int_a^b} f$ es una cota superior para el conjunto de las sumas inferiores, ya que no es superada por ninguna de ellas.

Luego, como $\underline{\int_a^b} f$ es la menor de las cotas superiores del conjunto A (supremo de A), no supera a una cota superior cualquiera como es $\overline{\int_a^b} f$.

$$\text{Es decir, } \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f.$$

Por consideraciones ya efectuadas, es también:

$$m(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq M(b-a)$$

Nota: He preferido definir integral como extremo de un conjunto por razones de simplicidad. Creo que la definición de integral inferior, por ejemplo, como límite de una sucesión *cualquiera* de sumas inferiores cuando la norma de las subdivisiones correspondientes tiende a cero resulta más complicada (véase Cálculo 2, pág. 261).

Definición

Si f está definida y acotada en $[a; b]$, y además $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$, la función f es *integrable* en $[a; b]$.

El valor común de la integral inferior y superior se llama, simplemente, integral de f en $[a; b]$ según Riemann.

O sea,

$$f \text{ integrable en } [a; b] \Leftrightarrow \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f.$$

Suele utilizarse también la notación $\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx$.

Interesa conocer entonces cuáles funciones son integrables, pues una función puede estar definida y acotada en un intervalo cerrado y no ser integrable en él, como lo prueba inmediatamente el siguiente ejemplo.

$$\text{Sea } f: x \to \begin{cases} 0 \text{ si x es irracional} \\ 1 \text{ si x es racional} \end{cases}$$

En este caso, para cualquier subdivisión P:

$$\underline{S}_P(f) = \sum_{h=1}^{n} 0 \cdot \Delta_h x = 0 \quad \text{y} \quad \overline{S}_P(f) = \sum_{h=1}^{n} 1 \cdot \Delta_h x = b - a.$$

Luego, $\underline{\int_a^b} f = 0$ y $\overline{\int_a^b} f = b - a \neq 0$, y f no es integrable en $[a; b]$.

El teorema siguiente da un criterio para establecer cuándo una función acotada, definida en un intervalo cerrado, es integrable en el mismo.

Teorema

Una función f definida y acotada en $[a; b]$ es integrable en $[a; b]$, según Riemann, si y sólo si, para cualquier número positivo ϵ, existe una subdivisión P de $[a; b]$ tal que:

$$\overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) < \epsilon.$$

Es decir,

$$f \text{ integrable en } [a; b] \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists P / \overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) < \epsilon.$$

Se trata, por lo tanto, de una condición necesaria y suficiente para existencia de la integral.

Primera parte

Si f es integrable en $[a; b]$, entonces:

$$\forall \epsilon > 0 \exists P / \overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) < \epsilon$$

Demostración

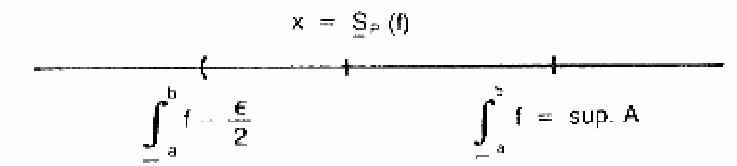
Si la función es integrable según Riemann, es:

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Recuérdese que $\underline{\int_a^b} f$ = supremo de A y $\overline{\int_a^b} f$ = ínfimo de B, donde A es el conjunto de sumas inferiores y B el de sumas superiores.

Por propiedad del supremo de un conjunto A de números reales,

$\forall \epsilon > 0 \, \exists x \in A / x >$ supremo de A $- \frac{\epsilon}{2}$.

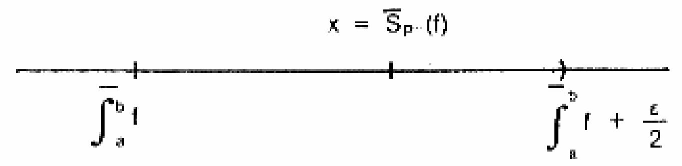


Si $x \in A$, entonces $x = \underline{S}_{P'}(f)$ para una subdivisión P' de [a; b].

Luego, $\underline{S}_{P'}(f) > \underline{\int_a^b} f - \frac{\epsilon}{2}$ (1).

Por la misma propiedad, como $\overline{\int_a^b} f$ es el ínfimo o extremo inferior de B,

$\forall \epsilon > 0 \, \exists x \in B / x < \overline{\int_a^b} f - \frac{\epsilon}{2}$.



Como $x \in B$, es $x = \overline{S}_{P''}(f)$ para una subdivisión P'' de [a; b].

Luego, $\overline{S}_{P''}(f) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\epsilon}{2}$ (2).

Si P es un refinamiento común a P' y P'', resulta, por lema 2,

$$\underline{S}_P(f) \geq \underline{S}_{P'}(f) \quad \text{y} \quad \overline{S}_P(f) \leq \overline{S}_{P''}(f).$$

Aplicando transitividad a las relaciones anteriores y a las expresiones (1) y (2), queda:

$$\underline{S}_P(f) > \underline{\int_a^b} f - \frac{\epsilon}{2} \quad (3)$$

$\wedge$

$$\overline{S}_P(f) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\epsilon}{2} \quad (4).$$

Restando (3) a (4), es: $\overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\epsilon}{2} - \underline{\int_a^b} f + \frac{\epsilon}{2}$.

Como f es integrable por hipótesis, es $\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f = 0$,

y resulta $\overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) < \epsilon$, que es la tesis.

Segunda parte

Si $\forall \epsilon > 0 \, \exists P / \overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) < \epsilon$, entonces f es integrable en [a; b].

Demostración

Por definición de integral superior,

$$\forall P: \overline{\int_a^b} f \leq \overline{S}_P(f),$$

y por definición de integral inferior,

$$\forall P: \underline{\int_a^b} f \geq \underline{S}_P(f).$$

Restando, $0 \leq \underbrace{\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f}_{\text{pág. 446}} \leq \overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) < \epsilon$.

Luego, $\forall \epsilon > 0: 0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < \epsilon$. Como ambas integrales son números reales, la relación obtenida implica la igualdad de ambos números.

Por lo tanto, $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$ y f es integrable en [a; b].

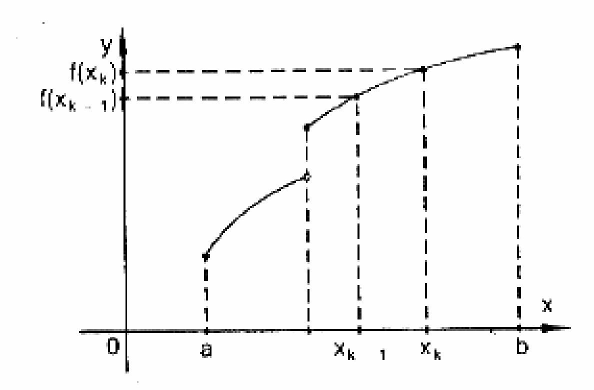
Utilizando el criterio anterior pueden determinarse algunas clases de funciones integrables.

Teorema

Si una función definida y acotada en $[a; b]$ es monótona en dicho intervalo, entonces es integrable en él.

♦ *Demostración*

Consideremos, sin perder generalidad, el caso de una función f estrictamente creciente en $[a; b]$.



Si la función es estrictamente creciente, el ínfimo de la función en cada intervalo es el valor que alcanza la función en el extremo izquierdo del intervalo, y el supremo, el valor que alcanza f en el extremo derecho del intervalo que se considere.

Por ejemplo, en $I_k = [x_{k-1}; x_k]$, es $m_k = f(x_{k-1})$ y $M_k = f(x_k)$.

Luego, para cualquier subdivisión P es:

$$\bar{S}_P(f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) \quad \text{y} \quad \underline{S}_P(f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}).$$

Luego,

$$\bar{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})] \cdot \Delta_k x \leq \|P\| \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})].$$

Además,

$$\sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})] = [f(x_1) - f(x_0)] + [f(x_2) - f(x_1)] + \ldots + [f(x_n) - f(x_{n-1})] =$$

$$= f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a).$$

Luego, $\forall P: \bar{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) \leq \|P\| [f(b) - f(a)]$.

Si $f(b) \neq f(a)$ (en este caso $f(b) > f(a)$, pues f es estrictamente creciente), para cualquier $\epsilon > 0$ puede encontrarse una subdivisión P de $[a; b]$ cuya norma sea menor que el número $\dfrac{\epsilon}{f(b) - f(a)} > 0$.

Por lo tanto,

$$\forall \epsilon > 0: \exists P / \bar{S}_P - \underline{S}_P \leq \|P\| [f(b) - f(a)] < \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)} \cdot [f(b) - f(a)] = \epsilon.$$

Es decir, $\forall \epsilon > 0 \ \exists P / \bar{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) < \epsilon$, que es la condición para que f sea integrable, según Riemann, en $[a; b]$.

Teorema

Si f es continua en $[a; b]$, entonces f es integrable en dicho intervalo.

♦ *Demostración*

Haciendo las mismas primeras deducciones del teorema anterior, para cualquier P:

$$\bar{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \Delta_k x,$$

donde M_k es el supremo y m_k el ínfimo de f en cada subintervalo de la subdivisión P.

Pero, al ser continua la función, M_k es el máximo de f en I_k y m_k el mínimo, de acuerdo con el segundo teorema de Weierstrass (pág. 182).

Ahora bien, como la función f es continua en el intervalo cerrado $[a; b]$, por el teorema de Heine (pág. 188) es uniformemente continua en él.

O sea, $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 / |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \epsilon$.

Consideremos una subdivisión P del intervalo $[a; b]$ cuya norma $\|P\|$ sea menor que δ. En todo subintervalo de esta subdivisión P, la diferencia entre dos valores cualesquiera de f es, en valor absoluto, menor que ϵ.

Esta relación se verifica también, por supuesto, para el valor máximo y el valor mínimo que alcanza f en cada subintervalo de la subdivisión considerada.

Por lo tanto, para todo $\epsilon > 0$ existe una subdivisión P del intervalo $[a; b]$ tal que, en todo subintervalo I_k de esa subdivisión es $M_k - m_k < \dfrac{\epsilon}{b - a}$ $(k \in N \wedge 1 \leq k \leq n)$.

Por lo tanto,

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists P / \bar{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) <$$

$$< \sum_{k=1}^{n} \frac{\epsilon}{b - a}(x_k - x_{k-1}) = \frac{\epsilon}{b - a} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) =$$

$$= \frac{\epsilon}{b - a}(b - a) = \epsilon,$$

y se cumple la condición de integrabilidad.

Sumas intermedias

Dada una subdivisión P del intervalo [a; b], si elegimos en cada subintervalo $[x_{i-1}; x_i]$ un punto cualquiera c_i, la suma

$$S_P(f) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

se denomina suma intermedia de f en [a; b] o también suma de Riemann.

Según definiciones anteriores, las sumas superiores e inferiores son también sumas intermedias si la función es continua.

Podemos demostrar que si f es continua en [a; b], entonces

$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \, / \left| \int_a^b f - S_P(f) \right| < \epsilon$ si $\|P\| < \delta$,

o sea, que la suma intermedia aproxima la integral definida con un error ϵ prefijado.

En efecto, por la definición dada, es: $\underline{S}_P(f) \le S_P(f) \le \overline{S}_P(f)$. Además, por la definición de integral: $\underline{S}_P(f) \le \int_a^b f \le \overline{S}_p(f)$.

Por lo tanto, $\forall P$:

$$\int_a^b f \le \overline{S}_P(f) \wedge S_P(f) \ge \underline{S}_P(f) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f - S_P(f) \le \overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) \qquad (1);$$

$$S_P(f) \le \overline{S}_P(f) \wedge \int_a^b f \ge \underline{S}_P(f) \quad \Rightarrow \quad S_P(f) - \int_a^b f \le \overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) \qquad (2).$$

O sea,

$$\int_a^b f - S_P(f) \le \overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) \;\; (1) \;\; \wedge \;\; -\left(\overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f)\right) \le \int_a^b f - S_P(f) \qquad (2).$$

De (1) y (2): $-\left(\overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f)\right) \le \int_a^b f - S_P(f) \le \overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left| \int_a^b f - S_P(f) \right| \le \overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f).$$

Como f, por ser continua, es integrable, sabemos que

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \, / \, \overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) < \epsilon \quad \text{si} \quad \|P\| < \delta.$$

Luego, $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \, / \left| \int_a^b f - S_P(f) \right| < \epsilon$ si $\|P\| < \delta$.

Este último resultado suele expresarse, con la notación usual para límite, de la siguiente forma:

$$\lim_{\|P\| \to 0} S_P(f) = \int_a^b f,$$

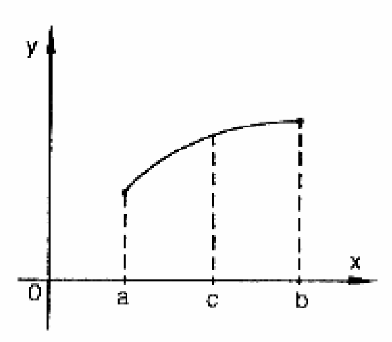
pero no se trata de un límite común, como se verá más adelante (Cálculo 2, pág. 261).

III. Propiedades de la integral

Propiedad aditiva del intervalo

Si f es integrable en [a; b] y c es un punto cualquiera interior al intervalo, entonces

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$



Demostración

Consideremos una subdivisión cualquiera de [a; b]:

$$P = [a = x_0; x_1; x_2; \ldots\ldots; x_n = b].$$

Si P es una subdivisión *cualquiera* de [a; b], el punto elegido c puede o no pertenecer a ella.

Sea P' el refinamiento de P al que pertenece el punto c además de los n puntos considerados.

Es decir, $P' = [a = x_0; x_1; x_2; \ldots\ldots; c; \ldots\ldots; x_n = b]$.

Resulta $\underline{S}_P(f) \le \underline{S}_{P'}(f)$ (1) por el lema 2.

La subdivisión P' se puede considerar como la unión de dos subdivisiones: $R = [a = x_0; x_1; \ldots; x_h = c]$ de [a; c] y

$$Q = [c = x_h; x_{h-1}; \ldots; x_n = b] \text{ de } [c; b].$$

Luego, $\underline{S}_{P'}(f) = \underline{S}_R(f) + \underline{S}_Q(f)$

y, por (1), $\underline{S}_P(f) \le \underline{S}_R(f) - \underline{S}_Q(f)$.

Ahora bien, por definición de integral inferior como supremo del conjunto de sumas inferiores respectivas, es:

$$\underline{S}_R(f) \le \underline{\int_a^c} f \quad \text{y} \quad \underline{S}_Q(f) \le \underline{\int_c^b} f.$$

Luego, $\underline{S}_P(f) \leq \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f$.

El número $\underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f$ es, entonces, una cota superior para el conjunto de sumas inferiores del intervalo [a; b], ya que $\underline{S}_P(f)$ es la suma inferior correspondiente a una subdivisión *cualquiera* P de [a; b].

Luego, $\underline{\int_a^b} f$, que es la menor de las cotas superiores, no supera a dicho número, o sea,

$$\underline{\int_a^b} f \leq \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f \quad (2).$$

Por un razonamiento análogo, utilizando las sumas superiores, resulta:

$$\overline{\int_a^b} f \geq \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f \quad (3).$$

De (2) y (3), como la función es integrable en los tres intervalos considerados, queda:

$$\int_a^b f \leq \int_a^c f + \int_c^b f \ \wedge \ \int_a^b f \geq \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Por lo tanto, $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$, que es la tesis.

Teorema del valor medio del cálculo integral
(para funciones continuas)

Si f es continua en [a; b], entonces existe un punto c interior al intervalo para el cual es $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$ (f(c) es el valor medio de f en [a; b]).

Demostración

Recordemos, en primer lugar, que una función continua en un intervalo cerrado tiene en él un máximo y un mínimo absolutos (pág. 182). Sean M y m dichos extremos.

Como una función continua es integrable, por una propiedad anterior (pág. 446), es $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$.

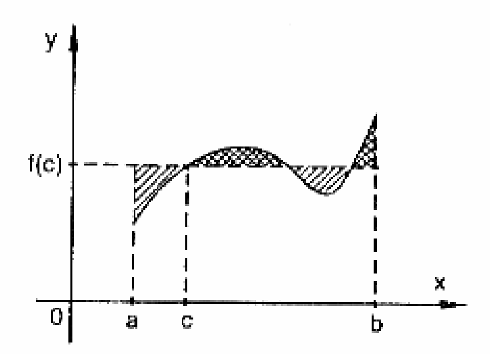
Como (b−a) es un número positivo, si dividimos por él queda:

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leq M.$$

El numero $k = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$ es un valor comprendido entre el mínimo m y el máximo M de f en [a; b].

Luego, por el teorema del valor intermedio (pág. 176), $\exists c \in (a; b)$ tal que $f(c) = k$. O sea, $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$, que es la tesis.

Este teorema tiene una interesante interpretación geométrica para funciones con valores no negativos.



Si se define el área del recinto de ordenadas como $\int_a^b f$, resulta: $\int_a^b f = (b-a)f(c)$, donde el segundo miembro es el área de un rectángulo cuya base tiene longitud (b−a) y su altura tiene longitud f(c).

Es decir, existe un rectángulo "medio" cuya área es igual a la del recinto de ordenadas.

El número $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$ se llama "valor medio" de la función f en el intervalo [a; b].

Para poder encontrarlo necesitamos primero aprender a calcular la integral definida $\int_a^b f$. Para ello, en la sección siguiente definimos una función muy especial, llamada función integral, y demostramos el teorema fundamental del cálculo. Volveremos luego al teorema del valor medio y sus aplicaciones.

IV. Función integral

Antes de definir la función integral damos dos definiciones que tienen una interpretación intuitiva lógica:

1) $\int_a^a f = 0$; 2) $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

Por otra parte, podemos observar que hasta ahora el concepto de integral definida aparece totalmente desvinculado del de derivada.

Históricamente se llegó a ambas ideas por caminos diferentes, para resolver sendos problemas geométricos.

Newton y Leibniz fueron los primeros en relacionar ambos conceptos fundamentales. Esta relación se pone en evidencia con el teorema fundamental del cálculo integral, que permite calcular la integral definida de una función integrable f mediante una función primitiva o antiderivada.

Para demostrarlo, consideraremos la función F definida así:

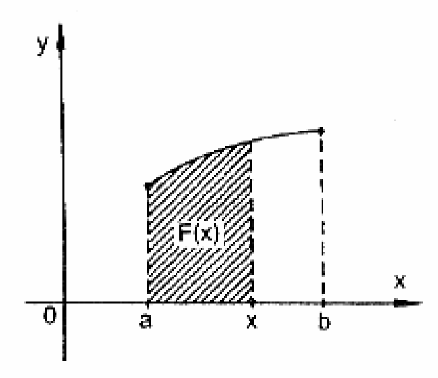
$$F: x \to \int_a^x f.$$

Analicemos la expresión anterior. En ella observamos que F es función del extremo superior de la integral definida en el intervalo $[a; x]$, es decir, F depende de x. Por supuesto, F depende además de la función elegida f y del punto a, pero una vez fijos f y a, F depende exclusivamente de la variable x.

Esta función F se llama *función integral* dependiente del extremo superior de f con origen en a.

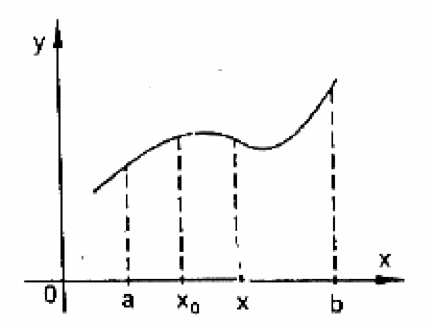
Por una definición anterior, $F(a) = \int_a^a f = 0.$

También resulta $F(b) = \int_a^b f.$



Teorema fundamental del cálculo integral

Si f es una función continua en el intervalo $[a; b]$, la función integral $F: x \to \int_a^x f$ es derivable, y su derivada en cualquier punto x_0 del intervalo $[a; b]$ es $f(x_0)$. O sea, $\forall x_0 \in [a; b]: F'(x_0) = f(x_0)$. (En a y b se consideran derivadas laterales.)



Demostración

Para probar que existe $F'(x_0)$ aplicamos la definición de derivada. Para ello buscamos primero el cociente incremental:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{\int_a^x f - \int_a^{x_0} f}{x - x_0} \qquad (1)$$

Por la propiedad aditiva del intervalo (pág. 453), es:

$$\int_a^x f = \int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^x f \Leftrightarrow \int_a^x f - \int_a^{x_0} f = \int_{x_0}^x f.$$

Reemplazando en (1): $\dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{\int_{x_0}^x f}{x - x_0}.$

Por el teorema del valor medio del cálculo integral (pág. 454):

$$\exists c \in (x_0; x) \,/\, f(c) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f.$$

Luego, $\dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(c).$

Buscando límite en x_0, resulta:

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f(c) \qquad (2).$$

Ahora bien, para todo número positivo ϵ, si x pertenece a un entorno de centro x_0 y radio δ, también el punto c pertenece a dicho entorno, pues c está entre x_0 y x. Es decir, $\lim_{x \to x_0} f(c) = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

Además, como f es continua en x_0, es $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Luego, por (1), es $F'(x_0) = f(x_0)$, que es la tesis.

Regla de Barrow*

Si f es continua en $[a; b]$ y G es una primitiva de f, entonces

$$\int_a^b f = G(b) - G(a).$$

* Isaac Barrow (1630-1677), teólogo y matemático, fue profesor en la Universidad de Cambridge y renunció a la cátedra en favor de su discípulo Newton.

Demostración

G es una primitiva de f. Por lo tanto, por definición de primitiva (pág. 386), es $\forall t$: $G'(t) = f(t)$.

Si F es la función integral, es $F(a) = \int_a^a f = 0$ y $F(b) = \int_a^b f$.

Además, por el teorema anterior, $\forall t \in [a;b]$ es $F'(t) = f(t)$.
Por una propiedad de la función primitiva (pág. 387):

$$G'(t) = f(t) \wedge F'(t) = f(t) \Rightarrow \exists k \in R \,/\, F(t) = G(t) - k.$$

Como $F(a) = 0$, es $G(a) + k = 0$. Luego, $k = -G(a)$.

Entonces resulta: $F(b) = \int_a^b f = G(b) - k = G(b) - G(a)$.

Es decir, $\int_a^b f = G(b) - G(a)$, que es la tesis.

La regla de Barrow indica que para evaluar la integral definida de f entre a y b basta encontrar una primitiva cualquiera de f y restar los valores indicados de dicha primitiva.

Ejemplos

1) $\int_1^2 x^2 = \left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$.

2) $\int_0^{\pi/2} \cos x = (\text{sen } x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \text{sen } \frac{\pi}{2} - \text{sen } 0 = 1 - 0 = 1.$

Para el cálculo de integrales muchas veces es conveniente utilizar, como ya se ha indicado, la notación $\int_a^b f(x)\,dx$, en especial si debe recurrirse a un cambio de variable.

Para el cálculo de integrales definidas pueden utilizarse los teoremas ya vistos para primitivas (pág. 390), que pueden demostrarse de manera similar utilizando la definición de primitiva y la regla de Barrow.

Por ejemplo,

$$\int_a^b (f \pm g) = \int_a^b f \pm \int_a^b g \,;\; \int_a^b (k f) = k \int_a^b f; \text{ etcétera.}$$

De acuerdo con lo indicado en la página 455, volvemos ahora al teorema del valor medio del cálculo integral y a sus aplicaciones.

Ejemplo 1

Encontrar el punto c correspondiente al teorema del valor medio del cálculo integral si $f: x \to x^3 - 1$ en el intervalo $[-1; 3]$.

La longitud del intervalo es 4. Según el teorema, existe c entre -1 y 3 tal que

$$f(c) = \frac{1}{4}\int_{-1}^{3} (x^3 - 1)\,dx.$$

$$f(c) = \frac{1}{4}\left(\frac{x^4}{4} - x\right)\Big|_{-1}^{3} = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{81}{4} - 3\right) - \left(\frac{1}{4} - 1\right)\right] = 4.$$

$f(c) = 4 \Rightarrow c^3 - 1 = 4 \Rightarrow c = \sqrt[3]{5}$. Además, $-1 < \sqrt[3]{5} < 3$.

Ejemplo 2

Calcular el valor medio μ de $f: x \to x^2$ en el intervalo $[-1; 4]$, y encontrar un punto $c \in (-1; 4)$ tal que $f(c) = \mu$.

$$\int_{-1}^{4} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{4} = \frac{64}{3} + \frac{1}{3} = \frac{65}{3}.$$

Según el teorema, el valor medio se encuentra dividiendo el valor de la integral por la longitud del intervalo.

Resulta $\mu = \frac{1}{5}\,\frac{65}{3} \Rightarrow \mu = \frac{13}{3} = 4{,}\widehat{3}$.

Para encontrar el punto c observamos que:

$$f(c) = \frac{13}{3} \Rightarrow c^2 = \frac{13}{3} \Rightarrow |c| = \sqrt{\frac{13}{3}} = 2{,}08.$$

Descartando el valor negativo, pues no pertenece al intervalo dado, obtenemos $c = \sqrt{\frac{13}{3}}$.

♦ El valor medio $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$ es la "media aritmética" de los valores de f en el intervalo $[a; b]$.

Para justificar esta denominación, recordemos que se llama media aritmética de n números $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ al valor $\frac{1}{n}(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots\ldots + y_n)$.

Ahora bien, consideremos una subdivisión P del intervalo $[a; b]$ en n subintervalos de igual longitud h. En cada subintervalo elegimos un valor de f y lo multiplicamos por h. Obtenemos así la suma $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,h$. Esta suma es una suma inferior de f en $[a; b]$ si $f(x_i)$ es el valor mínimo en $[x_{i-1}; x_i]$; una suma superior si $f(x_i)$ es el máximo, o una suma intermedia si $f(x_i)$ es un valor cualquiera. Cuanto menor es el número positivo h, la suma correspondiente es una mejor aproximación de la integral $\int_a^b f$.

Viendo que n h es la longitud del intervalo $[a; b]$, el cociente $\frac{\sum f(x_i)\,h}{n\,h} =$

$= \dfrac{\sum f(x_i)}{n}$ es un valor aproximado del valor medio de f y es a su vez la media aritmética de los valores elegidos.

En el ejemplo anterior, si dividimos $[-1; 4]$ en subintervalos de longitud 1, obtenemos la subdivisión $P = [-1; 0; 1; 2; 3; 4]$.

Eligiendo los valores $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 4$, $f(3) = 9$ y $f(4) = 16$,

$$\mu_P = \frac{1}{5}(0 + 1 + 4 + 9 + 16) \Rightarrow \mu_P = 6.$$

Para subintervalos de longitud $\frac{1}{2}$, si además de los valores anteriores calculamos $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$, $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4}$ y $f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{49}{4}$,

obtenemos $\mu_{P'} = \dfrac{1}{10}\left(30 + \dfrac{85}{4}\right) \Rightarrow \mu_{P'} = 5{,}125.$

Para valores cada vez más pequeños de h, los números que se obtienen se aproximan cada vez más al valor medio $4{,}\overline{3}$.

♦ Valor eficaz

En algunas aplicaciones interesa el valor que se obtiene considerando el valor medio del cuadrado de la función.

$$\alpha^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b f^2.$$

Su raíz cuadrada positiva suele llamarse "valor eficaz" de la función:

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2}.$$

En especial se utiliza el valor eficaz para funciones periódicas cuando la longitud del intervalo coincide con el período.

Aplicación

Hallar el valor medio y el valor eficaz de $f: x \to \operatorname{sen} x$ en $[0; 2\pi]$.

Valor medio: $\mu = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x \, dx = \dfrac{1}{2\pi}(-\cos x)\Big|_0^{2\pi} = 0.$

Valor eficaz: $\alpha^2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 x \, dx = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dfrac{1-\cos 2x}{2}\, dx =$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}.$$

Luego, $\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

EJERCICIOS

1) Evaluar las integrales correspondientes a los ejercicios de la sección 1, es decir:

a) $\int_0^5 \sqrt{25 - x^2}$ b) $\int_0^3 (x^2 - 1)$

c) $\int_0^3 (x^2 + x)$ d) $\int_1^3 (x^2 - 7x + 2)$

f) $\int_1^6 (x^2 - 6x + 10)$ g) $\int_0^2 (2x + 1) + \int_2^4 (x^2 - 4x + 9) + \int_4^5 9$

2) Evaluar las siguientes integrales:

a) $\int_0^2 x^3$ b) $\int_1^4 (x^2 - 2x + 3)$

c) $\int_{-5}^{-1} (x^2 + 1)$ d) $\int_1^4 x(\sqrt{x} - 3)$

e) $\int_4^9 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ f) $\int_{-3}^{-1} \frac{x^2 - 1}{x^5}$

g) $\int_3^6 \sqrt{x - 2}$ h) $\int_{-1}^1 \frac{2x}{(4 + x^2)^2}$

i) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1 + 8x^2}}$ j) $\int_1^4 \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

k) $\int_0^1 x(x^2 - 1)$ l) $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\sqrt{1 - \frac{1}{x}}$

m) $\int_3^4 (x^3 + 3x^2)$ n) $\int_0^1 (e^x \cdot x)$

r) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2(5x)$ s) $\int_{-1}^2 (-x^2 + 5)$

3) Hallar el valor medio μ de cada función en $[a; b]$ y hallar $c \in (a; b) / f(c) = \mu$.

$f: x \to x^3$ en $[0; 4]$ $g: x \to \sqrt{x}$ en $[0; 4]$

$h: x \to \dfrac{1}{x^2 + 1}$ en $[0; 1]$ $m: x \to \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$ en $[0; 1]$

$r: x \to 3x^2 - 2x - 5$ en $[0; 2]$ $s: x \to \dfrac{1}{x + 2}$ en $[-1; 0]$

4) Hallar el valor eficaz de $f: x \to \operatorname{sen}^2 x$ en $[0; \pi]$.

♦V. Integrales impropias

Al dar el concepto de integral según Riemann, hemos exigido que la función f considerada estuviese definida y acotada en un intervalo cerrado $[a; b]$.

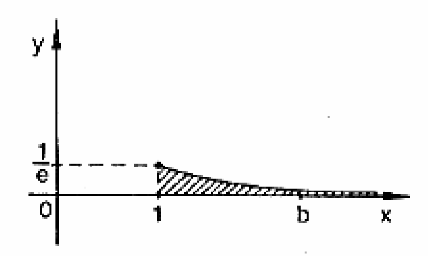
Si se elimina alguna de esas restricciones impuestas a la función o al intervalo, se puede generalizar la idea de integral definida mediante las llamadas integrales impropias.

La teoría de integrales impropias presenta gran similitud con la teoría de las series y no será estudiada en este texto. Daremos a continuación solamente una idea sobre las integrales impropias de primera y segunda especie.

1) Integrales impropias de primera especie (intervalo infinito)

Consideremos la función $f: x \to e^{-x}$ para $x \geq 1$.

La función f es integrable en cualquier intervalo $[1; b]$, o sea, para cualquier número real $b \geq 1$ existe la integral (propia) $\int_1^b f$.



Resulta $\int_1^b e^{-x} = (-e^{-x})\Big|_1^b = -e^{-b} - e^{-1} = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^b}$.

Si consideramos la función integral $F: b \to \int_1^b e^{-x}$, la función F tiene límite finito para $b \to +\infty$.

En efecto, es $\lim\limits_{b \to +\infty} \int_1^b e^{-x} = \lim\limits_{b \to +\infty} \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^b}\right) = \frac{1}{e}$

En este caso, entonces, existe el límite finito $\lim\limits_{b \to +\infty} \int_1^b e^{-x} = \frac{1}{e}$

El símbolo $\int_1^{+\infty} e^{-x}$ se utiliza para representar el límite anterior y se dice que esta integral impropia de primera especie converge al número $\frac{1}{e}$.

En general, entonces, si existe la integral $\int_a^b f$ para cualquier número real $b \geq a$, el símbolo $\int_a^{+\infty} f$ se llama integral impropia de primera especie de la función f en el conjunto no acotado $[a; +\infty)$. Si existe el límite finito $\lim\limits_{b \to +\infty} \int_a^b f = A$,

la integral impropia mencionada converge al número real A y se acepta la siguiente definición:

$$\int_a^{+\infty} f = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f = A.$$

Si el límite indicado es infinito, la integral impropia es divergente, y si no existe dicho límite, la integral impropia es oscilante.

En forma análoga se define $\int_{-\infty}^b f = \lim\limits_{a \to -\infty} \int_a^b f$, si este límite existe.

2) Integral impropia de segunda especie (integrando infinito)

Consideremos ahora la función $f: x \to \frac{1}{\sqrt{5-x}}$ en el intervalo semiabierto a derecha $[4;5)$, y observemos que f no está acotada en ningún entorno del punto 5. Por otra parte, si c es cualquier número real tal que $4 \leq c < 5$, f es integrable en el intervalo cerrado $[4; c]$.

Sea la función integral $F: c \to \int_4^c \frac{1}{\sqrt{5-x}}$.

Es $F(c) = \int_4^c \frac{1}{\sqrt{5-x}} = \left(-2\sqrt{5-x}\right)\Big|_4^c = -2\sqrt{5-c} + 2\sqrt{1}$.

Si buscamos el límite de los valores de F a izquierda del punto 5, es

$$\lim_{c \to 5^-} F(c) = \lim_{c \to 5^-} (-2\sqrt{5-c} + 2) = 2.$$

En este caso el símbolo $\int_4^{5^-} f$ designa una integral impropia de segunda especie, pues f no está acotada en ningún entorno del punto 5. El punto 5 es un punto *singular* de la función f.

El número 2 es el valor de la integral impropia mencionada y se define:

$$\int_4^{5^-} \frac{1}{\sqrt{5-x}} = \lim_{c \to 5^-} \int_4^c \frac{1}{\sqrt{5-x}} = 2.$$

En este caso la integral impropia $\int_4^{5^-} f$ es convergente.

En general, entonces, si la función f está definida en el intervalo semiabierto a derecha $[a; b)$, si existe la integral $\int_a^c f$ para cualquier número real c tal que $a \leq c < b$, y si $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \infty$, el símbolo $\int_a^{b^-} f$ se llama integral impropia de segunda especie de la función f con punto singular b. Si existe el límite finito $\lim\limits_{c \to b^-} \int_a^c f = A$, la integral impropia mencionada converge al número real A y se acepta la siguiente definición:

$$\int_a^{b^-} f = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f = A.$$

Análogamente, si la función f está definida en el intervalo semiabierto a izquierda (a; b], si existe la integral $\int_c^b f$ para cualquier número real c tal que $a < c \leq b$, si a es un punto singular de la función f, o sea, es $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$, y si existe el número real $A = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f$, se define:

$$\int_{a^+}^{b} f = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f = A.$$

Si se considera la función $f: x \to \frac{1}{\sqrt{x}}$ en el intervalo (0; 1], el símbolo $\int_{0^+}^1 f$ corresponde a una integral impropia de segunda especie con punto singular 0.

En efecto, es $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$, y si c es un número real tal que $0 < c \leq 1$, la función f es integrable en [c; 1] y es

$$\int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = (2\sqrt{x})\Big|_c^1 = 2 - 2\sqrt{c}.$$

Resulta $\lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{c \to 0^+} (2 - 2\sqrt{c}) = 2.$

Por definición es $\int_{0^+}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = 2.$

EJERCICIOS

Indicar si convergen las siguientes integrales impropias:

1) $\int_0^{+\infty} x\, e^{-x}$ 2) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}$ 3) $\int_{0^+}^9 \frac{1}{\sqrt{x}}$

4) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}$ 5) $\int_{0^+}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ 6) $\int_{-1}^{+\infty} \frac{x}{e^{(x^2)}}$

7) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}$ 8) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}$ 9) $\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^2}$

10) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ 11) $\int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{(-x^2)}$ 12) $\int_{-1}^{0^-} \frac{1}{x^2}$

13) $\int_0^{8^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x-8}}$ 14) $\int_0^{1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 15) $\int_{1^-}^{2} \frac{4}{(x-1)^2}$

16) $\int_{0^+}^1 \frac{5}{\sqrt{x}}$ 17) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ 18) $\int_0^{b^-} \frac{1}{\sqrt{b-x}}$

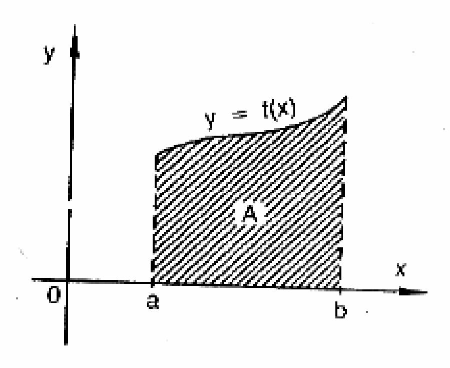
VI. Aplicaciones geométricas de la integral

1) Cálculo de áreas

a) *En coordenadas cartesianas*

De acuerdo con la idea intuitiva de área de un recinto de ordenadas dada al comienzo del capítulo, si f es una función no negativa, continua en un intervalo [a; b], es natural dar la siguiente definición de área:

$$A = \int_a^b f \qquad (1).$$



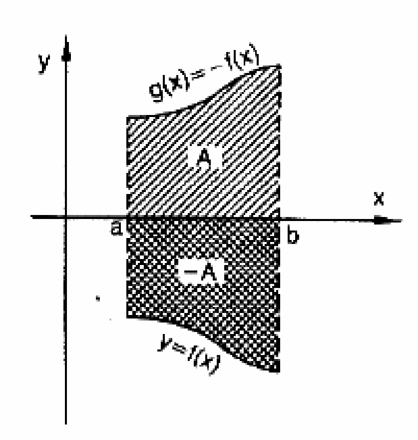
Si la función es positiva, la curva se encuentra por encima del eje de abscisas y el área es un número positivo.

En cambio, si f es una función continua, negativa en [a; b], para que el área resulte también un número positivo la definición adecuada de área es la siguiente:

$$A = -\int_a^b f \qquad (2).$$

Para justificar la definición dada basta considerar la función g no negativa en [a;b] y tal que $\forall x: g(x) = -f(x)$.

Por definición (1) de área, como g es no negativa, resulta:



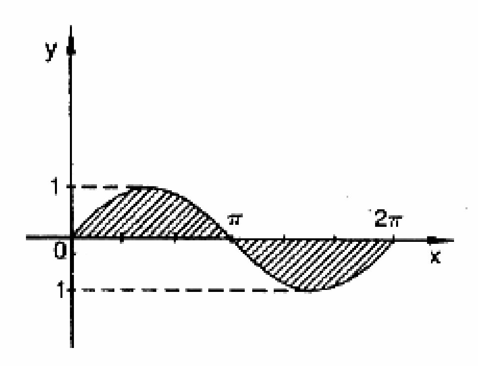
$$A = \int_a^b g = \int_a^b (-f) = - \int_a^b f.$$

Obsérvese que si una función continua en un intervalo [a;b] alcanza en él valores de signos contrarios, la integral definida está dada directamente por la regla de Barrow, pero esta integral sólo da una suma algebraica de áreas, que no corresponde a la idea geométrica de "área no negativa o absoluta".

Consideremos, por ejemplo, la siguiente integral:

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x = \left(-\cos x\right)\Big|_0^{2\pi} = - \cos 2\pi + \cos 0 = -1 + 1 = 0.$$

La integral vale 0 porque el área entre 0 y π es 2 y entre π y 2 π es también 2, pero la función es negativa.

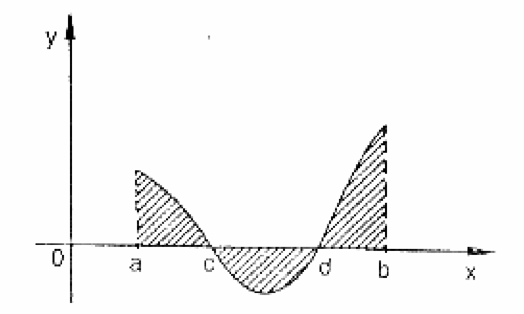


Luego, cuando se trata de calcular el área, se buscan las intersecciones con el eje x y se aplican sucesivamente las definiciones (1) y (2).

En el ejemplo anterior el área correspondiente a la sinusoide entre 0 y 2π es:

$$A = 2 \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x = 2 \left(-\cos x\right)\Big|_0^{\pi} = 2\ (-\cos \pi + \cos 0) = 2 \cdot 2 = 4.$$

En general,

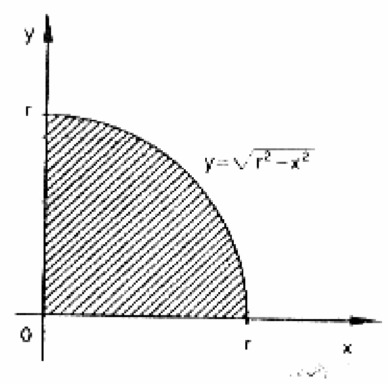


Si f es continua en [a;b]:

$$A = \int_a^c f - \int_c^d f + \int_d^b f.$$

Ejemplo

Calcular el área de un círculo de radio r.



Por consideraciones geométricas inmediatas, $A = 4 \int_0^r f.$

Luego, debe calcularse la integral $A = 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx.$

Para resolverla conviene recurrir al método de sustitución de variable, haciendo $x = r \operatorname{sen} t$.

De acuerdo con la regla de Barrow, basta calcular una primitiva cualquiera de $\sqrt{r^2 - x^2}$ y luego restar los valores correspondientes a los extremos del intervalo de integración. Pero al efectuar el cambio de variable es necesario cambiar los límites de integración considerándolos respecto de la nueva variable.

Si se hace $x = r \operatorname{sen} t$, para $x = r$ es $r = r \operatorname{sen} t$, $\operatorname{sen} t = 1$ y $t = \operatorname{arc\,sen} 1$ (en el primer cuadrante).

Luego, si $x = r$ es $t = \frac{\pi}{2}$.

Si $x = 0$ es $0 = r \operatorname{sen} t$, $\operatorname{sen} t = 0$ y $t = 0$.
O sea, si $x = 0$ es $t = 0$.

Además, $dx = r \cos t \, dt$.

Por lo tanto, $A = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} \cos t \, dt = 4 r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt =$

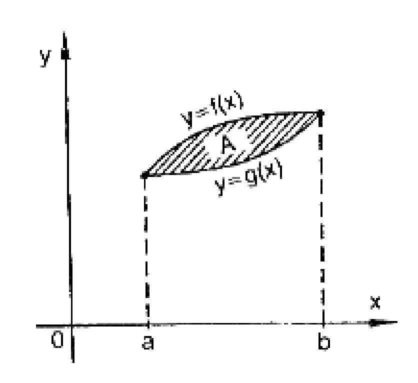
$$= 4 r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 2 r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) \, dt =$$

$$= 2 r^2 \left(t + \frac{\operatorname{sen} 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 r^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\operatorname{sen} \pi}{2} - 0 - \frac{\operatorname{sen} 0}{2} \right) =$$

$$= \pi r^2$$

Área entre dos curvas

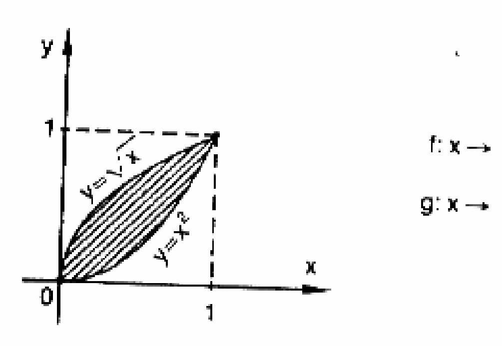
Si se desea hallar el área del recinto comprendido entre los gráficos de dos funciones continuas, basta efectuar la resta de las áreas correspondientes.



$$A = \int_a^b f - \int_a^b g = \int_a^b (f - g).$$

Ejemplo 1

Hallar el área del recinto sombreado en la siguiente figura:



$f: x \to \sqrt{x}$

$g: x \to x^2$

Deben buscarse primero las abscisas de los puntos de intersección de ambas curvas.

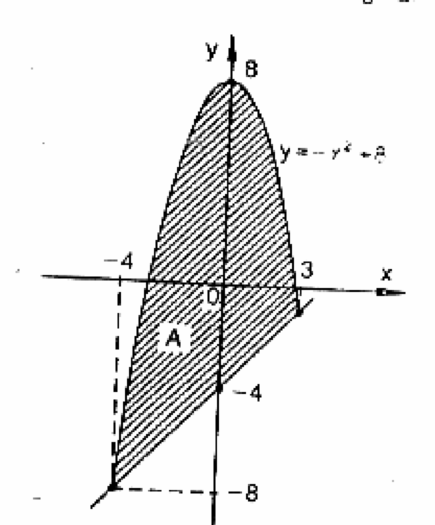
En este caso, $a = 0$ y $b = 1$.

Luego, $A = \int_0^1 [f(x) - g(x)] = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) =$

$$= \left(\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Ejemplo 2

Área del recinto sombreado en la figura:



$f: x \to -x^2 + 8$

$g: x \to x - 4$

Los puntos de intersección tienen abscisas que satisfacen ambas ecuaciones.

Luego, para esos puntos se verifica: $-x^2 + 8 = x - 4$.

$$x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \pm \frac{7}{2}.$$

Luego, $a = -4$, $b = 3$.

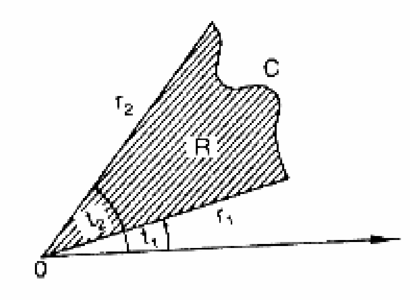
$$A = \int_{-4}^{3} [-x^2 + 8 - (x-4)] = \int_{-4}^{3} (-x^2 - x - 12) =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 12x\right)\Big|_{-4}^{3} = -9 - \frac{9}{2} + 36 + \frac{(-4)^3}{3} + \frac{16}{2} + 48 =$$

$$= \frac{343}{6}$$

b) ***En coordenadas polares***

Sea R un recinto plano limitado por la curva C y los radiovectores r_1 y r_2.



Consideremos que la curva C está asociada a la ecuación polar $r = f(t)$ con $t_1 \leq t \leq t_2$.

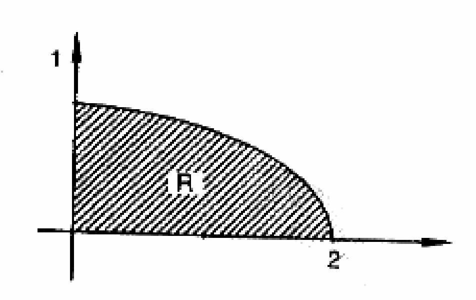
El área del recinto R puede aproximarse mediante áreas de sectores circulares inscriptos o circunscriptos en R, correspondientes a subdivisiones del intervalo $[t_1 ; t_2]$.

Recordando que el área de un sector circular de radio r y ángulo central Δt es área (S) $= \frac{1}{2} r^2 \Delta t$, puede definirse

área (R) $= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} [f(t)]^2 \, dt$ con una justificación similar a la utilizada para coordenadas cartesianas.

Ejemplo 1

Calcular el área de la región limitada por el gráfico de la cardioide de ecuación polar $r = 1 + \cos t$ para $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ (véase pág. 120).



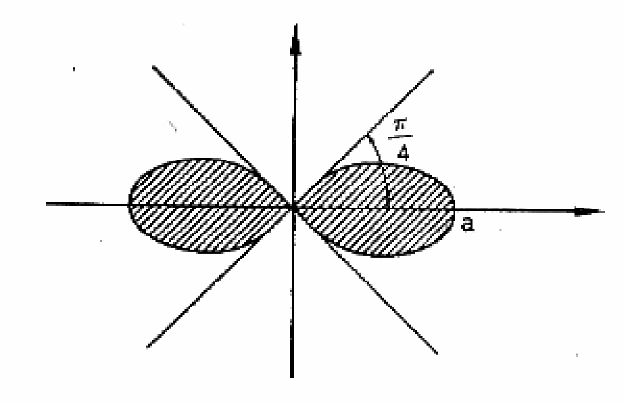
$$\textbf{área (R)} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos t)^2 \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos t + \cos^2 t) \, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left(t + 2 \operatorname{sen} t + \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 + \frac{3}{8}\pi.$$

Ejemplo 2

Área de la región limitada por la curva de ecuación polar $r^2 = a^2 \cos 2t$ (lemniscata de Bernoulli).



$$\textbf{área (R)} = 4 \, \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2t \, dt = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t \, dt = a^2 \operatorname{sen} 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$

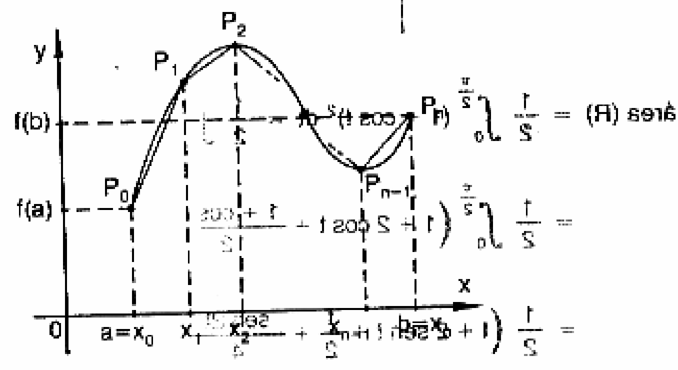
La integral definida se utiliza también para precisar matemáticamente otros conceptos geométricos y físicos, como área y volumen de un cuerpo de revolución, longitud de arcos, centro de gravedad, momento de inercia, etcétera.

Consideraremos brevemente algunos de ellos, indicando en forma intuitiva las razones que llevan a las definiciones dadas en cada caso. Para justificar correcta-

mente cada definición deben adaptarse los razonamientos efectuados al definir área de un recinto de ordenadas.

2) Rectificación de arcos

a) *En coordenadas cartesianas*



Observando el gráfico de una función continua f, puede hablarse intuitivamente de la longitud del arco de curva comprendido entre los puntos [a;f(a)] y [b;f(b)] de su gráfico.

El procedimiento para definir longitud de un arco de curva es análogo al utilizado para definir área mediante la integral.

Para ello se considera una subdivisión del intervalo [a;b] y se forma la poligonal correspondiente a la misma uniendo mediante segmentos los puntos $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$.

Si se suman las longitudes de dichos segmentos, se obtiene la longitud de la poligonal correspondiente inscripta en el arco considerado.

Se define como longitud del arco de curva al supremo s del conjunto formado por las longitudes de las poligonales inscriptas en el mismo.

Si f tiene derivada continua en [a;b], entonces el gráfico de f entre los puntos [a;f(a)] y [b;f(b)] tiene longitud:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx.$$

Para esbozar la obtención de esta fórmula, consideremos una subdivisión cualquiera $P = \{x_0; x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ del intervalo [a;b].

La longitud de uno de los segmentos que forman la poligonal inscripta se puede hallar utilizando la fórmula de Pitágoras.

Si llamamos ds a dicha longitud, es:

$$ds = \sqrt{(x_h - x_{h-1})^2 + [f(x_h) - f(x_{h-1})]^2} =$$

$$= \sqrt{1 + \left[\frac{f(x_h) - f(x_{h-1})}{x_h - x_{h-1}}\right]^2}\ (x_h - x_{h-1}).$$

Aplicando el teorema del valor medio del cálculo diferencial (pág. 247):

$$\exists c_h \in (x_{h-1};x_h) / f'(c_h) = \frac{f(x_h) - f(x_{h-1})}{x_h - x_{h-1}}.$$

Reemplazando,

$$ds = \sqrt{1 + [f'(c_h)]^2}\ (x_h - x_{h-1}).$$

La longitud de la poligonal inscripta correspondiente a la subdivisión P está dada por la suma $\sum_{h=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_h)]^2}\ (x_h - x_{h-1})$.

Por hipótesis, f' es continua y también lo es $\sqrt{1 + (f')^2}$, y, por lo tanto, es integrable.

Se define la longitud de arco buscada como la integral correspondiente, es decir, $s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx$.

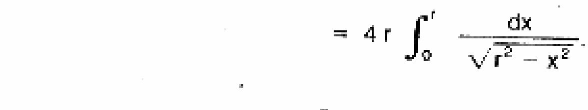
Ejemplo

Calcular la longitud de la circunferencia de radio r.

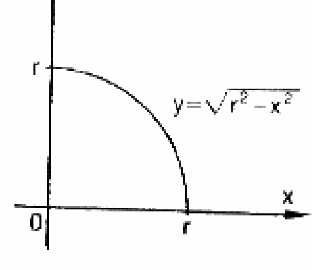
Si s es la longitud buscada, es $s = 4 \int_0^r \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx$, donde

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad y \quad f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

$$s = 4 \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\ dx = 4 \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\ dx =$$



$$= 4r \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$



Se puede resolver la integral mediante la siguiente sustitución:

$$x = r \operatorname{sen} t.$$

Resulta $dx = r \cos t\, dt$, y los límites de integración son 0 y $\frac{\pi}{2}$, respectivamente.

$$s = 4r\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r\cos t\,dt}{r\sqrt{1-\mathrm{sen}^2 t}} = 4r\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = 4r\,(t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 4r\cdot\frac{\pi}{2} = 2\pi r.$$

b) ***En coordenadas polares***

Recordando que $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$, la fórmula obtenida para calcular la longitud de un arco puede anotarse también

$$s = \int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$

Ahora bien, si la curva C está dada en forma paramétrica por dos funciones g y h, ambas derivables en el intervalo $[t_1;t_2]$, tales que $x = g(t) \wedge y = h(t) \wedge t_1 \leq t \leq t_2$, resulta:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\,dt.$$

En especial, si la curva C es el gráfico polar de una función f dada por $r = f(t)$, las ecuaciones paramétricas de C son $x = f(t)\cos t \wedge y = f(t)\,\mathrm{sen}\,t$ (véase pág. 100).

Por lo tanto, $dx = f'(t)\cos t - f(t)\,\mathrm{sen}\,t$,

$dy = f'(t)\,\mathrm{sen}\,t + f(t)\cos t$.

Siendo $ds^2 = dx^2 + dy^2$, obtenemos $ds^2 = [f(t)]^2 + [f'(t)]^2$.

Finalmente, $s = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[f(t)]^2 + [f'(t)]^2}\,dt$.

Una notación aceptada para $f'(t) = \dfrac{dr}{dt}$ es $\dot{r}$. Con ella resulta finalmente una fórmula simple de recordar, que permite calcular la longitud de un arco de curva definida por su ecuación polar:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{r^2 + \dot{r}^2}\,dt.$$

Ejemplo

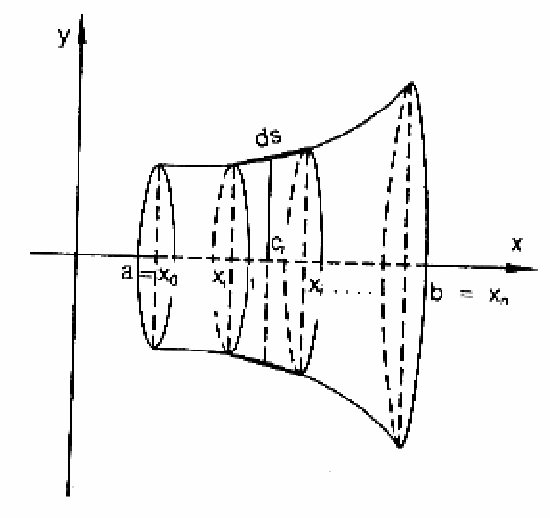
Calcular la longitud de una circunferencia de radio a cuya ecuación polar es $r = a\ (a > 0)$.

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2}\,dt = a\int_0^{2\pi} dt = 2\pi a.$$

3) **Área de superficies de revolución**

Si un arco de curva gira alrededor del eje x, barre una superficie de revolución.

Por consideraciones análogas a las anteriores, se puede definir el área correspondiente mediante una integral adecuada.

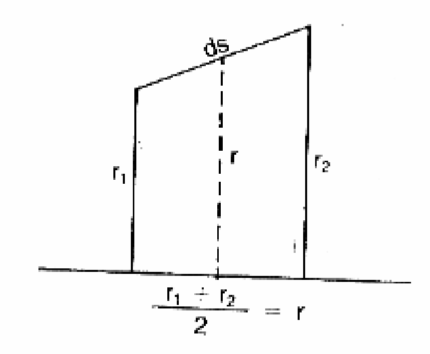


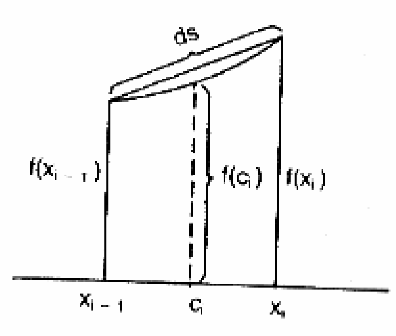
A una subdivisión cualquiera P del intervalo $[a;b]$ se le puede asociar, como ya se ha visto en la página 472, una poligonal cuya longitud aproxime la del arco de curva.

Cada uno de los segmentos de la poligonal engendra, al girar alrededor del eje x, la superficie lateral de un tronco de cono cuya área se obtiene mediante una fórmula de geometría elemental: longitud de circunferencia media por longitud de generatriz.

Por ejemplo, para el subintervalo $[x_{i-1};x_i]$, resulta:

$$A_i = 2\pi\frac{r_1 + r_2}{2}\,ds \Rightarrow A_i = 2\pi\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\,ds.$$





Ahora bien, el valor $\dfrac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$ puede aproximarse por $f(c_i)$, siendo c_i el punto medio del subintervalo $[x_{i-1};x_i]$. Cuanto mayor es n, mejor es la aproximación que se obtiene.

O sea, $A_i \approx 2\pi f(c_i)\,ds$.

Por lo tanto, el área de la superficie de revolución puede aproximarse mediante la suma de las áreas de las n superficies laterales de los troncos de conos.

Es decir, $A_{\sigma} = \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(c_i)\ ds.$

Esto justifica, entonces, la siguiente definición para el área de una superficie de revolución:

$$A_r = \int_a^b 2\pi f(x)\ ds \quad (f(x) > 0).$$

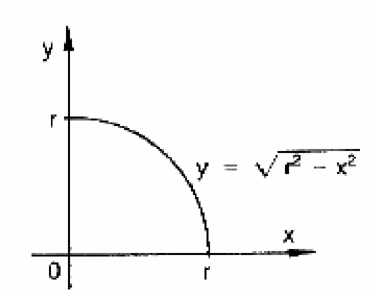
Resulta finalmente:

$$A_r = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx.$$

Ejemplo

Calcular el área de una superficie esférica de radio r.

La semiesfera puede considerarse engendrada por la revolución de un cuarto de círculo alrededor del eje x.



Es $A_r = 2 \cdot 2\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx,$

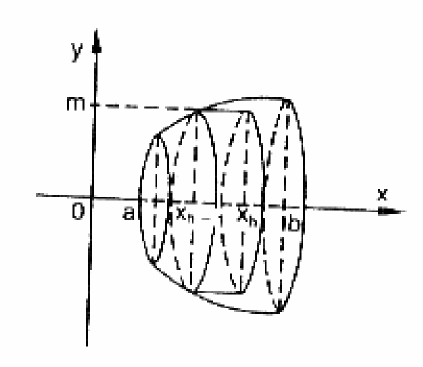
donde $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ y $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$

$$A_r = 4\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\ dx = 4\pi r \int_0^r dx =$$

$$= 4\pi r\ (x)\Big|_0^r = 4\pi r^2.$$

4) Volumen de sólidos de revolución

Repitiendo una vez más los procedimientos anteriores, se define mediante una integral el volumen del cuerpo engendrado por un recinto de ordenadas al girar alrededor del eje x.



Aproximando el recinto mediante rectángulos, si se hacen girar dichos rectángulos alrededor del eje x se obtienen cilindros de revolución.

Elijamos rectángulos inscriptos y consideremos en particular uno de ellos, aquel que tiene como longitud de la base el valor $(x_h - x_{h-1})$ y como longitud de la altura el mínimo de f en el subintervalo $[x_{h-1}; x_h]$.

El volumen del cilindro engendrado por este rectángulo está dado por la fórmula:

$$V = \pi [m_h]^2 (x_h - x_{h-1}).$$

El volumen correspondiente al polígono inscripto considerado está dado por la suma $\sum_{h=1}^{n} \pi [m_h]^2 (x_h - x_{h-1}).$

Por definición, el volumen del sólido de revolución es

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\ dx.$$

Ejemplo

Calcular el volumen de la esfera de radio r.

$$V = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2)\ dx = 2\pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^r = 2\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

EJERCICIOS

1) Área del recinto formado por $f: x \to x^3$ entre 1 y 3.

2) Área del recinto formado por $f: x \to \sqrt{x}$ entre 0 y 4.

3) Área del recinto formado por $f: x \to 2\sqrt{x}$ entre 4 y 9.

4) Área del recinto formado por $f: x \to \sqrt{2px}$ entre 0 y $a > 0$.

5) Área de la superficie interior a la elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

6) Área del recinto entre los gráficos de $f: x \to \frac{1}{2}x^2$ y $g: x \to \sqrt{x}$.

7) Área del recinto entre los gráficos de $f: x \to 4 - x^2$ y $g: x \to x^2 - 4$.

8) Área del recinto entre los gráficos de $f: x \to x - 2$ y $g: x \to 2x - x^2$.

9) Área del recinto entre los gráficos de $f: x \to x^2 - 4x + 1$ y $g: x \to -x + 5$.

10) Área del recinto entre los gráficos de $f: x \to x$ y $g: x \to 6x - x^2$.

11) Área del recinto entre los gráficos de $f: x \to x - x^2$ y $g: x \to -x$.

12) Área del recinto entre los gráficos de $f: x \to \sqrt{x}$ y $g: x \to x^4$.

13) Área del recinto entre los gráficos de $f: x \to 4 - x^2$ y $g: x \to x + 2$.

14) Área de la superficie limitada por un lazo de la curva de ecuación polar $r = 2 \operatorname{sen} 3t \; \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}\right)$.

15) Área de la superficie limitada por la curva $r = t$ para $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

16) Área de la superficie limitada por la cardioide $r = a(1 + \cos t)$.

17) Calcular la longitud de arco correspondiente al gráfico de f entre los puntos $(0;0)$ y $(4;8)$ si $f: x \to x^{3/2}$.

18) Ídem para $f: x \to 2\sqrt{x}$ entre $(0;0)$ y $(1;2)$.

19) Longitud del arco de curva definida paramétricamente por
$x = 5t - 2 \;\wedge\; y = 2t + 8 \;\wedge\; 1 \leq t \leq 5$.

20) Longitud de un arco de la cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t) \;\wedge\; y = a(1 - \cos t)$.

21) Longitud de la cardioide $r = a(1 + \cos t)$.

22) Longitud de la curva de ecuación polar $r = \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} \; \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$.

23) Área de la superficie de revolución engendrada por el gráfico de $f: x \to 2\sqrt{x}$ entre 0 y 4, al girar alrededor del eje x.

24) Volumen del sólido de revolución engendrado por el gráfico de $f: x \to \sqrt{x}$ entre 0 y 4, al girar alrededor del eje x.

25) Volumen del sólido de revolución engendrado por el gráfico de $f: x \to \frac{1}{x}$ entre 1 y 3, al girar alrededor del eje x.

26) Volumen engendrado por el gráfico de $f: x \to \frac{4}{x-1}$ entre -5 y -2, al girar alrededor del eje x.

27) Volumen del elipsoide de revolución engendrado por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

28) Volumen engendrado por una onda de sinusoide (entre 0 y π) al girar alrededor del eje x.

VII. Aplicaciones físicas

La integral definida admite también aplicaciones físicas. Veremos brevemente algunas de ellas, ya que los problemas físicos se resuelven más naturalmente mediante integrales dobles, triples o curvilíneas. Por otra parte, la justificación de las definiciones es sencilla si se considera a la integral como límite (Cálculo 2, pág. 261).

1) Trabajo

Si una fuerza f, que actúa sobre un punto material, lo hace desplazarse a lo largo de una recta (eje x) entre dos puntos, el trabajo realizado se define $W = \int_a^b f(x)\,dx$.

Ejemplo

La fuerza requerida para estirar un resorte es proporcional al alargamiento y se necesita una fuerza de 3 $\vec{kg}$ para estirarlo 0,5 cm. ¿Qué trabajo se realiza para estirarlo 2 cm?

$f(x) = kx$. Según los datos, para $f(x) = 3$ es $x = \frac{1}{2}$.

Luego, $3 = k\frac{1}{2} \Rightarrow k = 6 \Rightarrow f(x) = 6x$.

$$W = \int_0^2 6x\,dx = 3x^2 \Big|_0^2 = 12.$$

Teniendo en cuenta las unidades, el trabajo es de 0,12 kgm.

2) Masa

a) *Unidimensional*

Consideremos un alambre que tenga la forma de una curva asociada a una función continua f entre dos puntos.

Si el alambre tiene densidad constante ρ, su masa se obtiene multiplicando ρ por la longitud del arco de curva.

O sea, es $M = \rho\ s$. Recordando que $s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx$, resulta $M = \rho \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx$.

Si la densidad es variable, se define $M = \int_a^b \rho\ ds$.

b) *Bidimensional*

Consideremos una lámina D, plana y delgada, que tiene la forma de un recinto de ordenadas limitado superiormente por el gráfico de una función f continua y no negativa. Si la densidad es constante porque la lámina está construida con material homogéneo, la masa de la lámina es proporcional al área de la superficie y se define como el producto de la densidad por el área, es decir.

$$M = \rho \cdot \text{área } D = \rho \int_a^b f(x)\ dx.$$

Si la densidad es variable, es $M = \int_a^b \rho\ f(x)\ dx$.

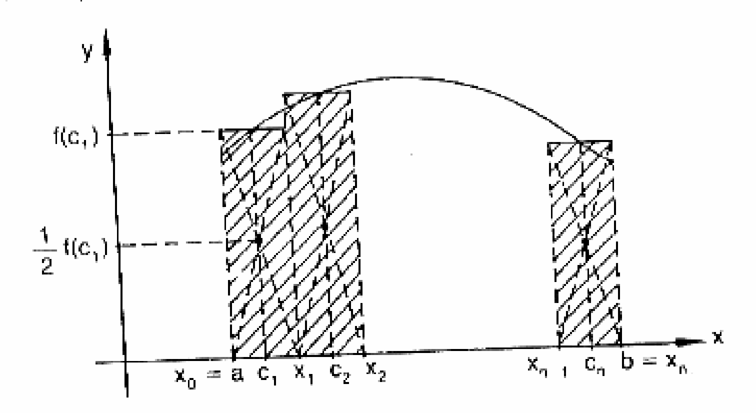
3) **Momento** (respecto de un eje)

a) *De primer orden (estático)*

Se define, para una partícula, como el producto de su masa por la distancia a una recta. Puede demostrarse, si se trata del momento de un conjunto de n partículas, que éste no se altera si se considera una sola partícula cuya masa es la suma de las n masas, localizada en el centro de masa o centro de gravedad del sistema. Si el material es homogéneo, el centro de masa coincide con el centro geométrico. Por ejemplo, en un triángulo, es el punto de intersección de las medianas; en un rectángulo, el punto de intersección de las diagonales; etcétera.

Por lo tanto, si se trata de obtener las coordenadas del centro de masa de una lámina que tiene la forma de un recinto de ordenadas, puede aproximarse el cálculo considerando rectángulos, tal como se hizo al hallar la integral definida.

Sea la subdivisión $P = [x_0; x_1; x_2; \ldots; x_n]$. En cada subintervalo buscamos su punto medio. Por ejemplo, c_1 es el punto medio de $[x_0; x_1]$, y elegimos como primer rectángulo el que tiene altura $f(c_1)$. Análogamente para los demás subintervalos.



Para el primer rectángulo, su centro de masa es el punto de abscisa c_1 y ordenada $\frac{1}{2} f(c_1)$. Su momento estático, entonces, respecto del eje x, es el producto de su masa por la distancia al eje x. Ahora bien, el área es $f(c_1)\ (x_1 - x_0)$, la densidad constante es ρ y la distancia del centro de masa al eje x es $\frac{1}{2} f(c_1)$.

$$\text{Luego,}\quad M_{1x} = \underbrace{\frac{1}{2} f(c_1)}_{\text{distancia}} \cdot \underbrace{\rho\ f(c_1)\ (x_1 - x_0)}_{\text{masa}}.$$

$$\text{O sea,}\quad M_{1x} = \frac{1}{2} [f(c_1)]^2\ \rho\ \Delta x_1.$$

Respecto del eje y, en cambio, la distancia del centro de masa está dada por c_1 y resulta $M_{1y} = c_1 \rho f(c_1) \Delta x_1$.

Haciendo lo mismo en cada uno de los rectángulos y sumando, obtenemos los momentos de la lámina formada por los n rectángulos:

$$M_{Rx} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} [f(c_i)]^2\ \rho \Delta x_i \quad \wedge \quad M_{Ry} = \sum_{i=1}^{n} c_i f(c_i)\ \rho \Delta x_i.$$

La primera suma es una suma de Riemann para la función dada por $\frac{1}{2} \rho\ [f(x)]^2$ y la segunda para $\rho x\ f(x)$.

Por lo tanto, podemos dar las siguientes definiciones para los primeros momentos de la lámina mencionada:

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b \rho\ [f(x)]^2\ dx \quad \wedge \quad M_y = \int_a^b \rho\ x\ f(x)\ dx.$$

Si se trata de los primeros momentos de una curva, pueden justificarse, de manera análoga, las siguientes definiciones:

$$M_x = \int_a^b \rho y\ ds \quad \wedge \quad M_y = \int_a^b \rho x\ ds.$$

b) *De segundo orden (inercia)*

Para los momentos de inercia, en lugar de considerar la distancia al eje, se considera el cuadrado de la misma.

4) **Centro de masa**

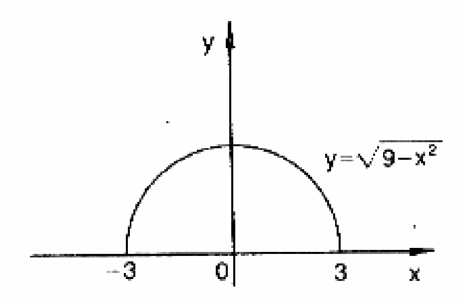
Recordando que la masa de un sistema se concentra en su centro de masa, se define al centro de masa como un punto de coordenadas $(x_G; y_G)$, tales que

$$M_y = \underbrace{M}_{\text{masa}} \cdot \underbrace{x_G}_{\text{distancia}} \quad \wedge \quad M_x = M \cdot y_G.$$

$$\text{Por lo tanto,}\quad x_G = \frac{M_y}{M} \quad \wedge \quad y_G = \frac{M_x}{M}.$$

Ejemplo 1

Hallar el centro de masa de un alambre, con densidad uniforme, que tiene la forma de una semicircunferencia de radio 3.



Por razones de simetría, es $x_G = 0$.

$$y_G = \frac{M_x}{M} = \frac{\int_a^b \rho y ds}{\int_a^b \rho ds} = \frac{\int_a^b y ds}{\int_a^b ds} = \frac{\int_a^b y ds}{s}.$$

La longitud de la semicircunferencia es $s = 3\pi$.

Además, $f(x) = \sqrt{9-x^2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$.

Luego, $y_G = \dfrac{1}{3\pi}\displaystyle\int_{-3}^{3} f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow y_G = \frac{1}{3\pi}\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{9-x^2}}\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_G = \frac{1}{3\pi}\int_{-3}^{3} 3\,dx \Rightarrow y_G = \frac{6}{\pi}.$$

Resulta $(x_G; y_G) = \left(0; \dfrac{6}{\pi}\right)$.

Ejemplo 2

Centro de masa de una lámina semicircular de radio 3 y densidad uniforme.

$$x_G = 0 \quad y_G = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b \rho\,[f(x)]^2\,dx}{\int_a^b \rho\,f(x)\,dx} = \frac{1}{2}\,\frac{\int_a^b [f(x)]^2\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

El área del semicírculo es $\dfrac{9}{2}\pi$.

$$\text{Luego,}\quad y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_{-3}^{3}(9-x^2)\,dx}{\frac{9}{2}\pi} \Rightarrow y_G = \frac{1}{9\pi}\int_{-3}^{3}(9-x^2)\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_G = \frac{1}{9\pi}\left(9x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-3}^{3} \Rightarrow y_G = \frac{4}{\pi}.$$

EJERCICIOS

1) Trabajo realizado al estirar un resorte de 12 cm de longitud hasta 18 cm, si se necesita una fuerza de 4 $\vec{kg}$ para extenderlo 1 cm.
2) Centro de masa de una varilla de 30 cm de longitud, cuya densidad es proporcional al cuadrado de su distancia a un extremo.
3) Centro de masa de un arco completo de la cicloide: $x = a(t - \text{sen } t) \wedge y = a(1-\cos t)$, recordando que su longitud es $8a$.
4) Centro de masa de la cardioide $r = a(1 + \cos t)$.
5) Centro de masa de una lámina de densidad uniforme, limitada por el gráfico de $f: x \to 4 - x^2$ y las rectas $y = 0$, $x = -1$.
6) Ídem para $f: x \to \ln x$, $x = 1$, $x = e$, $y = 0$.
7) Ídem si la lámina está limitada por $y = 2 - 3x^2$ y la recta $3x + 2y = 1$.

VIII. Integración aproximada

Al definir al comienzo de este capítulo sumas superiores e inferiores y demostrar sus propiedades, pudo observarse que los valores de estas sumas aproximan la integral, y que la aproximación es mejor cuanto más fina es la subdivisión. También, que la aproximación puede hacerse mediante sumas intermedias.

Ejemplo 1

En la página 441, para $f: x \to x^2 + 1$ en $[0;3]$, obtuvimos los siguientes resultados:

$$P = [0;1;2;3] \Rightarrow \underline{S}_P(f) = 8 \wedge \overline{S}_P(f) = 17,$$

$$P' = \left[0;1;\frac{3}{2};2;3\right] \Rightarrow \underline{S}_{P'}(f) = 8{,}625 \wedge \overline{S}_{P'}(f) = 16{,}125.$$

Si elegimos una subdivisión más fina P'':

$$P'' = \left[0;\frac{1}{2};1;\frac{3}{2};2;\frac{5}{2};3\right] \Rightarrow \underline{S}_{P''}(f) = 9{,}875 \wedge \overline{S}_{P''}(f) = 14{,}375.$$

Si calculamos la integral, resulta $\displaystyle\int_0^3 (x^2+1)\,dx = \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_0^3 = 12.$

En general, la aproximación mejora si se considera, para cada subdivisión, el promedio de la suma superior y la inferior.

En nuestro ejemplo, para P: $\dfrac{1}{2}(\overline{S}_P + \underline{S}_P) = 12{,}5.$

para P': $\frac{1}{2}(\bar{S}_{P'} + \underline{S}_{P'}) = 12{,}375.$

para P'': $\frac{1}{2}(\bar{S}_{P''} + \underline{S}_{P''}) = 12{,}125.$

Si aproximamos la integral de esta última forma, podemos, en cada caso, acotar el error cometido.

En efecto, sabemos que $\forall P$: $\underline{S}_P \leq \int_a^b f \leq \bar{S}_P$.

Si restamos el número $\frac{1}{2}(\bar{S}_P + \underline{S}_P)$, obtenemos:

$$\underline{S}_P - \frac{1}{2}\bar{S}_P - \frac{1}{2}\underline{S}_P \leq \int_a^b f - \frac{1}{2}(\bar{S}_P + \underline{S}_P) \leq \bar{S}_P - \frac{1}{2}\bar{S}_P - \frac{1}{2}\underline{S}_P \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}(\bar{S}_P - \underline{S}_P) \leq \int_a^b f - \frac{1}{2}(\bar{S}_P + \underline{S}_P) \leq \frac{1}{2}(\bar{S}_P - \underline{S}_P) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\int_a^b f - \frac{1}{2}(\bar{S}_P + \underline{S}_P)\right| \leq \frac{1}{2}(\bar{S}_P - \underline{S}_P).$$

El error cometido, entonces, al aproximar la integral por $\frac{1}{2}(\bar{S}_P + \underline{S}_P)$ no supera al número $\frac{1}{2}(\bar{S}_P - \underline{S}_P)$.

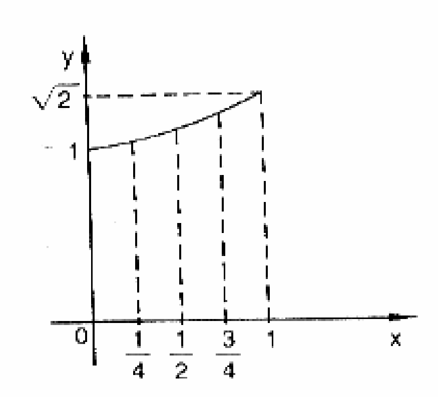
En el ejemplo, para P: $\epsilon_1 < \frac{1}{2}(17 - 8) \Leftrightarrow \epsilon_1 < 4{,}5.$

para P': $\epsilon_2 < \frac{1}{2}(16{,}125 - 8{,}625) \Leftrightarrow \epsilon_2 < 3{,}75.$

para P'': $\epsilon_3 < \frac{1}{2}(14{,}375 - 9{,}875) \Leftrightarrow \epsilon_3 < 2{,}25.$

Ejemplo 2

Sea: $f: x \to \sqrt{1 - x^3}$ en $[0;1]$.



Consideremos una subdivisión regular P de cuatro subintervalos, cada uno con la misma longitud $\frac{1}{4}$.

Como f es estrictamente creciente en $[0;1]$, en cada subintervalo $[x_{i-1};x_i]$, $f(x_{i-1})$ es el mínimo absoluto de f y $f(x_i)$ es el máximo absoluto.

Luego,

$$\underline{S}_P = \frac{1}{4}\left[f(0) + f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right)\right]$$

$$\bar{S}_P = \frac{1}{4}\left[f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1)\right].$$

$$\underline{S}_P + \bar{S}_P = \frac{1}{4}\left[f(0) + 2f\left(\frac{1}{4}\right) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1)\right]$$

$$\frac{1}{2}(\underline{S}_P + \bar{S}_P) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\left(f(0) + f(1)\right) + f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right)\right]$$

En la última expresión puede observarse que los cálculos se simplifican porque la función es monótona y los subintervalos tienen la misma longitud.

En este ejemplo,

$$\frac{1}{2}(\underline{S}_P + \bar{S}_P) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{2}\right) + \frac{\sqrt{65}}{8} + \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{91}}{8}\right]$$

$$= \frac{1}{4}(0{,}5 + 0{,}707 + 1{,}008 + 1{,}061 + 1{,}192)$$

$$\simeq 1{,}117.$$

Ahora bien, muchas veces no es simple o no es posible encontrar los extremos absolutos de la función elegida en cada subintervalo de una subdivisión. En ese caso pueden utilizarse sumas intermedias.

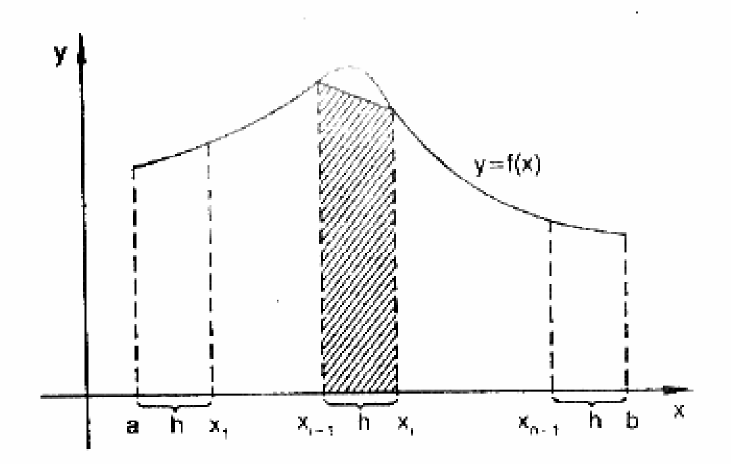
Estas sumas intermedias aparecen sencillamente si se aproxima el área del recinto de ordenadas mediante sumas de áreas de trapecios en lugar de sumas de áreas de rectángulos. Este método se conoce con el nombre de "regla de los trapecios".

Regla de los trapecios (aproximación lineal)

Sea f una función continua en $[a;b]$ y P una subdivisión regular en subintervalos de longitud h.

Para el intervalo $[x_{i-1};x_i]$, el área del trapecio asociado es

$$A_i = \frac{1}{2}h\,[f(x_{i-1}) + f(x_i)].$$



Para la suma de áreas, obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \frac{1}{2} h \sum_{i=1}^{n} [f(x_{i-1})+f(x_i)]$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \frac{1}{2} h \, [f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\dots+2f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

Pero $x_0 = a,\ x_1 = a + h,\ x_2 = a + 2h,\ \dots\dots\dots,\ x_n = a + nh = b.$

Luego, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} A_i = \frac{1}{2} h \, [f(a)+2f(a+h)+2f(a+2h)+\dots+2f(a+(n-1)h)+f(b)].$

O bien, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} A_i = h \left[\frac{1}{2} f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\dots+f(a+(n-1)h)+\frac{1}{2} f(b)\right].$

En realidad el método consiste en aproximar, en cada subintervalo, la función f por una función lineal.

Por lo tanto, *regla de los trapecios*: si f es continua en [a;b], entonces

$$\int_a^b f \simeq h\left[\frac{1}{2}\,[f(a)+f(b)] + \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)\right] \quad \text{con} \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Puede demostrarse que si f tiene derivada segunda en el intervalo, tal que $\forall x$: $|f''(x)| < A$, entonces el error que se comete al aproximar la integral es $\epsilon < \dfrac{A\,h^2(b-a)}{12}$.

Ejemplo 1

Aproximar, según la regla de los trapecios, $\int_0^2 (x^4 + x)\,dx$ con $n = 4$.

$$h = \frac{b-a}{4} \Rightarrow h = \frac{1}{2} \Rightarrow P = \left[0; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 2\right].$$

Tabulando valores, obtenemos:

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
x_i	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x_i)$	0	$\frac{9}{16}$	2	$\frac{105}{16}$	18

$$\sum A_i = \frac{1}{2}\left(\frac{0+18}{2} + \frac{9}{16} + 2 + \frac{105}{16}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{145}{8} = 9{,}0625.$$

Para acotar el error, $f'(x) = 4x^3 + 1 \Rightarrow f''(x) = 12x^2 \Rightarrow |f''(x)| \leq 48.$

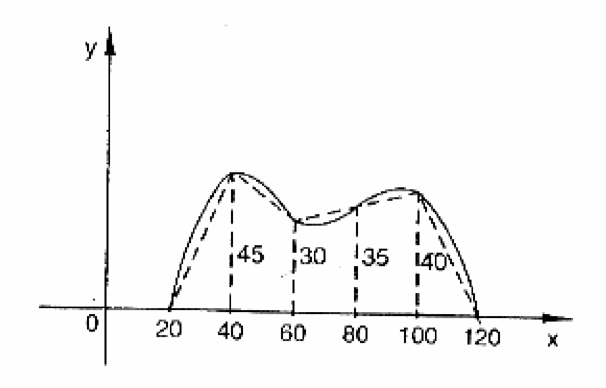
$$\epsilon \leq \frac{48}{12}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2 \Rightarrow \epsilon \leq 2.$$

En este caso podemos obtener el valor exacto por integración:

$$\int_0^2 (x^4 + x)\,dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{32}{5} + 2 = \frac{42}{5} = 8{,}4.$$

Ejemplo 2

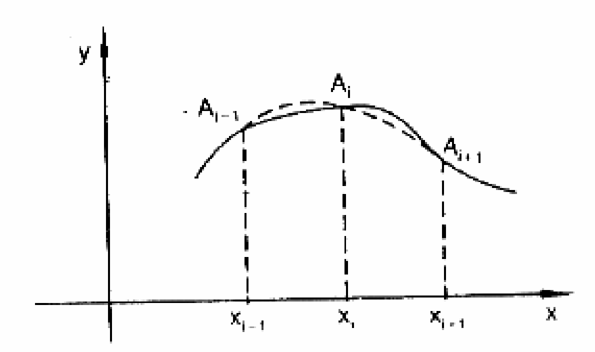
Aproximar por regla de trapecios el área del recinto limitado por la curva C, si se efectuaron las siguientes mediciones en puntos equidistantes:



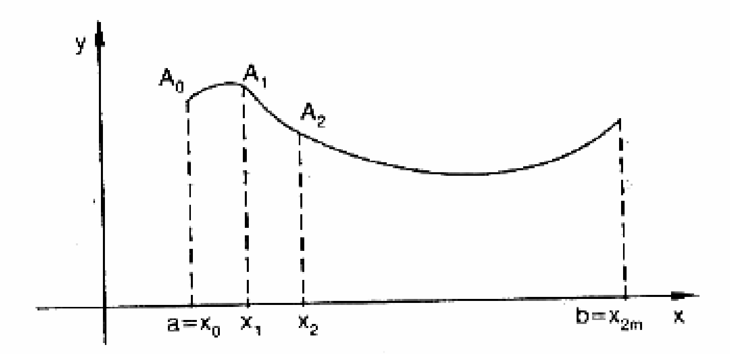
$$\sum A_i = 20\left(\frac{1}{2}\cdot 0 + 45 + 30 + 35 + 40\right) = 20 \cdot 150 = 3.000.$$

Regla de Simpson* (aproximación parabólica)

Este método consiste en aproximar el gráfico de una función continua f por arcos de parábolas en cada par de intervalos. Cada una de esas parábolas se determina mediante las tres intersecciones de las ordenadas con la curva.



En primer lugar consideramos una subdivisión regular P en un número par de subintervalos, o sea, $P = [x_0; x_1; x_2; ....; x_n]$ con $n = 2m$.

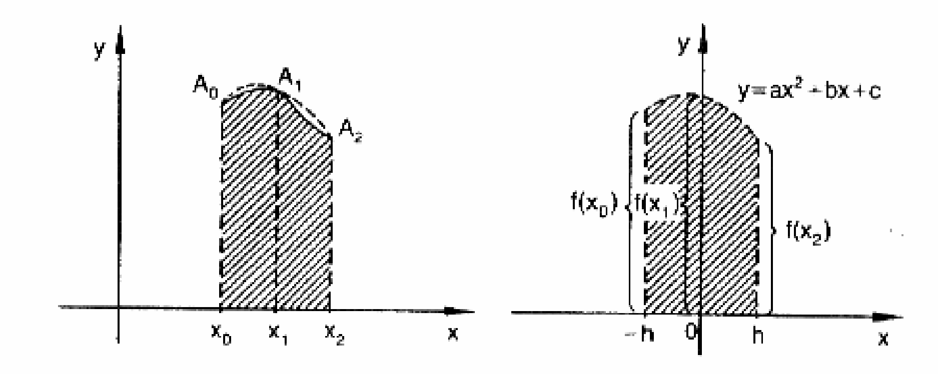


En $[x_0; x_2]$ queremos aproximar la curva asociada a f mediante una parábola de eje vertical a la cual pertenecen los tres puntos no alineados A_0, A_1 y A_2. Sabemos que dicha parábola es única y su ecuación está dada por un polinomio de segundo grado.

El área del recinto limitado superiormente por dicha parábola se obtiene integrando el polinomio correspondiente en el intervalo $[x_0; x_2]$. Esa integral dará un valor aproximado del valor exacto $I_2 = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\, dx$.

Para facilitar los cálculos elegimos un recinto congruente con el anterior, donde el intervalo, también de longitud 2h, está centrado en el origen. El área de este recinto es la misma del recinto inicial.

* Thomas Simpson (1710-1761), matemático inglés, miembro de la Sociedad Real de Londres y autor, entre otros, de tratados sobre probabilidades, álgebra y geometría.



$$\int_{-h}^{h} (ax^2 + bx + c)\, dx = \left(a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx\right)\Big|_{-h}^{h} = 2a\frac{h^3}{3} + 2ch =$$

$$= \frac{h}{3}\,(2ah^2 + 6c) \qquad (1).$$

Como $(-h; f(x_0))$, $(0; f(x_1))$ y $(h; f(x_2))$ son puntos de la parábola, se verifican simultáneamente las siguientes ecuaciones:

$$f(x_0) = a(-h)^2 + b(-h) + c = ah^2 - bh + c \qquad (2),$$
$$f(x_1) = c,$$
$$f(x_2) = ah^2 + bh + c \qquad (3).$$

Sumando (2) y (3):

$$f(x_0) + f(x_2) = 2ah^2 + 2c \Rightarrow f(x_0) + f(x_2) = 2ah^2 + 2f(x_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{f(x_0) + f(x_2) - 2f(x_1)}{2\,h^2}.$$

Reemplazando en (1) obtenemos:

$$I_2 \simeq \frac{h}{3}\left(f(x_0) + f(x_2) - 2f(x_1) + 6f(x_1)\right).$$

Entonces,

$$I_2 = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\, dx \simeq \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right).$$

De la misma forma pueden aproximarse las áreas de los demás recintos. Así resultan:

$$I_4 = \int_{x_2}^{x_4} f(x)\, dx \simeq \frac{h}{3}\left(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right)$$

....

$$I_n = \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\left(f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right).$$

Sumando,

$$\sum_{i=1}^{m} I_{2i} \simeq \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right).$$

Simplificando la notación:

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{3}\,(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).$$

O sea, a las ordenadas de los extremos del intervalo se les suman las ordenadas de índices impares multiplicadas por 4 y las ordenadas de índices pares multiplicadas por 2. La suma así obtenida se multiplica por $\frac{h}{3}$.

Puede demostrarse que, si $\forall x \in [a;b]\ \exists f^{IV}(x)$ con $|f^{IV}(x)| < A$, el error del valor que se obtiene es $\epsilon < \frac{A\,h^4}{180}\,(b-a)$.

Ejemplo 1

Aproximar mediante la regla de Simpson $I = \int_0^2 (x^4 + x)dx$ para $n = 4$ (véase pág. 487).

$$h = \frac{1}{2} \qquad y_0 = 0 \qquad y_1 = \frac{9}{16} \qquad y_2 = 2 \qquad y_3 = \frac{105}{16} \qquad y_4 = 18$$

$$I \simeq \frac{1}{6}\left(0 + \frac{9}{4} + 4 + \frac{105}{4} + 18\right) = 8{,}4167$$

$$f'''(x) = 24x \Rightarrow f^{IV}(x) = 24 \Rightarrow \epsilon < \frac{24}{180}\cdot\frac{1}{16}\cdot 2 \Rightarrow \epsilon < \frac{1}{60}$$

Ejemplo 2

Aproximar $\int_1^5 \frac{1}{x}\,dx$ a) por regla de trapecios y b) por regla de Simpson, con $n = 8$.

Para ambas reglas necesitamos conocer los valores de f en los puntos de la subdivisión indicada.

x_i	$x_0=1$	$x_1=1{,}5$	$x_2=2$	$x_3=2{,}5$	$x_4=3$	$x_5=3{,}5$	$x_6=4$	$x_7=4{,}5$	$x_8=5$
$f(x_i)$	1	0,667	0,5	0,4	0,333	0,286	0,25	0,222	0,2

a) *Por regla de trapecios:*

$$\int_1^5 \frac{1}{x}\,dx \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{1+0{,}2}{2} + 0{,}667 + 0{,}5 + 0{,}4 + 0{,}333 + 0{,}286 + 0{,}25 + 0{,}222\right)$$

$$\int_1^5 \frac{1}{x}\,dx \simeq \frac{1}{2}\,(0{,}6 + 2{,}658) \Rightarrow \int_1^5 \frac{1}{x}\,dx \simeq 1{,}629 \Rightarrow \ln 5 \simeq 1{,}629$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f''(x) \leq 2 \text{ si } x \in [1;5]$$

Luego, $\epsilon \leq 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{12}\cdot 4 \Rightarrow \epsilon \leq \frac{1}{6} \Rightarrow \epsilon < 0{,}2.$

El valor exacto es $\ln 5 = 1{,}609\dots$

b) *Por regla de Simpson:*

$$\int_1^5 \frac{1}{x}\,dx \simeq \frac{1}{6}\,(1 + 2{,}667 + 1 + 1{,}6 + 0{,}667 + 1{,}143 + 0{,}5 + 0{,}889 + 0{,}2)$$

$$\int_1^5 \frac{1}{x}\,dx \simeq \frac{1}{6}\cdot 9{,}665 \Rightarrow \ln 5 \simeq 1{,}611$$

$$f'''(x) = -\frac{6}{x^4} \Rightarrow f^{IV}(x) = \frac{24}{x^5} \Rightarrow |f^{IV}(x)| \leq 24 \text{ si } x \in [1;5]$$

$$\epsilon \leq \frac{24}{180}\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot 4 = \frac{1}{30} \Rightarrow \epsilon < 0{,}033.$$

EJERCICIOS

1) Siendo $f: x \to x^2$, aproximar $\int_0^6 f(x)\,dx$ para $n = 6$ a) por regla de trapecios y b) por regla de Simpson.

2) Ídem si $f: x \to \frac{1}{x+2}$ con $n = 4$.

3) Aproximar $\pi = 4\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}$ por regla de Simpson para $n = 10$.

4) Aproximar ln 3 y acotar el error, a) por regla de trapecios y b) por regla de Simpson, con $n = 4$.

5) Aproximar por regla de Simpson $\int_0^2 \frac{1}{x^4+1}\,dx$ con $n = 4$.

6) Ídem para $\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ con $n = 6$.

7) Ídem para $\int_0^1 \sqrt{1 - x^3}\, dx$ con $n = 10$.

8) Una curva continua pasa por los puntos $(x_i; f(x_i))$ de la tabla siguiente:

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	0,5	1	1,2	1,6	2,3	2,4	2,5

Aproximar el área de la superficie bajo la curva a) por regla de trapecios y b) por regla de Simpson.

RESPUESTAS A EJERCICIOS

CAPÍTULO 12

Sección I

1) $\underline{S}_p = 15$ $\quad \overline{S}_p = 22$ $\quad \underline{S}_{p'} = 11 + \sqrt{24}$ $\quad \overline{S}_{p'} = 12 + 4\sqrt{6}$

$\underline{S}_{p''}\ 7 - 2\sqrt{6} - \sqrt{21}$ $\quad \overline{S}_{p''} = 12 + 2\sqrt{6} + \sqrt{21}$

2) $\underline{S}_p = 7{,}625$ $\quad \overline{S}_p = 17{.}875$ $\quad \underline{S}_{p'} = 9{,}25$ $\quad \overline{S}_{p'} = 15{,}25$

3) $\underline{S}_p = 8$ $\quad \overline{S}_p = 20$ $\quad \underline{S}_{p'} = 10{,}625$ $\quad \overline{S}_{p'} = 16{,}625$

4) $\underline{S}_p = -18$ $\quad \overline{S}_p = -12$ $\quad \underline{S}_{p'} = -16{,}75$ $\quad \overline{S}_{p'} = -13{,}75$

5) $\underline{S}_p = 7$ $\quad \overline{S}_p = 32$ $\quad \underline{S}_{p'} = 11$ $\quad \overline{S}_{p'} = 24$

6) $\underline{S}_p = 24$ $\quad \overline{S}_p = 32$

Sección IV

1) a) $\frac{25\pi}{4}$ b) 12 c) $\frac{27}{2}$ d) $-\frac{46}{3}$ f) $\frac{50}{3}$ g) $\frac{83}{3}$

2) a) 4 b) 15 c) $\frac{136}{3}$ d) $-\frac{101}{10}$ e) $\frac{32}{3}$ f) $-\frac{16}{81}$

g) $\frac{14}{3}$ h) 0 i) $\frac{1}{4}$ j) $4\sqrt{3} - \frac{8\sqrt{2}}{3}$ k) $-\frac{1}{4}$ l) $\frac{\sqrt{2}}{6}$

m) $\frac{323}{4}$ n) 1 r) $\frac{\pi}{4}$ s) 12

3) f: $\mu = 16$ $\quad c = 2\sqrt[3]{2}$ $\qquad$ g: $\mu = \frac{4}{3}$ $\quad c = \frac{16}{9}$

h: $\mu = \frac{\pi}{4}$ $\quad c = \sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}$ $\qquad$ m: $\mu = \frac{\pi}{6}$ $\quad c = \frac{2}{\pi}\sqrt{\pi^2 - 9}$

r: $\mu = 7$ $\quad c = \frac{1 + \sqrt{7}}{3}$ $\qquad$ s: $\mu = \ln 2$ $\quad c = \frac{1}{\ln 2} - 2$

4) $\frac{\sqrt{6}}{4}$

Sección V

1) 1 2) diverge a $+\infty$ 3) 6 4) 2 5) $\frac{3}{2}$ 6) $\frac{1}{2e}$ 7) 1

8) 1 9) $\frac{1}{2}$ 10) diverge a $-\infty$ 11) $\int_{-\infty}^{0} f + \int_0^{+\infty} f = 0$

12) diverge a $+\infty$ 13) -6 14) $\frac{\pi}{2}$ 15) diverge a $+\infty$

16) 10 17) $\int_{-1}^{0-} f + \int_{0+}^{1} f = 6$ 18) $2\sqrt{b}$

Sección VI

1) 20 2) $\frac{16}{3}$ 3) $\frac{76}{3}$ 4) $\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{p\,a^3}$ 5) π ba 6) $\frac{2}{3}$

7) $\frac{64}{3}$ 8) $\frac{9}{2}$ 9) $\frac{125}{6}$ 10) $\frac{125}{6}$ 11) $\frac{4}{3}$ 12) $\frac{7}{15}$

13) $\frac{9}{2}$ 14) $\frac{\pi}{3}$ 15) $\frac{\pi^3}{48}$ 16) $\frac{3}{2}\pi a^2$ 17) $\frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$

18) $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$ 19) $4\sqrt{29}$ 20) 8a 21) 8a 22) 2

23) $\frac{8\pi}{3}(5\sqrt{5} - 1)$ 24) 8π 25) $\frac{2\pi}{3}$ 26) 12π

27) $\frac{4\pi}{3}ab^2$ 28) $\frac{\pi^2}{2}$

Sección VII

1) $\frac{2}{2.700}(37\sqrt{37} - 1)$ kgm

2) $\rho = kx^2$ $\quad x_G = \frac{45}{2}$ $\quad y_G = 0$

3) $x_a = \pi a \quad y_a = \frac{4}{3}a$ 4) $x_a = \frac{4a}{5} \quad y_a = 0$

5) $\left(\frac{1}{4}; \frac{17}{10}\right)$ 6) $\left(\frac{1+e^2}{4}; \frac{e}{2} - 1\right)$ 7) $\left(\frac{1}{4}; \frac{4}{5}\right)$

Sección VIII

1) a) 73 b) 72 2) a) 0,697 b) 0,693 3) 3,1416

4) a) 1,117 $\epsilon \leq \frac{1}{12}$ b) 1,100 $\epsilon \leq \frac{1}{60}$ 5) 1,080 6) 1,852

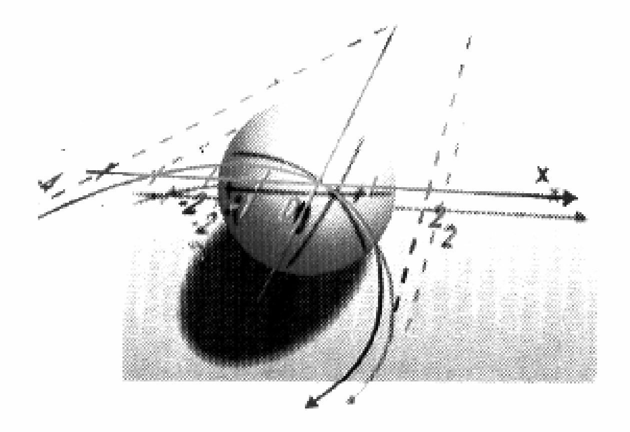
7) 0,837 8) a) 9,5 b) 10

Índice alfabético

Introducción al

ANÁLISIS MATEMÁTICO

(CÁLCULO 1)



601

ISBN 950-02-5293-7

